



Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2026

le mardi 31 mars 2026
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 1 avril 2026
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) En multipliant les deux membres de l'équation par $2 \cdot 3 = 6$, on obtient $6 \cdot \frac{2t}{3} + 6 \cdot \frac{3t}{2} = 6 \cdot 26$,
ou $4t + 9t = 156$.
En simplifiant, on obtient $13t = 156$, donc $t = 12$.
- On peut aussi utiliser un dénominateur commun de $2 \cdot 3 = 6$ pour obtenir $\frac{2 \cdot 2t}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 3t}{3 \cdot 2} = 26$,
ou $\frac{4t}{6} + \frac{9t}{6} = 26$.
En simplifiant, on obtient $\frac{13t}{6} = 26$, donc $13t = 6 \cdot 26$, ou $t = 6 \cdot 2 = 12$.
- (b) En multipliant les deux membres de l'équation par 8, on obtient $\frac{8(3+x)}{4} = 6+x$, ce qui
se simplifie en $2(3+x) = 6+x$.
En simplifiant davantage, on obtient $6+2x = 6+x$, donc $x = 0$.
- On peut aussi décomposer chaque fraction en deux parties pour obtenir $\frac{3}{4} + \frac{x}{4} = \frac{6}{8} + \frac{x}{8}$.
Comme $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, on obtient $\frac{x}{4} = \frac{x}{8}$, donc $8x = 4x$, ou $x = 0$.
- (c) Comme $y > 0$, alors $\sqrt{y^2} = y$.
À partir de l'équation donnée, on obtient $\sqrt{9+16+144} = \sqrt{9+16} + y$.
Ainsi, $\sqrt{169} = \sqrt{25} + y$, ou $13 = 5 + y$, donc $y = 8$.
2. (a) On cherche les entiers entre 2026 et 2100 dont la somme des chiffres est 10.
De tels entiers ont la forme $20xy$ pour des chiffres x et y .
Comme la somme des chiffres est 10, alors $2+0+x+y = 10$, ou $x+y = 8$.
Pour que $20xy$ soit supérieur à 2026, on a besoin que $x \geq 2$.
Si $x = 2$, alors $y = 6$, ce qui donne l'entier 2026.
Pour trouver le prochain entier, on essaie $x = 3$, ce qui donne $y = 5$. Cela nous donne
l'entier 2035, qui est le plus petit entier $n > 2026$ ayant la propriété voulue.
- (b) On considère les entiers positifs à trois chiffres abc dont le produit des chiffres est égal à
9 (c'est-à-dire $a \cdot b \cdot c = 9$).
Comme $9 = 3^2$, alors a, b et c valent soit 1, 1, 9 dans un certain ordre, soit 1, 3, 3 dans un
certain ordre (il n'y a pas d'autres facteurs possibles).
Les entiers possibles sont 119, 191, 911, 133, 313, 331 ; il y a 6 tels entiers.
- (c) Comme la somme de $x, 3x$ et $4y$ est égale à 48, alors $x+3x+4y = 48$, donc $4x+4y = 48$,
ou $x+y = 12$.
Comme la moyenne de x et y est égale à $3x$, alors $\frac{x+y}{2} = 3x$, donc $x+y = 6x$, ou $y = 5x$.
En substituant $y = 5x$ dans $x+y = 12$, on obtient $x+5x = 12$, ou $6x = 12$, donc $x = 2$.
Comme $y = 5x$, alors $y = 10$, donc $(x,y) = (2,10)$.

3. (a) En utilisant la décomposition en facteurs premiers de chacun des facteurs du numérateur, on voit que

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

Pour trouver le plus petit entier positif n pour lequel $\frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7}{n}$ est un cube parfait, on cherche le plus petit ensemble de diviseurs premiers qu'on peut retirer (c'est-à-dire, diviser) du numérateur, de sorte que le nombre de fois que chaque facteur premier restant apparaît est un multiple de trois. C'est parce qu'un cube parfait est caractérisé par le fait que chacun de ses facteurs premiers apparaît en groupes de 3.

Pour ce faire, on doit retirer au moins 1 facteur de 3, au moins 1 facteur de 5, et au moins 1 facteur de 7. Cela signifie que $n \geq 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Si $n = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, alors

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{n} = 2^6 \cdot 3^3 = (2^2 \cdot 3)^3$$

Comme $n \geq 105$ et $n = 105$ donne un cube parfait, le plus petit n possible est $n = 105$.

- (b) Comme $3^{a+b} = 27$ et $3^3 = 27$, alors $a + b = 3$.

En additionnant $a + b = 3$ à l'équation $a - b = -5$, on obtient $2a = -2$, donc $a = -1$.

