Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatia 2026

le mercredi 1 avril 2026
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 2 avril 2026
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Puisque A, B et C sont colinéaires, les droites AB, AC et BC ont la même pente.
La pente de la droite AB est $\dfrac{5-2}{2-1}=3$. La pente de la droite AC est $\dfrac{c-2}{3-1}=\dfrac{c-2}{2}$.
Ainsi, $3=\dfrac{c-2}{2}$. En résolvant cette équation, on obtient $c=8$.

(b) Puisque la droite DF a une pente $\dfrac{7-0}{0-14}=-\dfrac{1}{2}$ et une ordonnée à l'origine égale à 7, l'équation de la droite passant par D et F est $y=-\dfrac{1}{2}x+7$.
Les coordonnées (x,y) du point E sont des entiers strictement positifs, et E doit se trouver sur la droite d'équation $y=-\dfrac{1}{2}x+7$. Lorsque $x\geq 14$, on a $y\leq 0$, et lorsque $x<14$, on a $y>0$. Ainsi, x et y sont tous deux strictement positifs si et seulement si $0<x<14$. De plus, y est un entier si et seulement si x est pair.
Donc, le nombre de points E possibles est le nombre d'entiers x tels que $0<x<14$ et que x est pair. Il y a 6 tels entiers, ce qui donne les 6 possibilités suivantes pour E : $(2,6)$, $(4,5)$, $(6,4)$, $(8,3)$, $(10,2)$ et $(12,1)$.

(c) La pente de la droite PQ est $\dfrac{n-4-12}{6-15}=\dfrac{n-16}{-9}$.
La pente de la droite PR est $\dfrac{n-12}{18-15}=\dfrac{n-12}{3}$.
Ainsi, le points P, Q et R sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{n-16}{-9}=\dfrac{n-12}{3}$. Cela est équivalent à $3n-48=-9n+108$, soit $12n=156$.
Ainsi, la valeur de n qui rend P, Q et R colinéaires est $n=\dfrac{156}{12}=13$.

2. (a) Puisque $0<A<B<C<10$, la plus grande valeur possible de A est 7, et lorsque $A=7$, on doit avoir $B=8$ et $C=9$.
Ainsi, le plus grand nombre sommet est 78 987.
De même, le plus petit nombre sommet est 12 321.
Donc, la différence positive est $78\,987-12\,321=66\,666$.

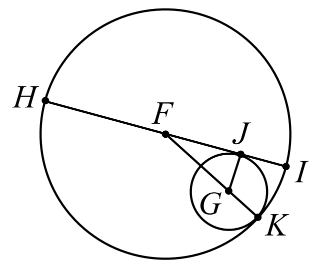
(b) Puisque $36\,245<ABCBA<45\,932$, on a $A=4$ ou $A=3$.
Lorsque $A=4$, la première inégalité est vraie pour toutes les valeurs possibles de B et C, donc on doit seulement considérer $4BCB4<45\,932$. On doit alors avoir $B=5$, et C peut prendre les valeurs 6, 7 ou 8. Ainsi, il y a 3 nombres sommets lorsque $A=4$. (Ce sont 45 654, 45 754, 45 854.)
Lorsque $A=3$, la deuxième inégalité est vraie pour toutes les valeurs possibles de B et C, donc on doit seulement considérer $36\,245<3BCB3$. Ensuite, B peut être 6, auquel cas $7\leq C\leq 9$, ou $B=7$, auquel cas $8\leq C\leq 9$, ou encore $B=8$, auquel cas $C=9$. Au total, il y a 6 nombres sommets lorsque $A=3$. (Ce sont 36 763, 36 863, 36 963, 37 873, 37 973, 38 983.)
En combinant les deux cas, il y a au total $3+6=9$ nombres sommets satisfaisant les inégalités demandées.

(c) Un nombre est un multiple de 15 si et seulement s'il est multiple de 5 et 3. Un nombre est un multiple de 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5. Puisque $0<A<10$ et que $ABCBA$ est un multiple de 15, on doit avoir $A=5$.
De plus, $5BCB5$ est un multiple de 15 si et seulement s'il est multiple de 3.
Un entier strictement positif est un multiple de 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3. Ainsi, $5BCB5$ est un multiple de 3 si et seulement si $10+2B+C$ est un multiple de 3.

Puisque $A = 5$ et $A < B < C$, les valeurs possibles de B sont 6, 7 et 8.
Lorsque $B = 6$, la somme $10 + 12 + C$ est multiple de 3 si et seulement si $C = 8$, parmi les valeurs possibles 7, 8 et 9.
Lorsque $B = 7$, la somme $10 + 14 + C$ est un multiple de 3 si et seulement si $C = 9$.
Enfin, lorsque $B = 8$, la seule valeur possible de C est 9, et $10+16+9$ n'est pas un multiple de 3.
Donc, les nombres sommets qui sont multiples de 15 sont 56 865 et 57 975.

