Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2026

le mercredi 1 avril 2026
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 2 avril 2026
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Les trois plus petits nombres premiers sont 2, 3 et 5. Leur produit est $2 \times 3 \times 5 = 30$.

   (b) Comme tout nombre premier est un entier strictement positif, il faut que $c > 3$ pour que $\frac{c-3}{4}$ soit un nombre premier. La valeur de $\frac{c-3}{4}$ est un entier si et seulement si $c-3$ est divisible par 4.
   Les valeurs de c telles que $4 \leq c \leq 20$ et pour lesquelles $c-3$ est divisible par 4 sont 7, 11, 15 et 19.
   Lorsque c est égal à 7 ou 19, les valeurs de $\frac{c-3}{4}$ sont respectivement 1 et 4. Aucune de ces valeurs n'est un nombre premier.
   Lorsque $c = 11$, on obtient $\frac{11-3}{4} = 2$, qui est un nombre premier.
   Lorsque $c = 15$, on obtient $\frac{15-3}{4} = 3$, qui est aussi un nombre premier.
   Donc, les deux valeurs possibles de l'entier c sont 11 et 15.

   (c) En factorisant l'expression, on obtient $21d - 77 = 7(3d - 11)$.
   Pour tout entier d, la valeur de $3d - 11$ est aussi un entier, donc $7(3d - 11)$ est le produit de deux entiers, 7 et $3d - 11$.
   Un nombre premier est un entier strictement positif qui ne peut pas s'écrire comme produit de deux entiers strictement supérieurs à 1. Donc, $3d - 11 = 1$.
   Si $3d - 11 = 1$, alors $3d = 12$, soit $d = 4$.
   Le seul entier d tel que $1 \leq d \leq 10$ et pour lequel $21d - 77$ est un nombre premier est $d = 4$, et le nombre premier est $21(4) - 77 = 7$.

   Si $d < 4$, alors $3d - 11$ est négatif, donc $7(3d - 11)$ n'est pas un nombre premier. De plus, si $d > 4$, alors $3d - 11 \geq 3(5) - 11 = 4$, donc $7(3d - 11)$ est le produit de deux entiers strictement supérieurs à 1, et, en conséquence, n'est pas un nombre premier.

2. (a) Puisque les points $B(2, 1)$ et $C(6, 1)$ sont situés sur la même droite horizontale, on a $BC = 6 - 2 = 4$, ce qui représente la différence positive entre leurs abscisses.
   Soit G le point situé sur BC, directement sous $A(3, 4)$.
   Alors, G a la même abscisse que le point $A(3, 4)$ et la même ordonnée que $B(2, 1)$ et $C(6, 1)$.
   Donc, les coordonnées de G sont $(3, 1)$. Puisque $A(3, 4)$ et $G(3, 1)$ sont sur une même droite verticale, on a $AG = 4 - 1 = 3$, ce qui représente la différence positive des ordonnées.
   L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2} \times (BC) \times (AG) = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$.

   (b) Le symétrique du point (x, y) par rapport à l'axe des ordonnées est le point $(-x, y)$.
   Donc, le symétrique de $B(2, 1)$ par rapport à l'axe des ordonnées est le point $D(-2, 1)$.
   En utilisant $G(3, 1)$ obtenu à la partie (a), on obtient $DC = 6 - (-2) = 8$ et $AG = 3$.
   Ainsi, l'aire du triangle ADC est $\frac{1}{2} \times (DC) \times (AG) = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$.

   (c) Le point $A(3, 4)$ est situé à $4 - (-2) = 6$ unités verticalement au-dessus de la droite $y = -2$.
   Donc, le symétrique de A par rapport à la droite $y = -2$ est situé 6 unités verticalement en dessous de cette droite, et a pour coordonnées $E(3, -2 - 6)$, soit $E(3, -8)$.
   On réutilise $G(3, 1)$ obtenu dans la partie (a), puisque G est sur BC et sur la droite verticale passant par $E(3, -8)$. Ainsi, $EG = 1 - (-8) = 9$ et $BC = 4$.
   Donc, l'aire du triangle EBC est $\frac{1}{2} \times (BC) \times (EG) = \frac{1}{2} \times 4 \times 9 = 18$.

