



Le CENTRE d'ÉDUCATION  
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

## *Concours Fryer 2026*

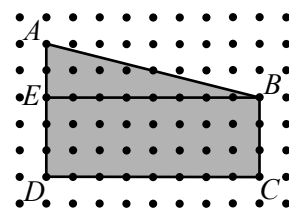
**le mercredi 1 avril 2026**  
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

**le jeudi 2 avril 2026**  
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

*Solutions*

1. (a) L'aire du rectangle avant le retrait du carré est  $8 \times 6 = 48$ .  
L'aire du carré retiré du rectangle est  $1 \times 1 = 1$ .  
L'aire de la région ombrée de la figure 1 est donc  $48 - 1 = 47$ .
- (b) Le triangle retiré a une base de 6 et une hauteur de 2, donc son aire est  $\frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$ .  
En utilisant la méthode de la question (a), l'aire de la région ombrée de la figure 2 est  $48 - 6 = 42$ .

- (c) On commence par déterminer l'aire de  $ABCD$ . On trace le segment  $BE$  perpendiculaire à  $AD$ , avec  $E$  sur  $AD$ . Ainsi, le quadrilatère  $ABCD$  est décomposé en deux parties : le triangle rectangle  $ABE$  et le rectangle  $EBCD$ , comme illustré. L'aire du triangle  $ABE$  est  $\frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 8$ . L'aire du rectangle  $EBCD$  est  $8 \times 3 = 24$ . Donc, l'aire de  $ABCD$  est  $8 + 24 = 32$ .



Par conséquent, l'aire du trapèze  $ABGH$  est  $2 \times 32 = 64$ .

Le trapèze  $ABGH$  peut être décomposé en un triangle rectangle  $ABE$  et le rectangle  $EBGH$ .

L'aire du triangle  $ABE$  est 8, ainsi l'aire du rectangle  $EBGH$  est  $64 - 8 = 56$ .

L'aire de  $EBGH$  est  $EB \times BG = 8 \times BG = 56$ , donc  $BG = \frac{56}{8} = 7$ .

2. (a) La liste  $P$  contient tous les entiers strictement positifs de 1 à  $2^{53}$ , inclusivement. Elle contient donc tous les entiers de la forme  $2^k$ ,  $k$  étant un entier compris entre 1 et 53, inclusivement.  
Il y a donc 53 nombres de cette forme dans la liste  $P$ .

- (b) Puisque  $4^\ell = (2^2)^\ell = 2^{2\ell}$ ,  $4^\ell$  appartient à la liste  $P$  si et seulement si  $2^{2\ell} \leq 2^{53}$ , c'est-à-dire si et seulement si  $2\ell \leq 53$ ,  $\ell$  étant un entier strictement positif. Le plus grand entier strictement positif  $\ell$  tel que  $2\ell \leq 53$  est 26, puisque  $2 \times 26 = 52$  et  $2 \times 27 = 54$ .  
Ainsi, pour tout entier strictement positif  $\ell \leq 26$ ,  $4^\ell$  appartient à la liste  $P$ . Il y a donc 26 tels nombres.

Le tableau suivant présente la correspondance entre les puissances de 2 et de 4.

$2^k$	$2^1$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$	$2^6$	...	$2^{51}$	$2^{52}$	$2^{53}$
$4^\ell = 2^{2\ell}$		$4^1 = 2^2$		$4^2 = 2^4$		$4^3 = 2^6$	...		$4^{26} = 2^{52}$	

- (c) À partir du résultat en (b), la liste  $P$  contient 26 nombres de la forme  $4^r = 2^{2r}$ ,  $r$  étant un entier strictement positif tel que  $r \leq 26$ .

C'est à dire, chaque puissance de 4 dans la liste  $P$  est égale à une puissance de 2 dont l'exposant est un entier pair strictement positif.

Puisque  $8^t = (2^3)^t = 2^{3t}$ , chaque puissance de 8 dans  $P$  est égale à une puissance de 2 dont l'exposant est un entier strictement positif multiple de 3.

Ainsi, tout nombre de  $P$  qui est une puissance de 4 et de 8 est égal à une puissance de 2 dont l'exposant est un entier strictement positif à la fois pair et multiple de 3, donc multiple de 6.