Comme $b = 3 - a$, alors $b = 4$, donc $(a, b) = (-1, 4)$.

- (c) Comme $P(10, 0)$ est sur la parabole d'équation $y = -x^2 + 7x + c$, alors $0 = -100 + 70 + c$, donc $c = 30$.

Ainsi, la parabole a pour équation $y = -x^2 + 7x + 30$, qu'on peut factoriser pour obtenir $y = -(x - 10)(x + 3)$.

Comme Q est l'autre abscisse à l'origine de la parabole, Q a pour coordonnées $(-3, 0)$.

Comme R est le point où la parabole coupe l'axe des ordonnées, on pose $x = 0$ et on obtient $y = 30$.

Ainsi, on veut trouver l'aire du triangle dont les sommets sont $P(10, 0)$, $Q(-3, 0)$ et $R(0, 30)$.

On note que PQ est horizontal et donc peut être traité comme la base du triangle. De plus, $PQ = 10 - (-3) = 13$.

Le point R est 30 unités au-dessus de PQ , donc la hauteur du triangle par rapport à la base PQ est 30.

Par conséquent, l'aire du triangle PQR est $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 30 = 195$.

4. (a) Comme la moyenne de 31 températures était -20°C , la somme de ces 31 températures était $31 \cdot (-20^\circ\text{C}) = -620^\circ\text{C}$.

Comme la moyenne de 21 de ces températures était -15°C , la somme de ces 21 températures était $21 \cdot (-15^\circ\text{C}) = -315^\circ\text{C}$.

Cela signifie que la somme des 10 autres températures était $-620^\circ\text{C} - (-315^\circ\text{C}) = -305^\circ\text{C}$,

et que la moyenne de ces 10 autres températures était $\frac{-305^\circ\text{C}}{10}$, ou $-30,5^\circ\text{C}$.

- (b) On suppose que $MH = x$ km. Cela signifie que $HG = (10 - x)$ km.

Comme McKayla court à 12 km/h sur la portion plane, le temps qu'il lui faut pour courir de M à H est de $\frac{x \text{ km}}{12 \text{ km/h}}$, ou $\frac{x}{12}$ h.

Comme McKayla court à 10 km/h en montée, le temps qu'il lui faut pour courir de H à G est de $\frac{(10 - x) \text{ km}}{10 \text{ km/h}}$, ou $\frac{10 - x}{10}$ h.

Comme il lui faut 54 minutes pour courir de M à H puis à G , et que 54 minutes correspondent à $\frac{9}{10}$ h, alors $\frac{x}{12} + \frac{10-x}{10} = \frac{9}{10}$.

En multipliant les deux membres de cette équation par 120, on obtient $10x + 12(10-x) = 9 \cdot 12$, donc $2x = 12$, ou $x = 6$.

Par conséquent, pour courir de G à H puis à M , il faut à McKayla

$$\frac{4 \text{ km}}{15 \text{ km/h}} + \frac{6 \text{ km}}{12 \text{ km/h}} = \frac{16}{60} \text{ h} + \frac{30}{60} \text{ h} = \frac{46}{60} \text{ h}$$

soit 46 minutes.

5. (a) Supposons que n faces du dé D_2 contiennent un 1 et que $6-n$ faces contiennent un 2. On dresse un tableau pour énumérer les sommes possibles quand les deux dés sont lancés. Le nombre obtenu sur D_1 est indiqué dans la colonne de gauche, et celui obtenu sur D_2 est indiqué dans la rangée du haut. À l'intérieur du tableau, on indique la somme et le nombre de fois qu'elle peut se produire.

	1 (n fois)	2 ($6-n$ fois)
1	2 (n fois)	3 ($6-n$ fois)
2	3 (n fois)	4 ($6-n$ fois)
3	4 (n fois)	5 ($6-n$ fois)
4	5 (n fois)	6 ($6-n$ fois)
5	6 (n fois)	7 ($6-n$ fois)
6	7 (n fois)	8 ($6-n$ fois)

Parmi ces sommes, 2, 3, 5 et 7 sont premiers.

Ils se produisent en tout $n + (6-n) + n + (6-n) + n + (6-n) + n = 18 + n$ fois sur les $6 \times 6 = 36$ résultats possibles du lancer des deux dés.

Comme la probabilité d'obtenir une somme première est $\frac{23}{36}$, alors 23 des 36 résultats donnent une somme première, donc $18 + n = 23$, ou $n = 5$.

- (b) Comme $ABCD$ est un carré et AB est horizontal, alors CD est parallèle à AB , donc horizontal également.