(d) En utilisant $G(3,1)$ obtenu dans la partie (a), le triangle FBC a pour base $BC = 4$, pour hauteur FG, et pour aire 12.

Puisque l'aire du triangle FBC est $\frac{1}{2} \times (BC) \times (FG) = 12$, on a $2 \times (FG) = 12$, donc $FG = 6$.
Avec $FG = 6$ et F situé verticalement au-dessus de $G(3,1)$, on détermine que F a pour coordonnées $(3{,}1{+}6) = (3,7)$. Avec $FG = 6$ et F situé verticalement en dessous de $G(3,1)$, on détermine que F a pour coordonnées $(3{,}1 - 6) = (3,\,-5)$.

Puisque F est l'image du point $A(3,4)$ après réflexion par rapport à la droite horizontale $y = k$, la distance entre la droite et F est égale à la distance entre la droite et A.
Cela signifie que k est égal à la moyenne des ordonnées de F et A.
La moyenne des ordonnées de $F(3,7)$ et $A(3,4)$ est $\frac{7+4}{2} = \frac{11}{2}$.
La moyenne des ordonnées de $F(3,\,-5)$ et $A(3,4)$ est $\frac{-5+4}{2} = -\frac{1}{2}$.
Les deux valeurs de k pour lesquelles l'aire du triangle FBC est 12 sont $k = \frac{11}{2}$ et $k = -\frac{1}{2}$.

3. (a) Puisqu'il est donné que la longueur du cycle des chiffres des unités des puissances de 3 est égale à 4, et que $43 = 4 \times 10 + 3$, le chiffre des unités de 3^{43} est le même que celui de 3^3, soit 7.

(b) Chaque entier multiple de 10 a le chiffre des unités égal à 0. Donc, on commence par déterminer la séquence répétitive du chiffre des unités des puissances de 4 et de 8.

$$4^1 = 4, 4^2 = 16, 4^3 = 64, \ldots \qquad 8^1 = 8, 8^2 = 64, 8^3 = 512, 8^4 = 4096, 8^5 = 32\,768, \ldots$$

Pour les puissances de 4, les chiffres des unités se répètent dans l'ordre suivant : 4, 6, avec une longueur de cycle de 2.
Pour les puissances de 8, les chiffres des unités se répètent dans l'ordre suivant : 8, 4, 2, 6, avec une longueur de cycle de 4.
Afin de déterminer le chiffre des unités de $4^j + 8^j$, on additionne les chiffres des unités correspondant aux puissances individuelles de 4 et de 8, puis on considère le chiffre des unités de cette somme.
Ainsi, les chiffres des unités de $4^j + 8^j$ proviennent des sommes $4 + 8 = 12$, $6 + 4 = 10$, $4 + 2 = 6$ et $6 + 6 = 12$, ce qui donne respectivement les chiffres des unités 2, 0, 6 et 2. Cette séquence se répète avec une longueur de cycle de 4.
Donc, $4^j + 8^j$ est un multiple de 10 (c'est-à-dire a pour chiffre des unités 0) une fois tous les 4 entiers consécutifs de j.
Puisque $2026 = 4 \times 506 + 2$, et que 0 est le deuxième terme de la séquence répétée 2, 0, 2 et 6, le nombre d'entiers j tels que $1 \leq j \leq 2026$ et pour lesquels $4^j + 8^j$ est un multiple de 10 est $506 + 1 = 507$.

(c) Pour 2^k, les chiffres des unités se répètent dans l'ordre suivant : 2, 4, 8, 6, avec une longueur de cycle de 4.
Pour 3^k, les chiffres des unités se répètent dans l'ordre suivant : 3, 9, 7, 1, avec une longueur de cycle de 4.
De façon similaire à la démarche utilisée pour $4^j + 8^j$ dans la partie (b), les chiffres des unités de $2^k + 3^k$ se répètent dans l'ordre suivant : 5, 3, 5, 7, avec une longueur de cycle de 4.

Pour 8^k, les chiffres des unités se répètent dans l'ordre suivant : 8, 4, 2, 6, avec une longueur de cycle de 4.