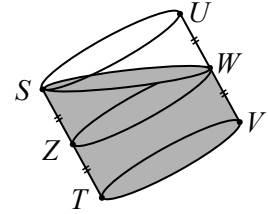
La liste  $P$  contient tous les nombres  $2^k$ ,  $k$  étant un entier strictement positif tel que  $k \leq 53$ . Donc,  $P$  contient les puissances de 2 dont l'exposant est un multiple de 6, soit  $2^6$ ,  $2^{12}$ ,  $2^{18}$ ,  $2^{24}$ ,  $2^{30}$ ,  $2^{36}$ ,  $2^{42}$  et  $2^{48}$ .

Pour  $r$  et  $t$  entiers strictement positifs, il y a 8 nombres de  $P$  qui peuvent s'écrire à la fois sous la forme  $4^r$  et sous la forme  $8^t$ . Ainsi, il y a  $26 - 8 = 18$  nombres de  $P$  qui peuvent s'écrire sous la forme  $4^r$ , mais sans pouvoir s'écrire sous la forme  $8^t$ .

Le tableau suivant présente la correspondance entre les puissances de 2, de 4 et de 8.

$4^r = 2^{2r}$	$4^1$	$4^2$	$4^3 = 2^6$	$4^4$	$4^5$	$4^6 = 2^{12}$	...	$4^{24} = 2^{48}$	$4^{25}$	$4^{26}$
$8^t = 2^{3t}$			$8^2 = 2^6$			$8^4 = 2^{12}$	...	$8^{16} = 2^{48}$		
$4^r$ et non $8^t$	$4^1$	$4^2$		$4^4$	$4^5$		...		$4^{25}$	$4^{26}$

3. (a) Dans le diagramme, soit  $Z$  le point milieu de  $ST$  et soit  $W$  le point milieu de  $UV$ . Ainsi,  $SU$ ,  $ZW$  et  $TV$  sont parallèles. La section parallèle à la base du récipient cylindrique et passant par  $Z$  et  $W$ , divise le récipient en deux parties égales. La partie inférieure de ce récipient est remplie d'eau, donc le volume d'eau dans cette partie est la moitié du volume du récipient.

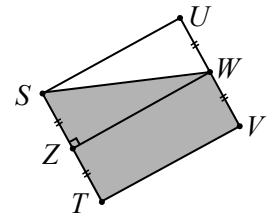


La partie supérieure du récipient est remplie à moitié d'eau, donc le volume d'eau dans cette portion est  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  du volume du récipient.

Ainsi, la fraction du volume du récipient cylindrique qui contient de l'eau est  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ .

On peut aussi visualiser la situation en considérant la section transversale en deux dimensions du récipient cylindrique qui passe par chacun des six points illustrés.

On peut alors se demander pourquoi cette représentation en deux dimensions est équivalente à la représentation en trois dimensions pour répondre à la question posée.



- (b) Soient  $UV = 1$  et  $WV = x$ . Alors  $WU = 1 - x$ , avec  $0 \leq x < 1$ .

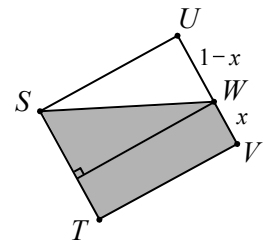
Dans le diagramme, le cylindre est sectionné de manière similaire à ce qui a été fait dans la partie (a).

La partie inférieure du récipient est remplie d'eau et la partie supérieure est remplie à moitié d'eau. Comme la fraction du volume du cylindre qui contient de l'eau est indépendante du rayon du cylindre, on peut choisir un rayon égal à 1.

Ainsi, le volume du récipient est  $\pi \times r^2 \times UV = \pi \times 1^2 \times 1 = \pi$ .

Le volume d'eau dans la partie inférieure du récipient est  $\pi \times r^2 \times WV = \pi \times 1^2 \times x = \pi x$ . Le volume d'eau dans la partie supérieure du récipient est  $\frac{1}{2} \times \pi \times r^2 \times WU = \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 \times (1 - x) = \frac{1}{2}\pi(1 - x)$ .

Donc, le volume total d'eau dans le récipient est  $\pi x + \frac{1}{2}\pi(1 - x)$ .



Par conséquent, la fraction du volume du récipient qui contient de l'eau est

$$\frac{\pi x + \frac{1}{2}\pi(1 - x)}{\pi} = x + \frac{1}{2}(1 - x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2},$$

lorsque  $0 \leq x < 1$ .

- (c) Le volume du cylindre de rayon 8 cm et de hauteur 12 cm est  $\pi \times 8^2 \times 12 = 768\pi \text{ cm}^3$ .

