



Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2026

(7^e et 8^e années – Secondaire I et II)

du 11 au 22 mai 2026

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

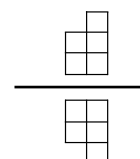
du 11 au 22 mai 2026

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

7^e année

1. Dans le diagramme, il y a 3 colonnes contenant des triangles et chacune contient 2 triangles. Il y a donc $3 \times 2 = 6$ triangles.
RÉPONSE : (C)
2. Quand on soustrait 3 de 8, le résultat est 5. L'entier qui doit remplacer le carré est 8.
RÉPONSE : (B)
3. Sur une droite numérique, le nombre -10 est 10 unités à gauche de 0. Le nombre 9 est à 9 unités à droite de 0. Chacun des trois autres choix est plus proche de 0 que -10 ou 9. Parmi les choix donnés, -10 est le plus éloigné de 0 sur une droite numérique.
RÉPONSE : (A)
4. Le diagramme à barres montre que Daia a donné 12 \$, que Joe a donné 6 \$, que Bel a donné 10 \$, que Susie a donné 8 \$ et que Zara a donné 2 \$.
Le montant total d'argent donné est $12 \$ + 6 \$ + 10 \$ + 8 \$ + 2 \$ = 38 \$$.
RÉPONSE : (D)
5. En partant du chiffre le plus à droite et en allant vers la gauche, 5 est à la position des unités, 3 est à la position des dizaines, 6 est à la position des centaines, 2 est à la position des unités de mille et 1 est à la position des dizaines de mille. Ainsi, le chiffre à la position des unités de mille est 2.
RÉPONSE : (B)
6. Puisque $\angle PQR$ est un angle plat, sa mesure est 180° . Ainsi, les angles de mesures 40° et x° ont une somme de 180° , soit $40 + x = 180$ et donc $x = 180 - 40 = 140$.
RÉPONSE : (B)
7. Supposons que chaque côté du carré a une longueur de n cm, n étant un nombre entier. Alors le périmètre du carré est $4 \times n$ cm. Cela signifie que le périmètre du carré en centimètres est un multiple de 4. Parmi les choix donnés, seul 32 cm est un multiple de 4.
(On note que dans ce cas, le carré a un côté de longueur $n = 8$ cm.)
RÉPONSE : (E)
8. Le deuxième jour, Mauricio marche $11 + 3 = 14$ minutes. Le troisième jour, il marche 17 minutes. Le quatrième jour, il marche 20 minutes. Le cinquième jour, il marche 23 minutes. Au total, Mauricio marche $11 + 14 + 17 + 20 + 23 = 85$ minutes sur les cinq jours.
RÉPONSE : (A)
9. Après avoir subit la réflexion, la forme obtenue est une image miroir de la forme originale par rapport à la droite horizontale. L'image obtenue a la même taille et la même forme que la figure originale. Le diagramme à droite montre la forme originale, la droite horizontale et l'image réfléchie en dessous. La bonne réponse est la figure montrée en (D).
RÉPONSE : (D)
10. La suite contient les entiers de 1 à 43 inclusivement, mais les entiers pairs ont été retirés. Le premier entier pair retiré est $2 = 2 \times 1$. Le dernier entier pair retiré est $42 = 2 \times 21$. Donc les 21 entiers pairs entre 1 et 43 ont été retirés. Ainsi, le nombre de termes dans la suite est $43 - 21 = 22$.
RÉPONSE : (D)



11. La moyenne des 4 sauts de Lana est $\frac{1,60 \text{ m} + 1,65 \text{ m} + 1,85 \text{ m} + 1,90 \text{ m}}{4} = \frac{7 \text{ m}}{4} = 1,75 \text{ m}$.
(Au lieu du calcul ci-dessus, on aurait pu remarquer que 1,75 est “au milieu” de 1,65 et 1,85 (et donc est la moyenne de ces deux nombres), et 1,75 est aussi au milieu de 1,60 et 1,90, et donc est la moyenne des quatre nombres.)
RÉPONSE : (E)
12. On cherche deux entiers strictement positifs dont la différence est 3 et dont la somme est 27. En essayant quelques valeurs, on détermine que $15 - 12 = 3$ et $15 + 12 = 27$, et donc Elsa a 12 ans.
RÉPONSE : (C)
13. L’aire du triangle PQR est $\frac{1}{2} \times 8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^2$.
L’aire du triangle PST est $\frac{1}{2} \times 4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$.
L’aire de la région ombrée est égale à l’aire du triangle PQR moins l’aire du triangle PST , soit $24 \text{ cm}^2 - 6 \text{ cm}^2 = 18 \text{ cm}^2$.
RÉPONSE : (A)
14. Il y a exactement 9 tels entiers. Ce sont : 2026, 2062, 2206, 2260, 2602, 2620, 6022, 6202, 6220.
RÉPONSE : (E)
15. Le développement montré en (C) n’est *pas* le développement d’un dé standard à six faces.
Sur un dé standard à six faces, les faces ayant les nombres 3 et 4 doivent être opposées l’une à l’autre. Dans le développement montré en (C), les nombres 3 et 4 sont adjacents l’un à l’autre, et donc quand ce développement est plié pour former un dé, la face contenant le 3 sera adjacente à la face contenant le 4, et elles ne seront donc pas opposées l’une à l’autre.
RÉPONSE : (C)
16. Quand on lance deux dés standards à six faces, la somme minimale pouvant être obtenue est $1 + 1 = 2$, et donc Riah doit avancer d’au moins 2 cases à chaque lancer.
Cela signifie que Riah ne peut pas atterrir sur la case numérotée 1, qu’elle peut atterrir sur au plus une des cases numérotées 11 et 12, et qu’elle peut atterrir sur au plus une des cases numérotées 16 et 17.
Pour obtenir le nombre maximal de points, l’objectif est d’atterrir sur le plus de cases ombrées possible, en comprenant qu’un choix doit être fait entre les cases 11 et 12, et aussi entre les cases 16 et 17.
Pour commencer la partie, Riah ne peut pas obtenir un 1, mais elle peut obtenir un 3, ajoutant ainsi 6 points à son score. Elle peut ensuite obtenir un 3 à nouveau, ajoutant 4 points à son score, suivi d’un lancer de 2 pour ajouter 5 points de plus à son score. Riah est maintenant sur la case numérotée 8, elle a $6 + 4 + 5 = 15$ points, et elle a accumulé le nombre maximal de points possible jusqu’à ce point de la partie.
À partir de la case numérotée 8, Riah peut rouler un 3 et obtenir 7 points, ou elle peut rouler un 4 et obtenir 8 points. Puisqu’atterrir sur la case 11 ou 12 n’affecte pas sa capacité à atterrir sur la case 16 ou 17, Riah maximise ses points en roulant un 4 et en obtenant 8 points. Elle est maintenant sur la case numérotée 12 et a $15 + 8 = 23$ points.
À partir de la case numérotée 12, Riah peut rouler un 4 et obtenir 10 points, ou elle peut rouler un 5 et doubler ses points. Puisqu’ajouter 10 points donne à Riah $23 + 10 = 33$ et que doubler ses points lui donne $23 \times 2 = 46$, alors obtenir un 5 et atterrir sur la case numérotée 17 maximise les points de Riah. Il n’y a plus de points à obtenir avant de terminer la partie.
Ainsi, le plus grand nombre de points avec lequel Riah peut terminer la partie est 46.
RÉPONSE : (B)