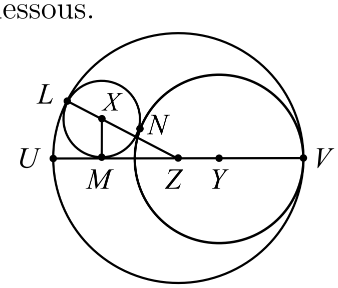
3. (a) Puisque DC est le diamètre du cercle de rayon 36, on a $DC = 36(2) = 72$. De même, $CE = 10(2) = 20$.
D'après le 1er fait, on a $DE = CD - CE = 72 - 20 = 52$.

(b) On prolonge le segment FG jusqu'au point K, en remarquant que ces trois points sont alignés selon le premier fait. On trace également le segment JG. Ces constructions sont illustrées dans le diagramme ci-dessous.

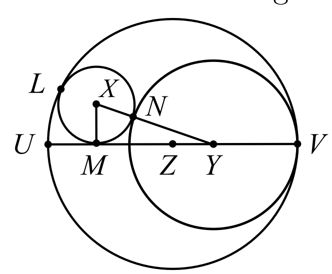


On a $FG = FK - GK = 49 - 12 = 37$. Selon le deuxième fait, on a que $\angle GJF = 90°$. D'après le théorème de Pythagore, $FG^2 = JG^2 + FJ^2$. Ainsi, $37^2 = 12^2 + FJ^2$. Donc $FJ^2 = 1225$, et par conséquent $FJ = 35$ (puisque $FJ > 0$).

(c) On continuera à utiliser les faits 1 et 2, mais sans les citer à chaque fois. D'abord, on trace le segment ZL (en remarquant qu'il passe par X), puis on trace le segment XM. Ces constructions sont illustrées ci-dessous.



On a $XZ = LZ - LX = 18 - 5 = 13$. Puisque $XM = 5$, d'après le théorème de Pythagore, on obtient $MZ = 12$. Avec ce résultat, on efface le segment ZL du diagramme ci-dessus et on trace le segment XY, ce qui nous donne le diagramme ci-dessous.



On remarque que $18 = ZV = ZY + YV = ZY + r$ et donc, $ZY = 18 - r$. Ainsi, on a $MY = MZ + ZY = 12 + (18 - r) = 30 - r$.
De même, on remarque que $XY = XN + NY = 5 + r$. On applique ensuite le théorème

de Pythagore dans le triangle XMY. On obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
XM^2 + MY^2 &= XY^2 \\
5^2 + (30 - r)^2 &= (5 + r)^2 \\
25 + 900 - 60r + r^2 &= 25 + 10r + r^2 \\
70r &= 900 \\
r &= \frac{90}{7}
\end{aligned}$$

ce qui donne la réponse finale.

4. (a) À partir de $(*)$, on a $y^2 - z^2 = (m+2)^2 - (m+1)^2$ et $x^2 - y^2 = (m+1)^2 - m^2$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
k &= (y^2 - z^2) - (x^2 - y^2) \\
&= ((m + 2)^2 - (m + 1)^2) - ((m + 1)^2 - m^2) \\
&= (m^2 + 4m + 4 - m^2 - 2m - 1) - (m^2 + 2m + 1 - m^2) \\
&= (2m + 3) - (2m + 1) \\
&= 2
\end{aligned}$$

On a démontré que $y^2 - z^2 = 2m + 3$ et $x^2 - y^2 = 2m + 1$. Comme m est un entier strictement positif, il s'ensuit que $z < y < x$, ce que nous utiliserons dans la partie (b).

(b) On commence par une identité utile : la somme des n premiers nombres impairs positifs est n^2. Autrement dit, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Remarque : *les participants n'avaient pas à démontrer cette identité ; on en donne toutefois une justification à la fin.*