Comme C et D sont sur une parabole et CD est horizontal, alors C et D sont équidistants de l'axe de symétrie.

Comme la parabole a pour équation $y = x^2 - 4$, ses abscisses à l'origine sont 2 et -2 , donc son axe de symétrie a pour équation $x = 0$.

Ainsi, on peut dire que C et D ont pour abscisses respectives s et $-s$, pour un certain $s > 0$.

Cela signifie que A a pour coordonnées $(-s, 0)$ et B a pour coordonnées $(s, 0)$.

Cela signifie que le côté du carré $ABCD$ a pour longueur $s - (-s) = 2s$.

Comme la hauteur et la largeur de $ABCD$ sont égales, alors C a pour coordonnées $(s, -2s)$ et D a pour coordonnées $(-s, -2s)$.

Comme C est sur la parabole d'équation $y = x^2 - 4$, alors $-2s = s^2 - 4$, donc $s^2 + 2s - 4 = 0$. Par la formule quadratique,

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-4)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

Comme $s > 0$, alors $s = -1 + \sqrt{5}$.

Cela signifie que l'aire du carré $ABCD$ est égale à $(2s)^2$, qui vaut $(-2 + 2\sqrt{5})^2$.
 En développant et en simplifiant, on obtient $4 + 20 - 8\sqrt{5} = 24 - 8\sqrt{5} = 24 - \sqrt{320}$.

6. (a) La corde de Xander mesure 10 m.

Comme la corde de Yasmin est n % plus longue que celle de Xander, la longueur de la corde de Yasmin est $10 \left(1 + \frac{n}{100}\right)$ m.

Comme la corde de Zhe est $(2n)$ % plus longue que celle de Yasmin, la longueur de la corde de Zhe est $10 \left(1 + \frac{n}{100}\right) \left(1 + \frac{2n}{100}\right)$ m.

Comme la corde de Zhe est $(3,14n)$ % plus longue que celle de Xander, la longueur de la corde de Zhe peut aussi s'écrire comme $10 \left(1 + \frac{3,14n}{100}\right)$ m.

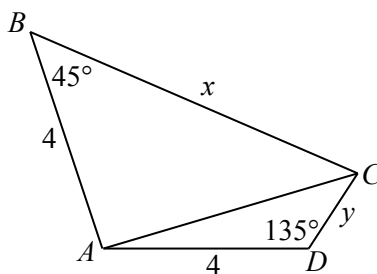
Par conséquent,

$$\begin{aligned} 10 \left(1 + \frac{n}{100}\right) \left(1 + \frac{2n}{100}\right) &= 10 \left(1 + \frac{3,14n}{100}\right) \\ \left(1 + \frac{n}{100}\right) \left(1 + \frac{2n}{100}\right) &= \left(1 + \frac{3,14n}{100}\right) \\ (100 + n)(100 + 2n) &= 100(100 + 3,14n) \quad (\text{en multipliant par } 100 \cdot 100) \\ 10000 + 300n + 2n^2 &= 10000 + 314n \\ 2n^2 - 14n &= 0 \\ 2n(n - 7) &= 0 \end{aligned}$$

Comme $n > 0$, on doit avoir $n = 7$.

(b) *Solution 1*

Soit $BC = x$ et $CD = y$. On joint A à C .



En appliquant la loi des cosinus dans le triangle ABC , on obtient

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC) \cos(\angle ABC) \\ &= 16 + x^2 - 8x \cos(45^\circ) \\ &= 16 + x^2 - 8x \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 16 + x^2 - 4\sqrt{2}x \end{aligned}$$

En appliquant la loi des cosinus dans le triangle ADC , on obtient

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + DC^2 - 2(AD)(DC) \cos(\angle ADC) \\ &= 16 + y^2 - 8y \cos(135^\circ) \\ &= 16 + y^2 - 8y \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 16 + y^2 + 4\sqrt{2}y \end{aligned}$$

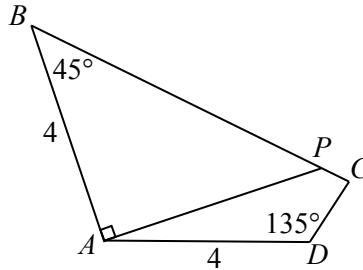
En comparant les deux expressions pour AC^2 , on obtient

$$\begin{aligned} 16 + x^2 - 4\sqrt{2}x &= 16 + y^2 + 4\sqrt{2}y \\ x^2 - y^2 - 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y &= 0 \\ (x + y)(x - y) - 4\sqrt{2}(x + y) &= 0 \\ (x + y)(x - y - 4\sqrt{2}) &= 0 \end{aligned}$$

Comme $x > 0$ et $y > 0$, alors $x + y > 0$. Ainsi, $x - y - 4\sqrt{2} = 0$, donc $BC - CD = x - y = 4\sqrt{2}$.