17. Asha pourrait faire 1 coupe, coupant le ruban en 2 morceaux, chacun de longueur $\frac{36 \text{ m}}{2} = 18 \text{ m}$.
 Elle pourrait faire 2 coupes, coupant le ruban en 3 morceaux, chacun de longueur $\frac{36 \text{ m}}{3} = 12 \text{ m}$.
 Puisque la longueur de chacun des morceaux égaux doit être un nombre entier de mètres, le nombre de morceaux doit être un diviseur positif de 36.
 Les diviseurs positifs de 36 qui sont supérieurs à 1 (puisque'il doit y avoir au moins une coupe et donc au moins 2 morceaux) sont 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36, et il y a donc 8 possibilités pour la longueur des plus petits rubans.
 Les longueurs possibles des plus petits morceaux sont 18 m, 12 m, $\frac{36 \text{ m}}{4} = 9 \text{ m}$, $\frac{36 \text{ m}}{6} = 6 \text{ m}$, $\frac{36 \text{ m}}{9} = 4 \text{ m}$, $\frac{36 \text{ m}}{12} = 3 \text{ m}$, $\frac{36 \text{ m}}{18} = 2 \text{ m}$ et $\frac{36 \text{ m}}{36} = 1 \text{ m}$.
 RÉPONSE : (E)

18. On commence par déterminer les valeurs des chiffres B et C quand $A < 9$. À la fin de la solution, on montrera que les valeurs de B et C restent les mêmes quand $A = 9$.
 Supposons que lorsque $A < 9$, la valeur de $0,ABC$ arrondie au dixième près est $0,T00$.
 Puisque $0,T00$ est $0,024$ de plus que $0,ABC$, alors $0,ABC + 0,024 = 0,T00$.
 Le chiffre des millièmes de $0,T00$ est 0, et donc la somme des chiffres des millièmes, C et 4, se termine par 0. Puisque C est au plus 9, alors $C + 4 = 10$, et donc $C = 6$.
 Dans ce cas, la retenue de la colonne des millièmes à la colonne des centièmes est 1.
 Le chiffre des centièmes de $0,T00$ est 0, et donc la somme des chiffres des centièmes, B et 2, ajoutée à la retenue de 1, se termine par 0. Puisque B est au plus 9, alors $B + 2 + 1 = 10$, et donc $B = 7$.
 Dans ce cas, la retenue de la colonne des centièmes à la colonne des dixièmes est 1, et donc $T = A + 1$.
 Pour tout choix du chiffre non négatif A tel que $A < 9$, $0,A76 + 0,024 = 0,T00$ avec $T = A + 1$.
 Par exemple, $0,876 + 0,024 = 0,900$ et $0,076 + 0,024 = 0,100$.
 Finalement, on montre que quand $A = 9$, les valeurs de B et C restent les mêmes.
 La valeur de $0,9BC$ arrondie au dixième près est supérieure à $0,9BC$, et est donc égale à 1.
 Dans ce cas, $0,9BC + 0,024 = 1$ ou $0,9BC = 1 - 0,024 = 0,976$, et donc $B = 7$ et $C = 6$.
 Par conséquent, pour toutes les valeurs possibles du chiffre non négatif A , on obtient $B + C = 7 + 6 = 13$.
 RÉPONSE : (C)

19. Entre 100 et 199 inclusivement, les nombres divisibles par 4 sont :

$$4 \times 25 = 100, 4 \times 26 = 104, 4 \times 27 = 108, 4 \times 28 = 112, \dots, 4 \times 49 = 196$$

Ainsi, il y a $49 - 25 + 1 = 25$ tels nombres.

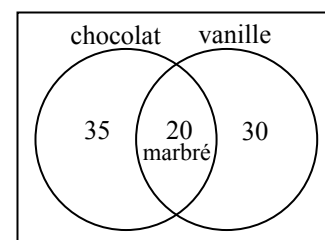
Parmi eux, 100, 112 et 120 sont les seuls nombres dont la somme des chiffres est inférieure à 5.
 Par conséquent, entre 100 et 199 inclusivement, il y a $25 - 3 = 22$ nombres qui sont divisibles par 4 et pour lesquels la somme des chiffres est 5 ou plus.

RÉPONSE : (C)

20. Sur les 85 cornets vendus, $\frac{11}{17} \times 85 = 55$ cornets contenaient du chocolat.

Sur les 85 cornets vendus, $\frac{10}{17} \times 85 = 50$ cornets contenaient de la vanille.

Le total $55 + 50 = 105$ est supérieur au nombre de cornets (85) parce qu'on compte chaque cornet marbré exactement deux fois. Ainsi, $105 - 85 = 20$ doit être égal au nombre de cornets marbrés. Ainsi, 20 cornets étaient marbrés, $55 - 20 = 35$ cornets étaient au chocolat et $50 - 20 = 30$ cornets étaient à la vanille, comme montré dans le diagramme de Venn ci-contre.



RÉPONSE : (E)

21. $PQRS$ est un carré avec $PS = RS = 30$ cm.

Puisque $PU + UV + VS = PS = 30$ cm et $PU = UV = VS$, alors $UV = \frac{30 \text{ cm}}{3} = 10$ cm.

$TUVW$ est un carré avec $UT = TW = VW = UV = 10$ cm.

$TXRW$ est un parallélogramme, et donc $XR = TW = 10$ cm.

La hauteur de $TXRW$ est la distance verticale entre ses deux côtés parallèles et horizontaux TW et XR . Cette hauteur verticale est égale à $RS + VW = 30 \text{ cm} + 10 \text{ cm} = 40$ cm.

L'aire du parallélogramme $TXRW$ est le produit de sa base et de sa hauteur, soit $10 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} = 400 \text{ cm}^2$.

RÉPONSE : (B)

22. Beverly écrit la valeur de **somme**, qui est 0, comme premier terme de la suite.

Elle fixe ensuite **somme** = **somme** + **a** = $0 + 1 = 1$.

Beverly écrit ensuite la valeur de **somme**, qui est 1, comme deuxième terme de la suite.

Puisque $a \neq 9$, elle fixe $a = a + 2 = 1 + 2 = 3$ et retourne à l'étape 1.

Dans le tableau ci-dessous, on garde la trace des valeurs de **somme** et de **a**, ainsi que des termes de la suite au fur et à mesure que Beverly progresse à travers les étapes.

Valeurs de somme	0	$0 + 1 = 1$	$1 + 3 = 4$	$4 + 5 = 9$	$9 + 7 = 16$	$16 + 9 = 25$
Termes de la suite	0	1	4	9	16	25
Valeurs de a	1	$1 + 2 = 3$	$3 + 2 = 5$	$5 + 2 = 7$	$7 + 2 = 9$	arrêt puisque $a = 9$

Par conséquent, le dernier terme de la suite de Beverly est 25.

RÉPONSE : (E)

23. Dans le deuxième bol, le rapport du nombre de bleuets au nombre de framboises est $2 : 5$, et donc le nombre de bleuets est un multiple entier strictement positif de 2, et le nombre de framboises est le même multiple entier strictement positif de 5.