Donc, la fraction du volume du cylindre qui contient de l'eau est  $\frac{624\pi \text{ cm}^3}{768\pi \text{ cm}^3} = \frac{13}{16}$ .

À partir du résultat de la partie (b), lorsque  $\frac{WV}{UV} = \frac{x}{1}$ , ou, de façon équivalente,  $WV = x \times UV$ , la fraction du volume du cylindre qui contient de l'eau est  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

En égalant ces deux fractions, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} &= \frac{13}{16} \\ \frac{1}{2}x &= \frac{13}{16} - \frac{8}{16} \\ x &= \frac{5}{16} \times 2 \\ x &= \frac{5}{8}\end{aligned}$$

La hauteur du cylindre,  $UV$ , est de 12 cm, donc  $WV = \frac{5}{8} \times 12 \text{ cm} = \frac{15}{2} \text{ cm}$ .

4. (a) Soient  $x$ ,  $y$ , 20,  $z$  et 57 les cinq premiers termes de la suite.

La somme du troisième terme, 20, et du quatrième terme,  $z$ , est égale au cinquième terme, 57. Donc,  $20 + z = 57$ , soit  $z = 37$ .

De même,  $y + 20 = 37$ , donc le deuxième terme est  $y = 37 - 20 = 17$ .

Finalement,  $x = 20 - y$ , donc on obtient  $x = 20 - 17 = 3$ .

Les cinq premiers termes de cette suite sont donc 3, 17, 20, 37, 57.

- (b) Les six premiers termes de cette suite de Dunbar sont  $a$ ,  $b$ ,  $a + b$ ,  $a + 2b$ ,  $2a + 3b$  et  $3a + 5b$ . Donc, on cherche toutes les paires ordonnées d'entiers strictement positifs  $(a, b)$  telles que  $a < b$  et  $3a + 5b = 104$ .

Puisque  $5b = 104 - 3a$ ,  $104 - 3a$  doit être un multiple de 5, puisque  $5b$  est un multiple de 5.

Le plus petit entier strictement positif  $a$  tel que  $104 - 3a$  soit un multiple de 5 est  $a = 3$ .

Pour  $a = 3$ , on a  $5b = 104 - 3(3) = 95$ , donc  $b = \frac{95}{5} = 19$ .

Dans ce cas, les six premiers termes de la suite sont 3, 19, 22, 41, 63, 104.

Le deuxième plus petit entier positif  $a$  tel que  $104 - 3a$  soit un multiple de 5 est  $a = 8$ .

Pour  $a = 8$ , on a  $5b = 104 - 3(8) = 80$ , donc  $b = 16$ .

Dans ce cas, les six premiers termes de la suite sont 8, 16, 24, 40, 64, 104.

Le troisième plus petit entier positif  $a$  tel que  $104 - 3a$  soit un multiple de 5 est  $a = 13$ .

pour  $a = 13$ , on a  $5b = 104 - 3(13) = 65$ , donc  $b = 13$ .

Cependant,  $(a, b) = (13, 13)$  ne satisfait pas la condition  $a < b$ , et pour toutes les valeurs de  $a$  supérieures à 13, on a  $a > b$ .

Ainsi, il existe exactement deux paires ordonnées  $(a, b)$  qui satisfont les conditions données.

Ce sont  $(3, 19)$  et  $(8, 16)$ .

- (c) *Solution 1*

Les huit premiers termes de cette suite de Dunbar sont  $c$ ,  $d$ ,  $c + d$ ,  $c + 2d$ ,  $2c + 3d$ ,  $3c + 5d$ ,  $5c + 8d$  et  $8c + 13d$ .

Donc, on cherche toutes les paires ordonnées d'entiers strictement positifs  $(c, d)$  telles que  $c < d$  et  $(5c + 8d)(8c + 13d) = 41\,440$ .

Soient  $R$ ,  $S$  et  $T$  les sixième, septième et huitième termes de la suite, respectivement.

Ainsi,  $R < S < T$  et  $S \times T = 41\,440$ .

Puisque  $S < T$  et que  $S \times T = 41\,440$ , on a  $S^2 < 41\,440$ . Donc,  $S < \sqrt{41\,440}$ , soit  $S \leq 203$  puisque  $S$  est un entier strictement positif.

De plus, puisque  $R < S$  et que  $T = S + R$ , on a  $T < 2S$ .

