Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2026

(9e année – Secondaire III)

le mercredi 25 février 2026

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 26 février 2026

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Puisque $8-7=6-5=4-3=2-1=1$, on a $(8-7)+(6-5)+(4-3)+(2-1)=1+1+1+1=4$.
Réponse : (A)

2. La valeur de $\sqrt{36}$ est 6 et la valeur de $\sqrt{49}=7$. Puisque 37 est supérieur à 36 et inférieur à 49, alors $\sqrt{37}$ est compris entre 6 et 7. Puisque 37 est beaucoup plus proche de 36 que de 49, alors parmi les réponses proposées la valeur de $\sqrt{37}$ est plus proche de 6.
Plus précisément, $6{,}5^2=42{,}25$ et $37<42{,}25$, donc $\sqrt{37}<6{,}5$.
Réponse : (B)

3. On a $2+2+2+2=8$ pour le membre gauche de l'équation donnée. Puisque $2^3=8$, alors $x=3$.
Réponse : (C)

4. En écrivant les fractions données sous forme décimale, on obtient $2\frac{3}{4}=2{,}75$, $2\frac{1}{4}=2{,}25$ et $2\frac{9}{10}=2{,}9$. En les plaçant du plus petit au plus grand, on obtient 2,25 ; 2,3 ; 2,45 ; 2,75 ; 2,9 ou $2\frac{1}{4}$, 2,3, 2,45, $2\frac{3}{4}$, $2\frac{9}{10}$. Le nombre du milieu est 2,45.
Réponse : (B)

5. Un cube a 12 arêtes, donc $12-9=3$ arêtes ne sont pas visibles.
Réponse : (D)

6. Dans chacune des figures 1, 2, 3 et 5, le chemin entre A et B parcourt exactement 4 cases de gauche à droite et 4 cases de bas en haut, donc chaque chemin a une longueur de $4+4=8$. Dans la figure 4, le chemin parcourt 2 cases horizontalement, 2 cases verticalement, puis le long de la diagonale d'un carré 2×2. Le chemin le long de la diagonale d'un carré 2×2 est plus court que de parcourir à la fois un côté horizontal et un côté vertical du même carré. Ainsi, la longueur du chemin dans la figure 4 est inférieure à 8 ; c'est le plus court des chemins donnés. (Avec le théorème de Pythagore, on peut confirmer que $\sqrt{2^2+2^2}$ est bien inférieur à 4.)
Réponse : (D)

7. La longueur totale de la locomotive et des n wagons de marchandises est 140 m. La longueur de la locomotive est 20 m, donc la longueur des n wagons est 140 m − 20 m = 120 m. Chaque wagon a une longueur de 15 m, donc $n=\dfrac{120\text{ m}}{15\text{ m}}=8$.
Réponse : (B)

8. Puisque $9=3\times 3$, le nombre 9 laisse un reste de 0 lorsqu'il est divisé par 3. Puisque $9=2\times 4+1$, le nombre 9 laisse un reste de 1 lorsqu'il est divisé par 4. Les restes obtenus en divisant chacun des autres nombres donnés par 3 et par 4 figurent dans le tableau suivant.

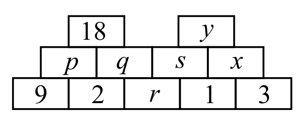
	9	11	10	13	8
reste après division par 3	0	2	1	1	2
reste après division par 4	1	3	2	1	0

Parmi les entiers donnés, 13 est celui dont le reste est le même qu'il soit divisé par 3 ou par 4.
Réponse : (D)

9. Chaque angle d'un triangle équilatéral mesure 60°, donc $\angle PQT = \angle QTP = 60^\circ$. Puisque $\angle STP = 120^\circ$, alors $\angle STQ = 120^\circ - \angle QTP = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$. La somme des trois angles du triangle QST est 180°, donc $\angle TQS = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.
Dans le triangle QRS, $QR = RS$, donc $\angle QSR = \angle SQR = \dfrac{180^\circ - 90^\circ}{2} = \dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.
La mesure de $\angle PQR$ est égale à $\angle PQT + \angle TQS + \angle SQR = 60^\circ + 30^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.
Réponse : (E)