Par exemple, il pourrait y avoir $2 \times 1 = 2$ bleuets et $5 \times 1 = 5$ framboises, ou $2 \times 2 = 4$ bleuets et $5 \times 2 = 10$ framboises, et ainsi de suite.

Ainsi, le nombre de framboises dans le deuxième bol a un chiffre des unités égal à 5 ou 0.

Il y a un total de 89 framboises, et donc le nombre de framboises dans le premier bol doit avoir un chiffre des unités égal à 4 (quand le nombre de framboises dans le deuxième bol a un chiffre des unités égal à 5), ou il doit avoir un chiffre des unités égal à 9 (quand le nombre de framboises dans le deuxième bol a un chiffre des unités égal à 0).

Dans le premier bol, le rapport du nombre de bleuets au nombre de framboises est $3 : 7$, et donc le nombre de framboises est un multiple entier strictement positif de 7.

Les multiples entiers strictement positifs de 7 inférieurs à 89 qui ont un chiffre des unités égal à

4 ou 9 sont 14, 49 et 84.

Si le nombre de framboises dans le premier bol est 14, le nombre de framboises dans le deuxième bol est $89 - 14 = 75$.

S'il y a 14 framboises dans le premier bol, il y a $3 \times \frac{14}{7} = 6$ bleuets dans le premier bol ($6 : 14 = 3 : 7$).

S'il y a 75 framboises dans le deuxième bol, il y a $2 \times \frac{75}{5} = 30$ bleuets dans le deuxième bol ($30 : 75 = 2 : 5$).

Dans ce cas, le nombre total de bleuets est $6 + 30 = 36$.

Si le nombre de framboises dans le premier bol est 49, le nombre de framboises dans le deuxième bol est $89 - 49 = 40$.

S'il y a 49 framboises dans le premier bol, il y a $3 \times \frac{49}{7} = 21$ bleuets dans le premier bol ($21 : 49 = 3 : 7$).

S'il y a 40 framboises dans le deuxième bol, il y a $2 \times \frac{40}{5} = 16$ bleuets dans le deuxième bol ($16 : 40 = 2 : 5$).

Dans ce cas, le nombre total de bleuets est $21 + 16 = 37$.

Si le nombre de framboises dans le premier bol est 84, le nombre de framboises dans le deuxième bol est $89 - 84 = 5$.

S'il y a 84 framboises dans le premier bol, il y a $3 \times \frac{84}{7} = 36$ bleuets dans le premier bol ($36 : 84 = 3 : 7$).

S'il y a 5 framboises dans le deuxième bol, il y a 2 bleuets dans le deuxième bol.

Dans ce cas, le nombre total de bleuets est $36 + 2 = 38$.

Ainsi, le plus petit nombre possible de bleuets est 36.

RÉPONSE : (A)

24. L'entier abc est divisible par 5, et donc $c = 5$ (puisque $c = 0$ n'est pas possible).
 L'entier $cde = 5de$ est divisible par 11. Les entiers $5de$ ayant des chiffres non nuls différents qui sont divisibles par 11 sont 517, 528, 539, 561, 572, 583 et 594.
 Ensuite, on détermine le plus petit entier à cinq chiffres pour lequel $5de$ est égal à l'une des sept possibilités ci-dessus. Les plus petits entiers à cinq chiffres $abcde$ ayant des chiffres différents ont $a = 1$ et $b = 2$.
 Puisque les chiffres doivent être différents, 12 517, 12 528, 12 561 et 12 572 ne sont pas possibles. Ainsi, la plus petite possibilité est 12 539.
 La condition finale pour un nombre Sorrol est que $bcd = b5d$ soit divisible par 3, et donc la somme des chiffres $b + 5 + d$ est un multiple de 3.
 Puisque $2 + 5 + 3 = 10$ n'est pas un multiple de 3, 12 539 n'est pas un nombre Sorrol.
 La prochaine possibilité pour le plus petit nombre est 12 583.
 Dans ce cas, $2 + 5 + 8 = 15$ est un multiple de 3, et donc 12 583 est le plus petit nombre Sorrol.
 Ensuite, on détermine le plus grand nombre Sorrol.
 Les plus grands entiers à cinq chiffres $abcde$ ayant des chiffres différents ont $a = 9$ et $b = 8$.
 Puisque les chiffres doivent être différents, 98 594, 98 583, 98 539 et 98 528 ne sont pas possibles. Ainsi, la plus grande possibilité est 98 572.
 Cependant, $8 + 5 + 7 = 20$ n'est pas divisible par 3.
 De façon similaire, 98 561 et 98 517 ne satisfont pas la condition de divisibilité par 3.
 Les prochains entiers à cinq chiffres $abcde$ les plus grands ont $a = 9$ et $b = 7$.

Dans ce cas, la plus grande possibilité est 97 583 (puisque 97 594 n'a pas de chiffres distincts), mais cela ne satisfait pas à la condition de divisibilité par 3.

En vérifiant la possibilité suivante la plus grande, 97 561 (puisque 97 572 n'a pas de chiffres distincts), on obtient $7 + 5 + 6 = 18$ qui est divisible par 3, et donc 97 561 est le plus grand nombre Sorrol.

La différence positive entre le plus grand nombre Sorrol et le plus petit nombre Sorrol est $97\,561 - 12\,583 = 84\,978$.

RÉPONSE : (A)

25. Il y a 9 cases sans lettres qui ne partagent pas un côté avec une case avec lettre. Dans la grille ci-contre, chacune de ces cases a été étiquetée avec un 0.

De plus, il y a 8 cases sans lettres qui partagent un côté avec exactement une case avec lettre. Dans la grille montrée, chacune de ces cases a été étiquetée avec un 1.

Finalement, il y a 4 cases sans lettres qui partagent un côté avec exactement deux cases avec lettres. Dans la grille montrée, chacune de ces cases a été étiquetée avec un 2.

0	1	0	1	0
1	A	2	B	1
0	2	0	2	0
1	C	2	D	1
0	1	0	1	0

On doit ombrager quatre cases numérotées ou moins. Il n'y a aucune case numérotée qui partage un côté avec les quatre cases étiquetées, donc au moins deux cases numérotées doivent être ombrées.

On procède au dénombrement du nombre de façons d'ombrager la grille en considérant les trois cas suivants : exactement deux cases sont ombrées, exactement trois cases sont ombrées, ou exactement quatre cases sont ombrées.

Cas 1 : Exactement deux des cases numérotées sont ombrées

Ombrager les deux 2 dans la rangée du milieu est une façon d'ombrager la grille, comme montré.

Ombrager les deux 2 dans la colonne du milieu est une deuxième façon d'ombrager la grille. Ce sont les seules façons possibles d'ombrager la grille avec exactement deux cases ombrées.

Ainsi, dans le Cas 1, il y a 2 façons d'ombrager la grille.

0	1	0	1	0
1	A	2	B	1
0	2	0	2	0
1	C	2	D	1
0	1	0	1	0

Cas 2 : Exactement trois des cases numérotées sont ombrées

On divise ce cas en quatre sous-cas en considérant le nombre de cases étiquetées 2 qui sont ombrées.

Sous-cas 2a : Aucune case étiquetée 2 n'est ombrée

Si aucune case étiquetée 2 n'est ombrée, alors chacune des trois cases ombrées doit être étiquetée 0 ou 1.