Lorsque k est pair, c'est-à-dire lorsque $k = 2m$ pour un entier strictement positif m, on a $2026k = 2026 \times 2m = 4052m$.
Puisque $4052 = 4 \times 1013$, $4052m$ est un multiple de 4. Donc, $2026k$ est un multiple de 4 pour tout entier pair k.
Ainsi, pour tout entier pair k, le chiffre des unités de 8^{2026k} est 6 (le quatrième terme de la suite périodique 8, 4, 2, 6).
Lorsque k est impair, c'est-à-dire lorsque $k = 2m+1$ pour un entier strictement positif m, on obtient la suite d'équations suivante :

$$\begin{aligned} 2026k &= 2026 \times (2m+1) \\ &= 4052m + 2026 \\ &= 4052m + 2024 + 2 \\ &= 4 \times 1013m + 4 \times 506 + 2 \\ &= 4(1013m + 506) + 2 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier impair k, $2026k$ s'écrit comme un multiple de 4 auquel on ajoute 2. Donc, pour tout entier impair k, le chiffre des unités de 8^{2026k} est 4 (le deuxième terme de la suite périodique 8, 4, 2, 6).

Pour 9^k, les chiffres des unités se répètent dans l'ordre suivant : 9, 1, avec une longueur de cycle de 2.
Ainsi, lorsque k est impair, le chiffre des unités de 9^k est 9, et lorsque k est pair, il est 1.
Pour tout entier k, $2026k$ est un entier pair, donc le chiffre des unités de 9^{2026k} est 1.

En résumé, nous avons déterminé que le chiffre des unités de 8^{2026k} est 4 lorsque k est impair, et 6 lorsque k est pair. De plus, le chiffre des unités de 9^{2026k} est 1 pour tout entier k.
Donc, le chiffre des unités de $8^{2026k} + 9^{2026k}$ est successivement $4 + 1 = 5$ et $6 + 1 = 7$, ce qui donne un cycle de longueur 2.
Rappelons que les chiffres des unités de $2^k + 3^k$ suivent la suite 5, 3, 5, 7, qui se répète avec une période de longueur 4.
Ainsi, $2^k + 3^k$ et $8^{2026k} + 9^{2026k}$ ont le même chiffre des unités, soit 5, pour tout entier impair k. De plus, $2^k + 3^k$ et $8^{2026k} + 9^{2026k}$ ont le même chiffre des unités, soit 7, pour tout entier k multiple de 4.
Pour $1 \leq k \leq 50$, il y a 25 valeurs impaires de k et 12 valeurs de k multiple de 4 (puisque $50 = 4 \times 12 + 2$), donc il y a $25 + 12 = 37$ entiers k pour lesquels $2^k + 3^k$ et $8^{2026k} + 9^{2026k}$ ont le même chiffre des unités.

4. (a) En général, l'abscisse du milieu des points A et B est égale à la moyenne des abscisses de A et B, et son ordonnée est égale à la moyenne des ordonnées de A et B.
Par exemple, le milieu des points $(0, 4)$ et $(0, 16)$ est $\left(\dfrac{0+0}{2}, \dfrac{4+16}{2}\right) = (0, 10)$.
On détermine les milieux de chaque paire de points distincts de R dans le tableau suivant.

	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,4)$	$(0,9)$	$(0,16)$	$(0,25)$
$(0,1)$	$(0,1/2)$					
$(0,4)$	$(0,2)$	$(0,5/2)$				
$(0,9)$	$(0,9/2)$	$(0,5)$	$(0,13/2)$			
$(0,16)$	$(0,8)$	$(0,17/2)$	$(0,10)$	$(0,25/2)$		
$(0,25)$	$(0,25/2)$	$(0,13)$	$(0,29/2)$	$(0,17)$	$(0,41/2)$	

Dans le tableau, il y a $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ points milieux. Cependant, $(0, 25/2)$ est le milieu de $(0, 16)$ et $(0, 9)$, ainsi que de $(0, 25)$ et $(0, 0)$. Donc, il y a 14 points milieux distincts.