10. Le carré en haut à gauche est divisé en 4 régions d'aire égale. Puisque 1 de ces 4 régions est ombrée, alors 25 % du carré est ombré.
Le carré en haut au centre est divisé en 8 régions d'aire égale. Puisque 2 de ces 8 régions sont ombrées, alors 25 % du carré est ombré.
Le carré en haut à droite est divisé en 2 grandes régions d'aire égale et 2 petites régions d'aire égale. Puisque 1 des grandes régions est ombrée, plus de 25 % du carré est ombré. On peut sinon noter que la région ombrée est composée de trois carrés 1×1 complets et de 6 demi-carrés 1×1, donc l'aire ombrée est 6. L'aire totale du carré 4×4 est 16, et $\frac{6}{16}$ n'est pas équivalent à 25 %.
Le carré en bas à gauche est divisé en 16 régions d'aire égale. Puisque 5 de ces 16 régions sont ombrées, plus de 25 % du carré est ombré.
Le carré en bas au centre est divisé en 4 grandes régions d'aire égale et 4 petites régions d'aire égale. Puisque 2 des 4 grandes régions sont ombrées et 2 des 4 petites régions sont ombrées, alors 50 % du carré est ombré.
Dans le carré en bas à droite, considérons un segment vertical entre le milieu du côté supérieur et le milieu du côté inférieur du carré. Le carré serait alors divisé en 4 régions d'aire égale. Puisque 1 de ces régions est ombrée, alors 25 % du carré est ombré.
Ainsi, les carrés en haut à gauche, en haut au centre et en bas à droite ont exactement 25 % de leur aire ombrée, donc il y a 3 tels carrés.
Réponse : (C)

11. Dans le diagramme, $p = 9 + 2 = 11$. Puisque $p + q = 18$, alors $q = 18 - 11 = 7$. Aussi, $2 + r = q = 7$, donc $r = 7 - 2 = 5$. Puisque $s = r + 1 = 5 + 1 = 6$ et $x = 1 + 3 = 4$, alors $y = s + x = 6 + 4 = 10$.



Réponse : (D)

12. Lorsqu'un point (x,y) est réfléchi par rapport à l'axe des abscisses, le point résultant a pour coordonnées $(x, -y)$. Ainsi, lorsque $P(2,3)$ est réfléchi par rapport à l'axe des des abscisses, le point résultant a pour coordonnées $(2, -3)$. Lorsqu'un point (x,y) subit une translation de 3 unités vers la gauche, le point résultant a pour coordonnées $(x - 3,y)$. Ainsi, lorsque $(2, -3)$ subit une translation de 3 unités vers la gauche, le point obtenu a pour coordonnées $(-1, -3)$.
Réponse : (A)

13. En mars, Max a lu $\frac{1}{3}$ des b livres, ce qui signifie qu'il lui restait $1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ des b livres, soit $\dfrac{2}{3}b$ livres, à lire. En avril, il a lu 5 livres de plus, laissant $\dfrac{2}{3}b - 5$ livres à lire.
Il lui restait alors 7 livres à lire, donc $\dfrac{2}{3}b - 5 = 7$.
En résolvant, on obtient $\dfrac{2}{3}b = 12$, soit $2b = 12 \times 3$, d'où $b = \dfrac{36}{2} = 18$.
Réponse : (A)

14. Dans le triangle WVZ, la mesure de $\angle ZWV$ est $90°$. Par le théorème de Pythagore, on obtient $WV^2 = VZ^2 - WZ^2 = 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64$, d'où $WV = 8$ (puisque $WV > 0$). L'aire du trapèze $VXYZ$ peut être déterminée en soustrayant l'aire du triangle WVZ de l'aire du carré $WXYZ$. L'aire du carré $WXYZ$ est $15^2 = 225$ et l'aire du triangle WVZ est $\frac{1}{2}(WV)(WZ) = \frac{1}{2}(8)(15) = 60$. L'aire du trapèze $VXYZ$ est $225 - 60 = 165$.