Il n'est pas possible d'ombrager trois des cases étiquetées 0 ou 1 tout en satisfaisant la condition que chacune des quatre cases étiquetées partage un côté avec exactement une case ombrée.

(Le lecteur ou la lectrice devrait s'en convaincre avant de poursuivre la lecture)

Dans le sous-cas 2a, il y a 0 façons d'ombrager la grille.

Sous-cas 2b : Exactement une case étiquetée 2 est ombrée

Il y a 4 choix pour la case étiquetée 2 à ombrager.

Cette case partage un côté avec exactement deux cases étiquetées, et donc les deux cases ombrées restantes doivent chacune être étiquetées 1.

Pour chaque choix de la case étiquetée 2, combien de choix existent pour les deux cases étiquetées 1 ?

Pour répondre à cette question, considérons l'exemple suivant. Supposons que la case étiquetée 2 entre le A et le B est ombrée, comme montré. Les deux cases étiquetées 1 qui partagent un côté avec A ne peuvent pas être ombrées (puisque A partage déjà un côté avec une case ombrée). De façon similaire, les deux cases étiquetées 1 qui partagent un côté avec B ne peuvent pas être ombrées.

0	1	0	1	0
1	A	2	B	1
0	2	0	2	0
1	C	2	D	1
0	1	0	1	0

La case C ne partage pas un côté avec une case ombrée, et donc une des deux cases étiquetées 1 qui partagent un côté avec C doit être ombrée. Il y a 2 choix ici.

De façon similaire, une des deux cases étiquetées 1 qui partagent un côté avec D doit être ombrée. Il y a 2 choix ici. Pour chacun des choix possibles, aucune case ombrée ne partage un côté avec une autre case ombrée.

Ainsi, pour chacun des 4 choix de la case étiquetée 2, il y a 2×2 choix pour les deux cases étiquetées 1, par symétrie des cases dans la grille.

Ainsi, dans le sous-cas 2b, il y a $4 \times 2 \times 2 = 16$ façons d'ombrager la grille. Une façon possible d'ombrager la grille est montrée ici.

0	1	0	1	0
1	A	2	B	1
0	2	0	2	0
1	C	2	D	1
0	1	0	1	0

Sous-cas 2c : Exactement deux cases étiquetées 2 sont ombrées

Comme montré dans le cas 1, il y a 2 façons possibles d'ombrager deux cases étiquetées 2.

Pour chacune de ces possibilités, la case ombrée restante doit être étiquetée 0.

Parmi les 9 cases étiquetées 0, 3 d'entre elles partagent un côté avec au moins une des cases ombrées étiquetées 2 (ce sont les 0 qui sont dans la même rangée ou colonne que les 2).

Ainsi, pour chacun des 2 choix des deux cases étiquetées 2, il y a $9 - 3 = 6$ choix pour la case restante étiquetée 0.

Pour chacun des choix possibles, aucune case ombrée ne partage un côté avec une autre case ombrée.

Ainsi, dans le sous-cas 2c, il y a $2 \times 6 = 12$ façons d'ombrager la grille.

Une façon possible d'ombrager la grille est montrée ci-contre.

0	1	0	1	0
1	A	2	B	1
0	2	0	2	0
1	C	2	D	1
0	1	0	1	0

Sous-cas 2d : Exactement trois cases étiquetées 2 sont ombrées

Toutes les manières possibles d'ombrager trois cases étiquetées 2 résultent en deux cases étiquetées partageant un côté avec deux cases ombrées.

Ainsi, dans le sous-cas 2d, il y a 0 façons d'ombrager la grille.

Ainsi, dans le Cas 2, il y a un total de $16 + 12 = 28$ façons d'ombrager la grille.

Cas 3 : Exactement quatre des cases numérotées sont ombrées

De façon similaire au cas 2, on divise ce cas en sous-cas en considérant le nombre de cases étiquetées 2 qui sont ombrées. Comme dans le sous-cas 2d, il n'est pas possible d'ombrager trois cases étiquetées 2 ou plus.

Sous-cas 3a : Aucune case étiquetée 2 n'est ombrée

Si aucune case étiquetée 2 n'est ombrée, alors chacune des quatre cases ombrées doit être étiquetée 1.

Chacune des 2 cases étiquetées 1 qui partagent un côté avec le A peut être ombrée.

De façon similaire, il y a 2 cases étiquetées 1 qui partagent un côté avec chacun de B , C et D qui peuvent être ombrées.

Pour chacun des choix possibles, aucune case ombrée ne partage un côté avec une autre case ombrée.

Ainsi, dans le sous-cas 3a, il y a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ façons d'ombrager la grille. Une façon possible d'ombrager la grille est montrée ici.

0	1	0	1	0
1	A	2	B	1
0	2	0	2	0
1	C	2	D	1
0	1	0	1	0

Sous-cas 3b : Exactement une case étiquetée 2 est ombrée

Avec exactement une case ombrée étiquetée 2, deux cases étiquetées 1 doivent être ombrées et une case étiquetée 0 doit être ombrée.

Comme montré dans le sous-cas 2b, pour chacun des 4 choix de la case étiquetée 2, il y a $2 \times 2 = 4$ façons d'ombrager les deux cases étiquetées 1.

Le nombre de choix de la case étiquetée 0 dépend de la façon dont les deux cases étiquetées 1 sont ombrées.

Par exemple, supposons que la case étiquetée 2 entre le A et le B est ombrée.

Alors, les 4 façons d'ombrager les cases étiquetées 1 sont montrées dans les quatre figures ci-dessous.

0	1	0	1	0
1	A	2	B	1
0	2	0	2	0
1	C	2	D	1
0	1	0	1	0

Figure 1

0	1	0	1	0
1	A	2	B	1
0	2	0	2	0
1	C	2	D	1
0	1	0	1	0

Figure 2

0	1	0	1	0
1	A	2	B	1
0	2	0	2	0
1	C	2	D	1
0	1	0	1	0

Figure 3

0	1	0	1	0
1	A	2	B	1
0	2	0	2	0
1	C	2	D	1
0	1	0	1	0

Figure 4

Ensuite, on considère le nombre de façons de choisir la dernière case ombrée étiquetée 0.

Dans chacune des quatre figures, les 2 cases étiquetées 0 qui partagent un côté avec la case ombrée étiquetée 2 ne peuvent pas être ombrées.

Il reste donc $9 - 2 = 7$ choix pour la case étiquetée 0 dans chaque figure.

Dans la figure 1, il y a 4 cases étiquetées 0 supplémentaires qui partagent un côté avec une case ombrée étiquetée 1, laissant $7 - 4 = 3$ choix pour la case étiquetée 0 dans cette figure.

Ainsi, dans la figure 1, il y a 3 façons de choisir les cases restantes. De façon similaire, il y a 3 façons de choisir les cases restantes dans la figure 2 et la figure 3, et il y a donc $3 + 3 + 3 = 9$ façons de choisir les cases.

Dans la figure 4, il n'y a que 3 cases étiquetées 0 qui partagent un côté avec une case ombrée étiquetée 1, laissant $7 - 3 = 4$ choix pour la case étiquetée 0 dans cette figure.

Ainsi, pour ce choix de la case étiquetée 2, il y a 4 façons de choisir les cases restantes dans la figure 4.