Ainsi,  $41\,440 = S \times T < S \times (2S) = 2S^2$ . Donc  $41\,440 < 2S^2$  ou encore  $\sqrt{\frac{41\,440}{2}} < S$ , soit  $144 \leq S$ .

En résumé, on a  $S \times T = 41\,440$ , où  $144 \leq S \leq 203$ .

Puisque  $S$  et  $T$  sont des entiers strictement positifs,  $(S, T)$  est une paire de facteurs de  $41\,440 = 2^5 \times 5 \times 7 \times 37$ .

Si  $S$  est un facteur de  $2^5 \times 5 \times 7 \times 37$  et que  $144 \leq S \leq 203$ , alors les valeurs possibles de  $S$  sont  $2^2 \times 37 = 148$ ,  $2^5 \times 5 = 160$  et  $5 \times 37 = 185$ . Ainsi, les paires de facteurs  $(S, T)$  sont  $(148, 280)$ ,  $(160, 259)$  et  $(185, 224)$ .

Si le septième terme est  $S = 148$  et le huitième terme est  $T = 280$ , alors le sixième terme est  $280 - 148 = 132$ , le cinquième terme est  $148 - 132 = 16$ , le quatrième terme est  $132 - 16 = 116$  et le troisième terme est  $16 - 116 = -100$ .

Puisque chaque terme doit être un entier positif,  $(S, T) \neq (148, 280)$ .

Pour chacune des deux paires de facteurs restantes  $(S, T)$  on remonte la suite de la même façon afin de déterminer  $(c, d)$ , les deux premiers termes de la suite.

Les résultats sont résumés dans le tableau suivant.

Term number :	8	7	6	5	4	3	2	1
$(S, T) = (148, 280)$	280	148	132	16	116	-100		
$(S, T) = (160, 259)$	259	160	99	61	38	23	15	8
$(S, T) = (185, 224)$	224	185	39	147	-108			

Ainsi,  $(c, d) = (8, 15)$  est la seule paire pour laquelle le produit du septième terme et du huitième terme est égal à  $41\,440$ .

### *Solution 2*

On commence comme dans la solution 1 en posant le septième terme  $S = 5c + 8d$  et le huitième terme  $T = 8c + 13d$ , donc  $S \times T = 41\,440$ .

Ensuite, on remonte la suite afin de déterminer le premier terme  $c$  et le deuxième terme  $d$  en fonction de  $S$  et  $T$ .

Comme le huitième terme est  $T$  et le septième terme est  $S$ , le sixième terme est  $T - S$ .

Ainsi, cinquième terme est  $S - (T - S) = 2S - T$ , le quatrième terme est  $(T - S) - (2S - T) = 2T - 3S$  et le troisième terme est  $(2S - T) - (2T - 3S) = 5S - 3T$ .

Finalement, le deuxième terme est  $(2T - 3S) - (5S - 3T) = 5T - 8S = d$ , et le premier terme est  $(5S - 3T) - (5T - 8S) = 13S - 8T = c$ .

Comme  $c > 0$ , il s'ensuit que  $13S - 8T > 0$ , donc  $13S > 8T$ .

Puisque  $S \times T = 41\,440$ , on a  $T = \frac{41\,440}{S}$ . En remplaçant, on obtient  $13S > 8 \times \frac{41\,440}{S}$ .

Comme  $S$  est un entier strictement positif, en simplifiant, on obtient  $S^2 > \frac{8 \times 41\,440}{13}$ , donc  $S \geq 160$ .

Comme  $c < d$ , il s'ensuit que  $13S - 8T < 5T - 8S$ , donc  $21S < 13T$ .

En remplaçant  $T = \frac{41\,440}{S}$ , on obtient  $21S < 13 \times \frac{41\,440}{S}$ .

Comme  $S$  est un entier strictement positif, en simplifiant, on obtient  $S^2 < \frac{13 \times 41\,440}{21}$ , donc  $S \leq 160$ .

Ainsi,  $S = 160$  et  $T = \frac{41\,440}{160} = 259$ .

En remplaçant les valeurs de  $S$  et  $T$ , le premier terme est  $c = 13S - 8T = 13(160) - 8(259) = 8$ , et le deuxième terme est  $d = 5T - 8S = 5(259) - 8(160) = 15$ .

On peut vérifier que les huit premiers termes de la suite sont 8, 15, 23, 38, 61, 99, 160, 259, et que  $160 \times 259 = 41\,440$ .