RÉPONSE : (D)

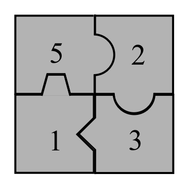
15. La voiture de Peter consomme 10,2 L de carburant aux 100 km, et consomme donc $2 \times 10{,}2$ L $=$ 20,4 L de carburant pour 200 km. Le carburant coûte 1,40 \$/L, donc Peter dépense 1,40 \$/L $\times$ 20,4 L $=$ 28,56 \$ en carburant.
La voiture de Mike consomme 6,6 L de carburant aux 100 km, et consomme donc $2 \times 6{,}6$ L $=$ 13,2 L de carburant pour 200 km. Le carburant coûte 1,40 \$/L, donc Mike dépense 1,40 \$/L$\times$13,2 L $=$ 18,48 \$ en carburant.
Mike dépense 28,56 \$ $-$ 18,48 \$ $=$ 10,08 \$ de moins que Peter en carburant.

RÉPONSE : (E)

16. Supposons que $QR = x$. Puisque $PR = 8$, alors $PQ = PR - QR = 8 - x$. Puisque $QS = 15$, alors $RS = QS - QR = 15 - x$, et donc $PS = PQ + QR + RS = (8 - x) + x + (15 - x) = 23 - x$. La plus petite longueur entière possible de $PS = 23 - x$ se réalise lorsque x est le plus grand entier possible. Puisque $PQ = 8 - x$, alors $8 - x > 0$, donc $x < 8$. La plus grande valeur entière de x inférieure à 8 est $x = 7$, et donc la plus petite longueur entière possible de PS est $23 - 7 = 16$. (On confirme : quand $x = 7$, $RS = 15 - x = 8$, donc RS a aussi une longueur supérieure à 0.)

RÉPONSE : (D)

17. Dans cette solution, on appelle *tenon* la partie de la pièce qui dépasse, et *mortaise* l'espace en retrait. Un tenon d'une pièce est conçu pour s'emboîter dans la mortaise correspondante d'une autre pièce.
La pièce 1 a un tenon en forme de trapèze. C'est la seule pièce avec un tenon de cette forme. La pièce 4 et la pièce 5 ont toutes deux une mortaise en forme de trapèze. Puisqu'il n'y a qu'un seul tenon en forme de trapèze, c'est soit la pièce 4 ou soit la pièce 5 qui ne sera pas utilisée pour former un carré.
La pièce 4 a un tenon en forme de triangle. La pièce 1 est la seule pièce avec une mortaise en forme de triangle. Cependant, il n'est pas possible d'insérer le tenon de la pièce 4 dans la mortaise de la pièce 1 tout en insérant simultanément le tenon de la pièce 1 dans la mortaise de la pièce 4. C'est donc la pièce 4 qui n'est pas utilisée pour former le carré. Le casse-tête complété est illustré ci-contre.



RÉPONSE : (D)

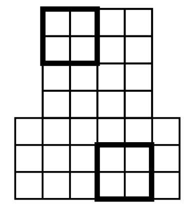
18. Le nombre d'entiers dans la première somme est $352 - 17 + 1 = 336$.
Le nombre d'entiers dans la deuxième somme est aussi $355 - 20 + 1 = 336$.
Chaque terme de la deuxième somme est 3 de plus que le terme correspondant dans la première somme.
C'est-à-dire, $20 - 17 = 3$, $21 - 18 = 3$, $22 - 19 = 3$, et ainsi de suite jusqu'à $355 - 352 = 3$.
Il y a 336 termes dans la deuxième somme, et chacun est 3 de plus que le terme correspondant dans la première somme, donc la deuxième somme est $336 \times 3 = 1008$ de plus que la première somme.
Ainsi, $x = 61\,992 + 1008 = 63\,000$.