Ainsi, pour ce choix de la case étiquetée 2, il y a $9 + 4 = 13$ façons de choisir les cases restantes. Encore par symétrie, le dénombrement montré pour cet exemple est le même pour chacun des 4 choix possibles de la case étiquetée 2, et donc dans le sous-cas 3b, il y a $4 \times 13 = 52$ façons d'ombrager la grille.

Sous-cas 3c : Exactement deux cases étiquetées 2 sont ombrées

Avec exactement deux cases ombrées étiquetées 2, les deux cases ombrées restantes doivent être étiquetées 0.

Il y a 2 façons de choisir les deux cases ombrées étiquetées 2.

Pour chacun de ces choix, il y a 3 cases étiquetées 0 qui partagent un côté avec une case ombrée, et il y a donc $9 - 3 = 6$ cases étiquetées 0 parmi lesquelles choisir deux.

Pour chacun des choix possibles, aucune case ombrée ne partage un côté avec une autre case ombrée.

Il y a 6 façons de choisir la première case étiquetée 0, suivies de 5 façons de choisir la deuxième case étiquetée 0. Cependant, cela compte en double le nombre de possibilités puisque choisir, par exemple, le 0 dans le coin supérieur gauche suivi du 0 dans le coin supérieur droit est la même paire de cases que celle obtenue en les choisissant dans l'ordre inverse.

Ainsi, le nombre de façons de choisir deux cases étiquetées 0 est

$$\frac{6 \times 5}{2} = 15.$$

Dans le sous-cas 3c, il y a $2 \times 15 = 30$ façons d'ombrager la grille.

Une façon possible d'ombrager la grille est montrée ici.

0	1	0	1	0
1	<i>A</i>	2	<i>B</i>	1
0	2	0	2	0
1	<i>C</i>	2	<i>D</i>	1
0	1	0	1	0

Dans le cas 3, il y a un total de $16 + 52 + 30 = 98$ façons d'ombrager la grille.

Ayant considéré tous les cas possibles, il y a un total de $2 + 28 + 98 = 128$ façons d'ombrager la grille.

RÉPONSE : (E)

8^e année

1. Dans une liste de nombres, le mode correspond au nombre le plus fréquent. Donc, le mode de la liste donnée est 2.

RÉPONSE : (A)

2. Après avoir donné 4 \$ à Abigail, Liliana lui doit encore $11 \$ - 4 \$ = 7 \$$.

RÉPONSE : (D)

3. Le périmètre est de 12 cm. On obtient donc $3 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + x \text{ cm} = 12 \text{ cm}$, d'où $x = 12 - 8 = 4$.

RÉPONSE : (C)

4. Il y a 60 secondes dans une minute. Le robinet laisse tomber 1 goutte toutes les 10 secondes. Donc, en une minute, $\frac{60}{10} = 6$ gouttes tombent.

RÉPONSE : (E)

5. La distance entre 0 et 4 sur la droite numérique est de 4. Les graduations divisent cette distance en 16 parties égales, donc la distance entre deux graduations consécutives est $\frac{4}{16} = 0,25$.

Le point T se trouve à 3 graduations à droite de 0, donc la valeur de T est $3 \times 0,25 = 0,75$.

RÉPONSE : (C)

6. La mesure de chacun des trois angles d'un triangle équilatéral est $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

Ainsi, $\angle RSU = \angle TSU = 60^\circ$.

Puisque $\angle RST = \angle RSU + \angle TSU$, la mesure de $\angle RST$ est $60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

RÉPONSE : (D)

7. Le nombre total d'élèves sondés est $10 + 5 + 9 + 6 = 30$.

Parmi les 30 élèves, 6 se rendent à l'école en voiture.

Donc, le pourcentage d'élèves qui se rendent à l'école en voiture est $\frac{6}{30} \times 100\% = \frac{1}{5} \times 100\% = 20\%$.

RÉPONSE : (C)

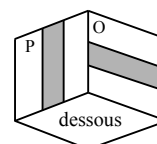
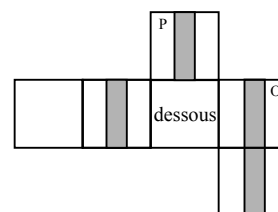
8. Puisque chaque chiffre du code de Livy est un entier de 0 à 9 inclus, il y a 10 chiffres possibles. Comme les chiffres du code sont différents, Livy sait que le dernier chiffre est différent des trois premiers. Il reste donc $10 - 3 = 7$ possibilités pour le dernier chiffre. La probabilité que Livy saisisse le bon chiffre parmi ces 7 au premier essai est $\frac{1}{7}$.

RÉPONSE : (B)

9. Le développement montré en (B) ne peut pas être celui du cube.

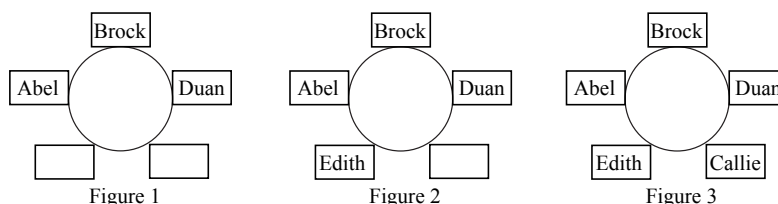
En utilisant ce développement, on commence par étiqueter les trois carrés “dessous”, “O” et “P”, comme montré. On plie le développement de sorte que la face “dessous” devienne la face inférieure du cube, et que les faces O et P deviennent deux faces adjacentes verticales.

Le “dessous” du cube, avec les deux faces verticales pliées, est montré dans le deuxième diagramme. Puisque les faces étiquetées O et P suffisent pour démontrer que le développement en (B) ne peut pas être celui du cube entouré d'une bande, on ignore les trois autres faces.



RÉPONSE : (B)

10. Les trois premiers entiers pairs de la liste sont $2 = 2 \times 1$, $4 = 2 \times 2$ et $6 = 2 \times 3$.
 Chaque entier pair de la liste s'écrit sous la forme $2 \times n$, où n est un entier strictement positif.
 Ainsi, le 15^e entier pair est $2 \times 15 = 30$.
 Les trois premiers entiers impairs de la liste sont chacun un de moins que les trois premiers entiers pairs de la liste, respectivement. Il s'agit donc de $1 = 2 \times 1 - 1$, $3 = 2 \times 2 - 1$ et $5 = 2 \times 3 - 1$.
 Chaque entier impair de la liste s'écrit sous la forme $2 \times n - 1$, où n est un entier strictement positif.
 Ainsi, le 25^e entier impair est $2 \times 25 - 1 = 49$.
 Donc, la différence entre le 25^e entier impair et le 15^e entier pair est $49 - 30 = 19$.
 RÉPONSE : (C)
11. Puisque $p + q + r = p + r + q = 19$ et $p + r = 8$, on obtient $8 + q = 19$, et donc $q = 19 - 8 = 11$.
 RÉPONSE : (B)
12. Brock est assis sur la chaise entre Abel et Duan, comme montré dans la figure 1.
 Edith n'est pas à côté de Duan et doit donc être à côté d'Abel, comme montré dans la figure 2.
 Callie doit être assise dans la chaise finale. Ainsi, Abel et Callie sont assis immédiatement à droite et à gauche d'Edith, comme montré dans la figure 3.
 En échangeant les positions d'Abel et de Duan dans chaque figure, on échange la position d'Edith et Callie dans la figure 3, mais le résultat final reste le même.