On sait que $y^2 - z^2$ est la somme de p nombres impairs consécutifs, le plus grand étant $2y - 1$. En conséquence,

$$\begin{aligned}
y^2 - z^2 &= \overbrace{(2y - 1) + (2y - 3) + (2y - 5) + \cdots + (2y - (2p - 1))}^{\text{p termes}} \\
&= 2yp - (1 + 3 + 5 + \cdots + (2p - 1)) \\
&= 2yp - p^2
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'identité précédente à la dernière étape. Ainsi, $z^2 = y^2 - 2yp + p^2 = (y - p)^2$, donc $z = y - p$ or $-z = y - p$. On cherche à démontrer que $y - z = p$, c'est-à-dire que $z = y - p$. Pour ce faire, on remarque que $y^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2y - 1)$ exprime y^2 comme une somme de y entiers impairs, et que $z^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2z - 1)$ exprime z^2 comme une somme de z entiers impairs. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
y^2 - z^2 &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2y - 1) - (1 + 3 + 5 + \cdots + (2z - 1)) \\
&= \text{somme de } y - z \text{ entiers impairs consécutifs, dont le plus grand est } 2y - 1 \\
&\quad\ (\text{puisque } y > z, \text{ comme montré à la partie (a)})
\end{aligned}$$

De même, $y^2 - z^2$ est aussi une somme de p nombres impairs consécutifs, le plus grand étant $2y - 1$, donc $y - z = p$. Par des calculs similaires, on obtient $x^2 - y^2 = 2xq - q^2$ et $x - y = q$, d'où $x = y + q$. On termine maintenant la solution de cette question par une suite d'équations équivalentes.

$$\begin{aligned} y^2 - z^2 &= x^2 - y^2 + 2 \qquad \text{d'après la partie (a)} \\ 2yp - p^2 &= 2xq - q^2 + 2 \\ 2yp - p^2 &= 2(y+q)q - q^2 + 2 \\ 2yp - p^2 &= 2yq + 2q^2 - q^2 + 2 \\ 2y(p-q) &= p^2 + q^2 + 2 \\ y &= \frac{p^2+q^2+2}{2(p-q)} \end{aligned}$$

Pour la dernière étape, on remarque que $p - q \neq 0$, car si $p = q$, l'avant-dernière équation donnerait $0 = p^2 + p^2 + 2$. Cela revient à $p^2 = -1$, ce qui est impossible pour un entier p. On a ainsi obtenu une expression de y en fonction de p et q.

(c) On vient d'établir que $y = \dfrac{p^2+q^2+2}{2(p-q)}$. On commence par trouver des valeurs de p et q pour lesquelles y est un entier strictement positif. Si $p - q$ est impair, alors l'un des deux nombres p et q est pair et l'autre est impair, donc $p^2 + q^2 + 2$ est impair. Puisque le dénominateur $2(p - q)$ est pair, il s'ensuit que y n'est pas un entier lorsque $p - q$ est impair. Par conséquent, $p - q$ est pair.
Prenons $p - q = 2$. Alors $p = q + 2$ et

$$y = \frac{p^2+q^2+2}{2(p-q)} = \frac{(q+2)^2+q^2+2}{2((q+2)-q)} = \frac{q^2+4q+4+q^2+2}{4} = \frac{q^2+2q+3}{2}$$

Si q est pair, alors le numérateur est impair, donc y n'est pas un entier. On considère donc des valeurs impaires de q. D'après (b), on sait que $z = y - p = y - (q + 2)$ et $x = y + q$. De plus, on a $m^2 + x^2 = (m + 1)^2 + y^2$. En résolvant pour m (les termes en m^2 se simplifient), on obtient $m = \frac{1}{2}(x^2 - y^2 - 1)$. Pour certaines valeurs impaires de q, on détermine, dans le tableau ci-dessous, x, y, z et m :

q	x	y	z	m
1	4	3	0	3
3	12	9	4	31
5	24	19	12	107

Lorsque $q = 1$, on a $3^2 + 4^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2 + 0^2$, mais on rejette $S = 25$ puisque l'on exige $z > 0$.
Lorsque $q = 3$, on a $31^2 + 12^2 = 32^2 + 9^2 = 33^2 + 4^2 = 1105$.
Lorsque $q = 5$, on a $107^2 + 24^2 = 108^2 + 19^2 = 109^2 + 12^2 = 12\,025$.
Ainsi, 1105 et 12 025 sont deux nombres Sorensen.

Remarque : Il s'avère que 1105 et 12 025 sont les deux plus petits nombres Sorensen, et que tout entier impair $q \geq 3$ détermine un nombre Sorensen.

Dans la partie (b), nous avons énoncé et utilisé une identité utile que nous allons maintenant reformuler et démontrer pour des raisons de complétude.

Identité utile : la somme des n premiers nombres impairs positifs est n^2.
En utilisant l'identité suivante

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + n &= (1+1) + (3+1) + (5+1) + \cdots + (2n-1+1) \\
&= 2 + 4 + 6 + \cdots 2n \\
&= 2[1 + 2 + 3 + \cdots + n] \\
&= 2\frac{n(n+1)}{2} \\
&= n^2 + n
\end{aligned}$$

En soustrayant n des deux côtés, on obtient l'identité recherchée, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.