RÉPONSE : (E)

19. On peut compter systématiquement le nombre de carrés en considérant les tailles possibles des carrés.

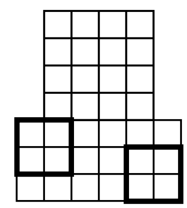
<u>Cas 1 : carrés de taille 1×1</u>
Il y a 34 tels carrés.

<u>Cas 2 : carrés de taille 2×2</u>
On commence par un carré 2×2 dans le coin supérieur gauche du diagramme. En déplaçant ce carré 2×2 d'une colonne vers la droite, on obtient un deuxième carré 2×2. En déplaçant ce deuxième carré d'une colonne vers la droite, on obtient un troisième carré 2×2. Ainsi, il y a 3 tels carrés 2×2 dans les deux premières rangées du diagramme.
Chacun de ces 3 carrés peut être déplacé d'une rangée vers le bas pour donner 3 autres carrés 2×2, chacun contenu dans les deuxième et troisième rangées du diagramme.

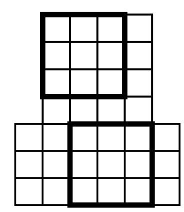


En continuant ainsi, il y a 3 tels carrés 2×2 dans les rangées trois et quatre, quatre et cinq, cinq et six, et six et sept. Ainsi, il y a $3 \times 6 = 18$ tels carrés 2×2.
Le premier et le dernier de ces 18 carrés sont illustrés dans le diagramme ci-dessus.

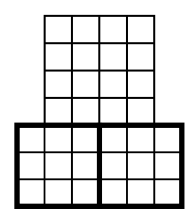
Il y a 4 carrés 2×2 supplémentaires. L'un d'eux occupe les deux cases les plus à gauche dans les rangées cinq et six. Ce carré peut être déplacé d'une rangée vers le bas, et chacun de ces carrés 2×2 peut être déplacé de quatre colonnes vers la droite. Le premier et le dernier de ces 4 carrés sont illustrés dans le diagramme ci-contre.
En tout, il y a $18 + 4 = 22$ carrés de taille 2×2.



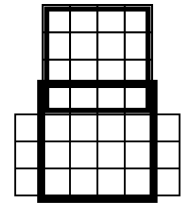
<u>Cas 3 : carrés de taille 3×3</u>
En commençant par un carré 3×3 dans le coin supérieur gauche du diagramme et en comptant de façon similaire, il y a 2 tels carrés 3×3 dans les trois premières rangées du diagramme.
Il y a 2 tels carrés 3×3 dans les rangées deux à quatre, trois à cinq, quatre à six, et enfin cinq à sept. Ainsi, il y a $2 \times 5 = 10$ tels carrés 3×3.
Le premier et le dernier de ces 10 carrés sont illustrés dans le diagramme ci-contre.



Il y a 2 carrés 3×3 supplémentaires. L'un d'eux occupe les trois cases les plus à gauche dans les rangées cinq à sept. Le second occupe les trois cases les plus à droite dans les rangées cinq à sept.
Ces 2 carrés sont illustrés dans le diagramme ci-contre.
En tout, il y a $10 + 2 = 12$ carrés de taille 3×3.



<u>Cas 4 : carrés de taille 4×4</u>
Il y a un carré 4×4 qui occupe les quatre colonnes dans les rangées un à quatre. Ce carré peut être déplacé d'une rangée vers le bas pour occuper les rangées deux à cinq, puis encore d'une rangée pour occuper les rangées trois à six, et enfin une dernière fois pour occuper les rangées quatre à sept. Ce sont les seuls carrés 4×4, donc il y en a 4 en tout. Le premier et le dernier de ces 4 carrés sont illustrés dans le diagramme ci-contre.



Il n'y a pas de carrés de dimensions supérieures à 4×4, donc il y a $34 + 22 + 12 + 4 = 72$ carrés de toutes tailles dans le diagramme.