RÉPONSE : (A)

13. La masse d'un plateau de service est 4 fois celle d'une assiette, donc la masse combinée d'un plateau et de 6 assiettes est égale à la masse de $4 + 6 = 10$ assiettes.
 Puisque la masse de 10 assiettes est de 3000 g, la masse de chaque assiette est $\frac{3000 \text{ g}}{10} = 300 \text{ g}$.
 RÉPONSE : (E)

14. *Solution 1*

Chaque heure, Anna court 6 km et Yao court 8 km, donc la distance parcourue par les deux ensemble est $6 \text{ km} + 8 \text{ km} = 14 \text{ km}$.
 Après deux heures, cela revient à $2 \times 14 \text{ km} = 28 \text{ km}$, et après trois heures, à $3 \times 14 \text{ km} = 42 \text{ km}$.
 Comme ils ont commencé à une distance de 42 km entre eux, ils se rencontrent après 3 heures.
 Dans ces 3 heures, Anna a couru $3 \text{ h} \times 6 \text{ km/h} = 18 \text{ km}$, tandis que Yao a couru $3 \text{ h} \times 8 \text{ km/h} = 24 \text{ km}$, donc Yao a couvert $24 \text{ km} - 18 \text{ km} = 6 \text{ km}$ de plus qu'Anna.

Solution 2

Anna court à 6 km/h et Yao court à 8 km/h, donc ils se déplacent l'un vers l'autre à une vitesse constante de $6 \text{ km/h} + 8 \text{ km/h} = 14 \text{ km/h}$.

Ainsi, Anna et Yao parcourent ensemble 42 km et se rencontrent après $\frac{42 \text{ km}}{14 \text{ km/h}} = 3$ heures.

Comme Yao court $8 \text{ km/h} - 6 \text{ km/h} = 2 \text{ km/h}$ plus vite qu'Anna, Yao parcourt $2 \text{ km/h} \times 3 \text{ h} = 6 \text{ km}$ de plus qu'Anna.

RÉPONSE : (A)

15. La moitié de la pile de journaux, soit 25 cm, est retirée de la pile, laissant 25 cm dans la pile.
 Parmi les 25 cm retirés, $\frac{1}{5} \times 25 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$ est remise dans la pile.
 La hauteur finale de la pile de journaux est donc $25 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 30 \text{ cm}$.

RÉPONSE : (C)

16. D'après le théorème de Pythagore, on obtient $x^2 + x^2 = \sqrt{8}^2$ or $2x^2 = 8$. Donc, $x^2 = 4$, soit $x = 2$ (puisque $x > 0$).

Ainsi, l'aire du triangle rectangle isocèle est $\frac{1}{2} \times 2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 2 \text{ cm}^2$.

L'aire du carré de côté 8 cm est $8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} = 64 \text{ cm}^2$.

Donc, le plus petit nombre de triangles nécessaires pour recouvrir complètement le carré est $\frac{64 \text{ cm}^2}{2 \text{ cm}^2} = 32$.

RÉPONSE : (D)

17. Puisque $P4R$ est un nombre à trois chiffres, on a $P \neq 0$.

Si $P > 2$, alors $P + 7 > 9$, et donc $T > 9$. Dans ce cas, $TU1$ serait un nombre à quatre chiffres, ce qui n'est pas possible ; donc $P = 2$.

Dans la colonne des centaines, $P + 7 = 2 + 7 = 9$.

Donc, pour la même raison, il n'y a pas de retenue de la colonne des dizaines vers la colonne des centaines, donc $T = 9$. Les chiffres restants sont 0, 3, 5 et 8.

Le chiffre des unités de la somme est égal à 1 ; donc les seules possibilités pour R et S sont 3 et 8, dans un certain ordre.

Puisque $3 + 8 = 11$, il y a une retenue de 1 de la colonne des unités vers la colonne des dizaines.

Ainsi, la somme dans la colonne des dizaines est $1 + 4 + Q = 5 + Q$.

Comme il n'y a pas de retenue de la colonne des dizaines vers la colonne des centaines, on a $5 + Q = U$, d'où $Q = 0$ et $U = 5$.

Les deux sommes possibles sont montrées à droite.

$$\begin{array}{r} P4R \\ + 7QS \\ \hline TU1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ + 708 \\ \hline 951 \end{array}$$

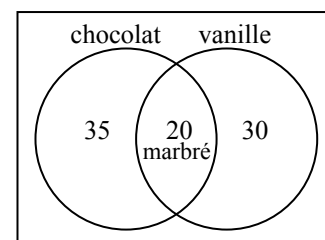
$$\begin{array}{r} 248 \\ + 703 \\ \hline 951 \end{array}$$

RÉPONSE : (D)

18. Parmi les 85 cornets vendus, $\frac{11}{17} \times 85 = 55$ cornets contenaient du chocolat.

Parmi les 85 cornets vendus, $\frac{10}{17} \times 85 = 50$ cornets contenaient de la vanille.

Le total $55 + 50 = 105$ est supérieur au nombre total de cornets, car chaque cornet marbré est compté deux fois. Ainsi, il y a $105 - 85 = 20$ cornets marbrés. Puisque 20 cornets sont marbrés, $55 - 20 = 35$ cornets sont uniquement au chocolat et $50 - 20 = 30$ cornets sont uniquement à la vanille, comme le montre le diagramme de Venn.



RÉPONSE : (E)

19. La distance entre deux droites parallèles est constante. Ainsi, la hauteur du parallélogramme $ABFE$ est égale à la hauteur du triangle CDG .
Notons cette hauteur h . Dans ce cas, le rapport entre l'aire de $ABFE$ et l'aire du triangle CDG est $AB \times h : \frac{1}{2} \times CD \times h$.

En reportant les valeurs et en simplifiant, on obtient $8 \times h : \frac{1}{2} \times 12 \times h = 8 : 6 = 4 : 3$.

RÉPONSE : (E)

20. Sous forme de nombre fractionnaire, on a $\frac{90}{11} = 8\frac{2}{11}$, et on obtient donc $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = 8 + \frac{2}{11}$.

Si $a = 8$, alors $\frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{2}{11}$.

Le numérateur de $\frac{2}{11}$ est 2. On réécrit donc l'équation précédente sous la forme $\frac{2 \times 1}{2 \times (b + \frac{1}{c})} = \frac{2}{11}$.

Les deux numérateurs sont maintenant égaux à 2, donc $2 \times (b + \frac{1}{c}) = 11$, soit $b + \frac{1}{c} = \frac{11}{2}$.

Sous forme de nombre fractionnaire, on a $\frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$, et on obtient donc $b + \frac{1}{c} = 5 + \frac{1}{2}$.

Si $b = 5$, alors $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}$, donc $c = 2$.

On en déduit que $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = 8 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}$ et que $a + b + c = 8 + 5 + 2 = 15$.

RÉPONSE : (D)

21. *Solution 1*

On attribue à r , s et t des nombres distincts de la liste 3, 4, 5, puis on calcule $r \times s + t$ pour chaque cas.

Si $r = 3$, $s = 4$ et $t = 5$, alors $r \times s + t = 3 \times 4 + 5 = 17$, qui est impair.