(b) Parmi les points de S, on considère les points distincts $(i, i+2)$ et $(j, j+2)$, où i et j sont des entiers tels que $i \neq j$, $1 \leq i \leq 20$ et $1 \leq j \leq 20$.
Il s'ensuit que chaque point milieu est de la forme $\left(\dfrac{i+j}{2}, \dfrac{i+2+j+2}{2}\right) = \left(\dfrac{i+j}{2}, \dfrac{i+j}{2} + 2\right)$.
Puisque $i \neq j$, $1 \leq i \leq 20$ et $1 \leq j \leq 20$, la valeur maximale de $i + j$ est $19 + 20 = 39$, et sa valeur minimale est $i + j$ est $1 + 2 = 3$.
De plus, toutes les valeurs entières de $i + j$ comprises entre 3 et 39, inclusivement, doivent apparaître au moins une fois. (Le lecteur pourra vérifier cette affirmation avant de poursuivre.)
Donc, le nombre total de points milieux distincts est $39 - 3 + 1 = 37$.

(c) Pour minimiser le nombre de points milieux distincts, l'idée principale consiste à choisir un ensemble de points T alignés et espacés régulièrement.
Dans cette solution, on décrit un ensemble T pour lequel le nombre de points milieux distincts est minimal, on détermine ce minimum m, puis on montre qu'il est impossible d'obtenir moins de m points milieux distincts, quel que soit le choix de l'ensemble T.

Soit T l'ensemble des points de la forme $(0, 2t)$, t étant un entier tel que $1 \leq t \leq 100$.
Cet ensemble T contient exactement 100 points d'ordonnées distinctes, comme l'exige l'énoncé.
Parmi les points de T, considérons les points $(0, 2k)$ et $(0, 2\ell)$, k et ℓ étant des entiers tels que $k \neq \ell$, $1 \leq k \leq 100$ et $1 \leq \ell \leq 100$.
Il s'ensuit que chaque point milieu est de la forme $\left(0, \dfrac{2k + 2\ell}{2}\right) = (0, k + \ell)$.
Puisque $k \neq \ell$, $1 \leq k \leq 100$ et $1 \leq \ell \leq 100$, la valeur maximale de $k+\ell$ est $99+100 = 199$, et sa valeur minimale est $k + \ell$ is $1 + 2 = 3$.
Toutes les valeurs entières de $k + \ell$ comprises entre 3 et 199, inclusivement, doivent apparaître au moins une fois ; le nombre total de points milieux distincts est donc $199-3+1 = 197$.
On a décrit un ensemble de points T pour lequel le nombre de points milieux distincts est $m = 197$.
Il reste à démontrer que, quel que soit le choix de l'ensemble T, il est impossible d'obtenir moins de 197 points milieux.

Soient les 100 ordonnées distinctes $y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \cdots < y_{98} < y_{99} < y_{100}$.
L'ordonnée du milieu des deux points d'ordonnées y_n et y_{n+1}, n étant un entier tel que $1 \leq n \leq 99$, est $\dfrac{y_n + y_{n+1}}{2}$.
L'ordonnée du milieu des deux points d'ordonnées y_n et y_{n+2}, n étant un entier tel que $1 \leq n \leq 98$, est $\dfrac{y_n + y_{n+2}}{2}$.
Puisque $y_{n+1} < y_{n+2}$, on a $\dfrac{y_n + y_{n+1}}{2} < \dfrac{y_n + y_{n+2}}{2}$ pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq 98$.
Ainsi, $\dfrac{y_1 + y_2}{2} < \dfrac{y_1 + y_3}{2} < \dfrac{y_2 + y_3}{2} < \dfrac{y_2 + y_4}{2} < \cdots < \dfrac{y_{98} + y_{100}}{2} < \dfrac{y_{99} + y_{100}}{2}$, et il y a donc au moins $m = 99 + 98 = 197$ milieux distincts.

On a décrit un ensemble de points T pour lequel le nombre de milieux distincts est $m = 197$, et on a montré que, pour tout choix possible de l'ensemble T, on a $m \geq 197$.
Par conséquent, $m = 197$.