Réponse : (C)

20. *Solution 1*

On commence par nommer les 2 pièces de 25 cents Q1 et Q2, les 2 pièces de 10 cents D1 et D2, et les 2 pièces de 5 cents N1 et N2. Il y a 6 choix possibles pour la première pièce, suivis de 5 choix pour la deuxième pièce. Cependant, cela compte en double le nombre de possibilités, puisque choisir par exemple Q1 en premier et D2 en deuxième est la même chose que choisir D2 en premier et Q1 en deuxième. Il y a donc un total de $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ façons de choisir les 2 pièces.

On compte ensuite le nombre de façons d'obtenir une valeur combinée d'au moins 0,30 \$.

Ce sont : Q1 et Q2 (0,50 \$), Q1 et D1 (0,35 \$), Q1 et D2 (0,35 \$), Q1 et N1 (0,30 \$), Q1 et N2 (0,30 \$), Q2 et D1 (0,35 \$), Q2 et D2 (0,35 \$), Q2 et N1 (0,30 \$), et enfin Q2 et N2 (0,30 \$). Cela donne un total de 9 façons différentes.

La probabilité que la valeur combinée des deux pièces soit de 0,30 \$ ou plus est $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

Solution 2

La probabilité que la valeur combinée des deux pièces soit d'au moins 0,30 \$ est égale à la somme des probabilités que les valeurs combinées soient de 0,30 \$, 0,35 \$ et 0,50 \$.

La probabilité que les deux pièces aient une valeur combinée de 0,30 \$ est égale à la probabilité de choisir une pièce de 25 cents suivie d'une pièce de 5 cents, ou une pièce de 5 cents suivie d'une pièce de 25 cents. La probabilité que la première pièce choisie soit une pièce de 25 cents est $\frac{2}{6}$, et avec 5 pièces restantes, la probabilité que la deuxième pièce choisie soit une pièce de 5 cents est $\frac{2}{5}$. Ainsi, la probabilité de choisir une pièce de 25 cents suivie d'une pièce de 5 cents est $\frac{2}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{30}$. La probabilité de choisir une pièce de 5 cents en premier

suivie d'une pièce de 25 cents en second est aussi égale à $\frac{4}{30}$, donc la probabilité que la valeur combinée des deux pièces soit de 0,30 \$ est $\frac{4}{30} + \frac{4}{30} = \frac{8}{30}$.

La probabilité que les deux pièces aient une valeur combinée de 0,35 \$ est égale à la probabilité de choisir une pièce de 25 cents suivie d'une pièce de 10 cents, ou une pièce de 10 cents suivie d'une pièce de 25 cents. Comme dans le cas précédent, la probabilité que la valeur combinée des deux pièces soit de 0,35 \$ est aussi $\frac{4}{30} + \frac{4}{30} = \frac{8}{30}$.

La probabilité que les deux pièces aient une valeur combinée de 0,50 \$ est égale à la probabilité de choisir une pièce de 25 cents suivie d'une autre pièce de 25 cents. Cette probabilité est $\frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{30}$.

Ainsi, la probabilité que la valeur combinée des deux pièces soit d'au moins 0,30 \$ est égale à $\frac{8}{30} + \frac{8}{30} + \frac{2}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.

Réponse : (B)

21. Le troisième chiffre doit être au moins 3, puisque la plus petite somme possible de deux chiffres parmi 1 à 9 est $1 + 2 = 3$.

Si le troisième chiffre est 3, la combinaison doit être 1 2 3 dans cet ordre.

Si le troisième chiffre est 4, les deux autres chiffres doivent être 1 et 3, car ce sont les deux seuls chiffres distincts dont la somme est 4. Ainsi, la seule combinaison possible avec le troisième chiffre égal à 4 est 1 3 4. On note que 2 2 4 n'est pas permis puisque les chiffres doivent être distincts.