Si $r = 3$, $s = 5$ et $t = 4$, alors $r \times s + t = 3 \times 5 + 4 = 19$, qui est impair.

Si $r = 4$, $s = 3$ et $t = 5$, alors $r \times s + t = 4 \times 3 + 5 = 17$, qui est impair.

Si $r = 4$, $s = 5$ et $t = 3$, alors $r \times s + t = 4 \times 5 + 3 = 23$, qui est impair.

Si $r = 5$, $s = 3$ et $t = 4$, alors $r \times s + t = 5 \times 3 + 4 = 19$, qui est impair.

Si $r = 5$, $s = 4$ et $t = 3$, alors $r \times s + t = 5 \times 4 + 3 = 23$, qui est impair.

Pour les six cas possibles d'attribution des valeurs 3, 4 et 5, la valeur de $r \times s + t$ est impair.

Solution 2

Tout d'abord, on remarque que 3 et 5 sont impairs et que 4 est pair.

Lorsque r , s et t reçoivent chacun une valeur différente parmi 3, 4 et 5, on a deux cas pour r et s : soit les deux sont impairs, soit exactement l'un des deux est impair.

Si r et s sont tous les deux impairs, alors $r \times s$ est impair et $t = 4$, donc $r \times s + t$ est impair.

Si exactement un de r et s est impair, alors $r \times s$ est pair et t est impair, donc $r \times s + t$ est impair.

Par conséquent, la valeur de $r \times s + t$ est toujours impaire.

Lorsqu'on attribue les valeurs 3, 4 et 5, il y a 3 choix pour la valeur de r , suivis de 2 choix pour la valeur de s et d'un seul choix pour la valeur de t .

Puisque $r \times s + t$ est impaire pour tous ces choix, il y a $3 \times 2 \times 1 = 6$ façons d'attribuer les nombres.

RÉPONSE : (E)

22. L'aire du quadrilatère $DMBN$ est égale à la somme des aires des triangles DMB et DNB ; donc, on calcule d'abord ces deux aires.
- Chacun de DA , DB et DC est un rayon du cercle, donc $DA = DB = DC = 5$.
- Puisque le triangle DAB est isocèle et que M est le milieu de AB , DM est perpendiculaire à AB (c'est la hauteur du triangle DAB).
- D'après le théorème de Pythagore dans le triangle DMB , on obtient $DB^2 = DM^2 + MB^2$.
- Puisque $MB = \frac{AB}{2} = 2$ cm, on a $5^2 = DM^2 + 2^2$.
- En résolvant pour DM , on obtient $DM^2 = 25 - 4 = 21$, donc $DM = \sqrt{21}$ cm (puisque $DM > 0$).
- Ainsi, l'aire du triangle DMB est $\frac{1}{2} \times MB \times DM = \frac{1}{2} \times 2 \text{ cm} \times \sqrt{21} \text{ cm} = \sqrt{21} \text{ cm}^2$.
- De la même façon, on détermine l'aire du triangle DNB .
- Puisque $NB = \frac{1}{2} \times BC = 3$ cm, on a $5^2 = DN^2 + 3^2$.
- En résolvant pour DN , on obtient $DN^2 = 25 - 9 = 16$, donc $DN = \sqrt{16} = 4$ cm (puisque $DN > 0$).
- Ainsi, l'aire du triangle DNB est $\frac{1}{2} \times NB \times DN = \frac{1}{2} \times 3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$.
- En additionnant les deux aires, l'aire de $DMBN$ est $\sqrt{21} \text{ cm}^2 + 6 \text{ cm}^2$, soit $10,6 \text{ cm}^2$ arrondi à une décimale.

RÉPONSE : (B)

23. La probabilité d'obtenir un 2 au deuxième lancer est la somme de deux probabilités : la probabilité d'obtenir un nombre impair au premier lancer puis un 2, et la probabilité d'obtenir un nombre pair au premier lancer puis un 2.
- Le dé original comporte 2 nombres impairs et 4 nombres pairs sur ses faces. Ainsi, la probabilité d'obtenir un nombre impair au premier lancer est $\frac{2}{6}$, et la probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{4}{6}$.
- Si au premier lancer on obtient un nombre impair, les nombres sur les faces deviennent 2, 2, 2, 4, 14 et 8.
- La probabilité d'obtenir un 2 au deuxième lancer est alors $\frac{3}{6}$. La probabilité d'obtenir un nombre impair au premier lancer puis un 2 au deuxième lancer est $\frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{6}{36}$.
- Si au premier lancer on obtient un nombre pair, les nombres sur les faces deviennent 1, 1, 1, 2, 7 et 4.
- La probabilité d'obtenir un 2 au deuxième lancer est alors $\frac{1}{6}$. La probabilité d'obtenir un nombre pair au premier lancer puis un 2 au deuxième lancer est $\frac{4}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{4}{36}$.
- Donc, la probabilité d'obtenir un 2 au deuxième lancer est égale à $\frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

RÉPONSE : (D)

24. À la fin du jeu de Séraphine et Jamie, supposons qu'ils aient un total de c attrapés et m lancers non attrapés.
- Chaque attrapée augmente la distance entre eux de $2 \times 60 \text{ cm} = 120 \text{ cm}$, donc c attrapées augmentent la distance de $120c \text{ cm}$.
- Chaque lancer non attrapé diminue la distance entre eux de 20 cm , donc les m lancers diminuent

la distance de $20m$ cm.

Ils commencent avec une distance de 1500 cm entre eux et, au moment où ils s'arrêtent, la distance est de 1720 cm, d'où $1500 + 120c - 20m = 1720$.

En simplifiant, on obtient $120c - 20m = 1720 - 1500$, soit $120c - 20m = 220$. En divisant par 20, on obtient $6c - m = 11$.

La question demande quel nombre de passes n'est pas possible. On note le nombre total de passes par n , et on obtient $n = m + c$.

À partir de $6c - m = 11$ et $n = m + c$, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} 6c - m &= 11 \\ 6c &= 11 + m \\ 6c + c &= 11 + m + c \\ 7c &= 11 + n \end{aligned}$$

et donc $n = 7c - 11$.

Si $n = 21$, alors $7c - 11 = 21$, soit $7c = 32$, et donc $c = \frac{32}{7}$. Cependant, $\frac{32}{7}$ n'est pas un nombre entier, donc 21 passes n'est pas possible.

Pour les valeurs de c égales à 4, 12, 8 et 3, le nombre de passes $n = 7c - 11$, est respectivement égal à 17, 73, 45 et 10.

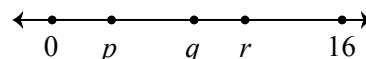
Dans chaque cas, $m = 6c - 11$, donc m est également un nombre entier positif.

Parmi les valeurs proposées, 21 passes n'est pas possible.

RÉPONSE : (B)

25. Supposons que les cinq points distincts soient placés sur une droite numérique, le point le plus à gauche étant à 0. La plus grande distance entre une paire de ces points est de 16 (puisque $n < 16$), donc le point le plus à droite se trouve à 16 sur la droite numérique.

Ensuite, on place les trois points restants sur la droite numérique aux valeurs p , q et r , où $0 < p < q < r < 16$, comme montré.



Puisque toutes les dix distances entre les paires de points sont des entiers, p , q et r sont eux aussi des entiers.