Si le troisième chiffre est 5, les deux premiers doivent être 1 et 4 ou 2 et 3. En continuant ainsi, on peut lister toutes les combinaisons possibles :

1 2 3			
1 3 4			
1 4 5	2 3 5		
1 5 6	2 4 6		
1 6 7	2 5 7	3 4 7	
1 7 8	2 6 8	3 5 8	
1 8 9	2 7 9	3 6 9	4 5 9

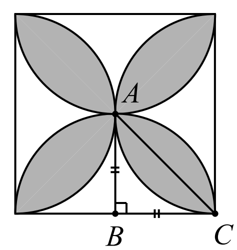
Il y a 16 combinaisons possibles.

Réponse : 16

22. La moyenne des cinq entiers est $\dfrac{16+x+8+17+11}{5} = \dfrac{52+x}{5}$.
La médiane doit être inférieure à deux autres entiers de la liste, donc 17 ne peut pas être la médiane puisqu'il y a au moins trois entiers dans la liste inférieurs à 17. De façon similaire, 8 ne peut pas être la médiane puisqu'il y a au moins trois entiers dans la liste supérieurs à 8.
Les valeurs possibles pour la médiane sont x, 11 et 16.
Puisque la médiane et la moyenne sont égales, on doit avoir $x = \dfrac{52+x}{5}$, ce qui implique $x = 13$, ou $11 = \dfrac{52+x}{5}$, ce qui implique $x = 3$, ou $16 = \dfrac{52+x}{5}$, ce qui implique $x = 28$.
Par conséquent, les possibilités sont $x = 3$, $x = 13$ et $x = 28$. Leur somme est $3 + 13 + 28 = 44$.

Réponse : 44

23. On désigne par A le centre du carré, par B le milieu de la base et par C le coin inférieur droit du carré. Le triangle ABC a un angle droit en B et $AB = CB$, comme illustré.
La fleur est composée de quatre "pétales", chacun formé de deux copies de la région obtenue en prenant un secteur du cercle d'angle 90° et en retirant le triangle rectangle isocèle formé par les deux rayons.



Le rayon de chaque cercle est $\dfrac{10}{2} = 5$, donc l'aire de chaque secteur est $\dfrac{\pi(5)^2}{4} = \dfrac{25\pi}{4}$. L'aire du triangle retiré est $\dfrac{1}{2}(5)^2 = \dfrac{25}{2}$.
Par conséquent, l'aire de chaque pétale est $2 \times \left(\dfrac{25\pi}{4} - \dfrac{25}{2}\right) = \dfrac{25\pi - 50}{2}$.
L'aire de la fleur est 4 fois l'aire de chaque pétale, soit

$$\begin{aligned} 4 \times \left(\frac{25\pi - 50}{2}\right) &= 2 \times (25\pi - 50) \\ &= 50\pi - 100 \\ &\approx 57{,}08 \end{aligned}$$

L'entier le plus proche de l'aire de la fleur est 57.

Réponse : 57

24. Supposons que le nombre de suites *complètes* de 1234 est c. On peut calculer le nombre de chiffres jusqu'au 4 le plus à droite dans la suite et en l'incluant. Il est de $4c$ (c occurrences de chacun des chiffres 1, 2, 3 et 4) plus le nombre de 5, soit

$$4c + \Big(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (c-2) + (c-1)\Big)$$

On note que les c chiffres 5 qui suivent le dernier 1234 ne sont pas inclus dans ce compte. Cette somme est égale à

$$4c + \frac{(c-1)c}{2} = \frac{8c + c^2 - c}{2} = \frac{c^2 + 7c}{2}$$

donc il y a $\frac{c^2 + 7c}{2}$ chiffres jusqu'au 4 le plus à droite et en l'incluant.

Le nombre total de chiffres est 2026, donc c doit être le plus grand entier satisfaisant $\frac{c^2 + 7c}{2} \leq 2026$, ce qui est équivalent à $c^2 + 7c \leq 4052$.

On remarque que $60^2 + 7(60) = 4020$ mais $61^2 + 7(61) = 4148$, donc $c = 60$.

Ainsi, le nombre de chiffres jusqu'au 4 le plus à droite et en l'incluant est $\frac{60^2 + 7(60)}{2} = \frac{4020}{2} = 2010$. Il y aurait 60 chiffres 5 après le 60e chiffre 4, ce qui est plus que les $2026 - 2010 = 16$ chiffres nécessaires pour atteindre 2026 chiffres au total. Cela signifie qu'il n'y a pas de suites "partielles" de 1234.

Par conséquent, parmi les 2026 premiers chiffres, il y a 60 occurrences de chacun des chiffres 1, 2, 3 et 4, pour un total de $4 \times 60 = 240$ chiffres, et le reste doit être des 5. Ainsi, $2026 - 240 = 1786$ des chiffres sont des 5.

La somme des 2026 premiers chiffres est

$$S = 1 \times 60 + 2 \times 60 + 3 \times 60 + 4 \times 60 + 5 \times 1786 = 9530$$

La somme des chiffres de S est $9 + 5 + 3 + 0 = 17$.

Réponse : 17

25. L'aire d'un triangle équilatéral de côté x est $\frac{1}{2}x^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$. Pour le voir, on peut utiliser le théorème de Pythagore pour montrer que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté x est $\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Si des triangles équilatéraux de côtés a, b et c sont retirés des coins, alors l'aire de l'hexagone résultant est

$$\frac{\sqrt{3} \cdot 6^2}{4} - \frac{\sqrt{3}a^2}{4} - \frac{\sqrt{3}b^2}{4} - \frac{\sqrt{3}c^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(36 - a^2 - b^2 - c^2)$$

Il est donné que $0 < a \leq b \leq c$ et que chacune des expressions $a + b$, $a + c$ et $b + c$ est inférieure à 6. Le tableau ci-dessous contient tous les triplets (a,b,c) de ce type dans la colonne de gauche et la somme $a^2 + b^2 + c^2$ dans la deuxième colonne. La troisième colonne contient l'entier $T = 36 - a^2 - b^2 - c^2$. On note que l'aire de l'hexagone correspondant est $\frac{\sqrt{3}}{4}T$.

(a,b,c)	$a^2 + b^2 + c^2$	T
(1,1,1)	3	33
(1,1,2)	6	30
(1,1,3)	11	25
(1,1,4)	18	18
(1,2,2)	9	27
(1,2,3)	14	22
(2,2,2)	12	24
(2,2,3)	17	19

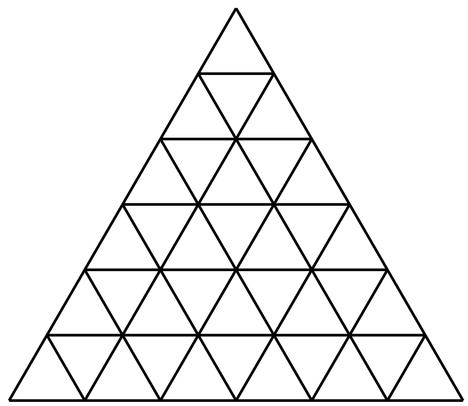
Supposons qu'un tel hexagone peut être recouvert par des triangles équilatéraux de côté k. Alors l'aire de l'hexagone doit être un multiple entier de $\dfrac{\sqrt{3}}{4}k^2$. Ainsi, la quantité

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}T}{\frac{\sqrt{3}}{4}k^2} = \frac{T}{k^2}$$

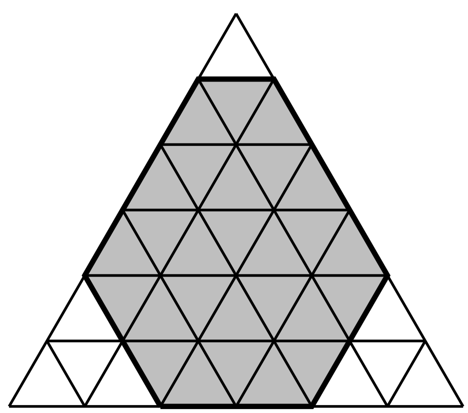
doit être un entier. On note que cet entier est le nombre de triangles utilisés pour recouvrir l'hexagone, donc $n = \dfrac{T}{k^2}$. Ainsi, pour trouver les valeurs possibles de n, on doit examiner les diviseurs qui sont des carrés parfaits de T pour chaque valeur de T.