Les dix distances entre les paires de points sont :

$$p - 0 = p, q - 0 = q, r - 0 = r, 16 - 0 = 16, q - p, r - p, 16 - p, r - q, 16 - q, 16 - r$$

Parmi les distances spécifiées, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 16 et n , nous avons déjà prise en compte la distance de 16 en plaçant les extrémités à 0 et 16 ; donc, à partir de maintenant, nous ne la considérons plus.

Il reste à déterminer toutes les valeurs possibles de p , q et r pour lesquelles les distances $p, q, r, q - p, r - p, r - q, 16 - p, 16 - q$ et $16 - r$ (dans un certain ordre) correspondent aux distances 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13 et n , avec n un entier tel que $1 \leq n \leq 15$.

Remarque : aucun des nombres p , q et r ne peut prendre les valeurs 1, 6, 8, 10 ou 15. Pourquoi ? Par exemple, si $p = 1$, alors $16 - p = 15$. Dans ce cas, 1 et 15 seraient deux distances qui n'apparaissent pas dans la liste 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11 et 13. Comme il n'y a qu'une seule distance inconnue, n , il ne peut y avoir qu'une seule distance qui n'apparaisse pas dans cette liste. Donc, 1 n'est pas une valeur possible pour p , q ou r .

Par le même raisonnement, on montre que 6, 8, 10 et 15 ne peuvent pas non plus être des valeurs de p , q et r .

Ensuite, nous montrons qu'exactement un des nombres p , q et r est égal à 3 ou à 13.

Pour obtenir une distance de 13, il faut avoir des points à la fois à 0 et 13, ou à la fois à 1 et 14, ou à la fois à 2 et 15, ou à la fois à 3 et 16.

On a démontré que 1 et 15 ne sont pas des valeurs possibles pour p , q et r . Donc, les deuxième et troisième possibilités de la liste ne sont pas permises.

Ainsi, au moins un des nombres p , q et r est égal à 3 ou à 13.

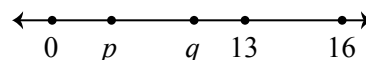
Si deux des nombres p , q et r sont égaux à 3 ou à 13, alors les distances 3 et 13 apparaîtraient chacune deux fois dans la liste (puisque $16 - 3 = 13$ et $16 - 13 = 3$), ce qui n'est pas possible.

Donc, exactement un des nombres p , q et r est égal à 3 ou à 13.

Supposons qu'exactement un des nombres p , q et r soit égal à 13. Nous traiterons la possibilité qu'un des nombres p , q et r soit égal à 3 à la fin de la solution.

Soit $q = 13$. Alors $r = 14$, puisque nous avons déjà démontré que r ne peut pas être égal à 15.

Cependant, si $r = 14$, alors $r - q = 14 - 13 = 1$, mais ni 1 ni 14 ne figurent dans la liste des distances, donc cette situation n'est pas possible.



De façon similaire, on peut démontrer que $p \neq 13$, et donc $r = 13$, comme montré.

Avec $r = 13$, on obtient $16 - r = 3$, ainsi les distances restantes sont 2, 4, 5, 7, 9, 11 et n . Le raisonnement présenté plus haut établit que toutes les distances restantes sont inférieures à 13, et donc $n \leq 12$.

Avec $r = 13$, on a démontré que ni p ni q ne peut être égal à 1, 3, 6, 8, 10, 13, 14 et 15. Ainsi, les valeurs possibles de p et q sont 2, 4, 5, 7, 9, 11 et 12.

Si $p = 2$, alors $16 - p = 14$ et puisque 14 ne figure pas dans la liste des distances et que $n \neq 14$, on obtient $p \neq 2$.

Si $q = 12$, alors $q - 0 = 12$ et $r - q = 13 - 12 = 1$ sont deux valeurs qui ne figurent pas dans la liste des distances, et donc $q \neq 12$.

Puisque $q \leq 11$ et $p < q$, on a $p \neq 11$. Les valeurs possibles restantes de p sont 4, 5, 7, 9.

Puisque $p \geq 4$ et $p < q$, on a $q \neq 4$. Les valeurs possibles restantes de q sont 5, 7, 9, 11.

Ça nous donne 10 paires possibles de valeurs (p, q) . Celles-ci sont : (4, 5), (4, 7), (4, 9), (4, 11), (5, 7), (5, 9), (5, 11), (7, 9), (7, 11) et (9, 11).

Dans chaque cas, $r = 13$.

Rappelons que les autres distances sont 2, 4, 5, 7, 9, 11 et n .

Si $(p, q) = (4, 5)$, alors $q - p = 5 - 4 = 1$ et $16 - q = 16 - 5 = 11$ sont deux distances qui ne figurent pas dans la liste, donc $(p, q) \neq (4, 5)$. On continue notre analyse des 9 paires restantes dans le tableau qui suit.

(p, q)	Distance(s) qui ne figurent pas dans 2, 4, 5, 7, 9, 11	Valeur de n ?
(4, 5)	$q - p = 1$ et $13 - q = 8$	impossible
(4, 7)	$q - p = 3$ et $13 - q = 6$	impossible
(4, 9)	$16 - p = 12$ et $p - 0 = 13 - q = 4$ (donne deux 4)	impossible
(4, 11)	$16 - p = 12$	$n = 12$
(5, 7)	$13 - p = 8$ et $13 - q = 6$	impossible
(5, 9)	$13 - p = 8$ et $q - p = 13 - q = 4$ (donne deux 4)	impossible
(5, 11)	$13 - p = 8$ et $q - p = 6$	impossible
(7, 9)	$13 - p = 6$ et $q - 0 = 16 - p = 9$ (donne deux 9)	impossible
(7, 11)	$13 - p = 6$	$n = 6$
(9, 11)	$13 - q = q - p = 2$ (donne deux 2)	$n = 2$

Ainsi, les valeurs possibles pour n sont 2, 6 et 12, donc il y a 3 valeurs possibles de n .

Note : Au début de la solution, on a supposé que l'un des nombres p , q et r était égal à 13, puis on a démontré que $r = 13$. De la même façon, on peut supposer que l'un des nombres p , q et r est égal à 3, puis démontrer que $p = 3$.

Remarquons que le cas où $r = 13$ est symétrique au cas où $p = 3$.

C'est-à-dire que, lorsque $r = 13$ on obtient les deux distances $r - 0 = 13$ et $16 - r = 3$. Lorsque $p = 3$, on obtient les mêmes deux distances $p - 0 = 3$ et $16 - p = 13$. La solution a été raccourcie en profitant de la symétrie des valeurs p , q et r . Plus précisément, la réflexion des valeurs p , q et r , c'est-à-dire le fait de remplacer chacune de ces valeurs par $16 - p$, $16 - q$ et $16 - r$, donne le même ensemble de distances, et donc la même valeur de n . Par exemple, la réflexion de $(0, p, q, r, 16) = (0, 4, 11, 13, 16)$ est $(16 - 0, 16 - p, 16 - q, 16 - r, 16 - 16)$, soit $(16, 12, 5, 3, 0)$, ou encore $(0, 3, 5, 12, 16)$. Ces valeurs produisent les mêmes distances que $(0, 4, 11, 13, 16)$ et donc $n = 12$.

RÉPONSE : (C)