On note d'abord que $1 = 1^2$ est un diviseur de chaque valeur de T.

Supposons que l'hexagone est recouvert par des triangles équilatéraux de côté 1 (qu'on appellera *triangle unité*) comme illustré ci-dessous.



Si des triangles équilatéraux de côté entier sont retirés de chaque coin, l'hexagone résultant sera déjà pavé par des triangles unités. Par exemple, si des triangles de côtés 2, 2 et 1 sont retirés des coins, on obtient ce qui suit :



Par conséquent, il est possible de recouvrir chaque hexagone possible par des triangles unités, ce qui signifie qu'on obtient des valeurs de n de la forme $\dfrac{T}{1^2} = T$ pour chaque T. Autrement dit, chaque valeur de T est une valeur possible de n.

Le prochain carré parfait est $2^2 = 4$, et la seule valeur de T qui est un multiple de 4 est 24.

$T = 24$ correspond à $a = b = c = 2$. L'hexagone résultant est un hexagone régulier, qui peut en effet être recouvert par des triangles équilatéraux de côté 2.

Par conséquent, $n = \dfrac{24}{2^2} = 6$ est une valeur possible de n.

(On note que l'hexagone régulier de côté x peut toujours être recouvert par 6 triangles équilatéraux de côté x. On peut le voir en reliant le centre de l'hexagone à chacun de ses 6 sommets.)

Le carré parfait suivant est $3^2 = 9$, qui est un diviseur de $T = 18$ et $T = 27$. Ces valeurs de T proviennent de $(a,b,c) = (1,1,4)$ et $(a,b,c) = (1,2,2)$ respectivement. On remarque que le plus petit côté de l'hexagone avec $T = 18$ est $6-4-1 = 1$ et le plus petit côté de l'autre hexagone est $6 - 2 - 2 = 2$. On va maintenant montrer qu'aucun des deux hexagones ne peut être recouvert par des triangles équilatéraux de côté 3.

Pour qu'un hexagone soit recouvert exactement par des triangles, chaque côté de l'hexagone doit coïncider exactement avec le côté d'au moins un triangle. (Autrement dit, il doit y avoir des triangles dont les côtés sont directement le long des côtés de l'hexagone.) Aucun des triangles n'est autorisé à dépasser en dehors de l'hexagone, donc le côté d'un triangle ne peut pas dépasser le côté de l'hexagone le long duquel il est placé. Par conséquent, si un hexagone est recouvert exactement par des triangles de côté x, alors chaque côté de l'hexagone doit avoir une longueur d'au moins x.

De cela on voit que les hexagones avec les valeurs de T égales à 18 et 27 ont chacun un côté de longueur inférieure à 3 comme observé plus haut, donc aucun d'eux ne peut être recouvert par des triangles équilatéraux de côté 3.

Le carré parfait $4^2 = 16$ n'est diviseur d'aucune valeur de T. Le seul autre carré parfait qui divise une valeur de T est $T = 25$, qui a 25 comme diviseur. Bien sûr, cela signifierait que l'hexagone avec $T = 25$ est recouvert par exactement un triangle équilatéral de côté 5, mais ce n'est pas possible car l'hexagone n'est pas un triangle.

On conclut que les valeurs de n sont les valeurs de T ainsi que 6. Leur somme est

$$33 + 30 + 25 + 18 + 27 + 22 + 24 + 19 + 6 = 204$$

Réponse : 04