Solution 2

Soit P un point sur BC tel que AP est perpendiculaire à AB .



Pour voir pourquoi P est sur BC (et non sur un prolongement de BC), on observe d'abord que le triangle isocèle BAD vérifie $\angle ADB = \angle ABD < \angle ABC = 45^\circ$, donc

$$\angle BAD = 180^\circ - \angle ADB - \angle ABD > 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$$

Ainsi, $\angle BAD$ est obtus.

Pour contradiction, on suppose que P soit sur un prolongement de BC . Comme $\angle BAD$ est obtus et $\angle BAP = 90^\circ$, AP doit couper CD en un point M , donc $AM < AP$. Cependant, $AP = AB = 4$ car le triangle BAP est un triangle rectangle isocèle, ce qui signifie que dans le triangle AMD , AM n'est pas le plus long côté alors qu'il est opposé à l'angle obtus $\angle ADM$. Comme c'est impossible, P est bien sur BC .

On a mentionné ci-haut que le triangle BAP est rectangle et isocèle, avec $AP = AB = 4$, ce qui signifie que $BP = \sqrt{2}AB = 4\sqrt{2}$.

Comme $\angle BPA = 45^\circ$ et BPC est un angle plat, alors $\angle CPA = 180^\circ - \angle BPA = 135^\circ$. Ainsi, $\angle APC = \angle ADC$.

Comme $AP = AD = 4$, alors le triangle APD est isocèle, donc $\angle APD = \angle ADP$. On a alors

$$\angle CPD = \angle APC - \angle APD = \angle ADC - \angle ADP = \angle CDP$$

Comme $\angle CPD = \angle CDP$, alors le triangle CPD est isocèle, donc $CD = CP$. Ainsi, $BC - CD = BC - CP = BP = 4\sqrt{2}$.

7. (a) On dresse un tableau pour organiser les données fournies :

	Jaunes	Blanches
Roses		
Œillets		

Comme la moitié des fleurs jaunes sont des roses, on suppose qu'il y a $3n$ roses jaunes et $3n$ œillets jaunes pour un certain nombre réel n (on verra pourquoi il est utile de choisir $3n$ et $3n$ plutôt que n et n .)

Puisque $\frac{1}{4}$ des roses sont jaunes, $\frac{3}{4}$ des roses sont blanches. Cela qui signifie qu'il y a $3 \cdot 3n = 9n$ roses blanches.

On peut maintenant mettre le tableau à jour :

	Jaunes	Blanches
Roses	$3n$	$9n$
Œillets	$3n$	

Comme $\frac{1}{4}$ de toutes les fleurs sont des œillets blancs, alors $\frac{3}{4}$ des fleurs sont comptabilisées par les $3n + 9n + 3n = 15n$ fleurs déjà dénombrées.

Ainsi, il y a $\frac{1}{3} \cdot 15n = 5n$ œillets blancs (si on avait choisi n plutôt que $3n$ au départ, on obtiendrait un coefficient fractionnaire ici.)

Par conséquent, il y a $15n + 5n = 20n$ fleurs en tout, dont $3n$ sont des roses jaunes.

Cela signifie que $\frac{3}{20}$ des fleurs sont des roses jaunes.

(b) En utilisant la définition de la fonction f , qui est

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 + f(\log_2 x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

alors $f(n) = 4$ exactement quand $n > 1$ et $f(\log_2 n) = 3$ (on note que la première alternative de la définition n'est pas pertinente pour ce cas.)

En continuant d'utiliser la définition, on a ce qui suit :

- $f(\log_2 n) = 3$ exactement quand $\log_2 n > 1$ et $f(\log_2(\log_2 n)) = 2$. (On peut poser $t = \log_2 n$, de sorte que $f(t) = 3$ exactement quand $t > 1$ et $f(\log_2 t) = 2$.)
- $f(\log_2(\log_2 n)) = 2$ exactement quand $\log_2(\log_2 n) > 1$ et $f(\log_2(\log_2(\log_2 n))) = 1$.
- $f(\log_2(\log_2(\log_2 n))) = 1$ exactement quand $\log_2(\log_2(\log_2 n)) > 1$ et $f(\log_2(\log_2(\log_2(\log_2 n)))) = 0$.
- $f(\log_2(\log_2(\log_2(\log_2 n)))) = 0$ exactement quand $0 < \log_2(\log_2(\log_2(\log_2 n))) \leq 1$.

Ainsi, on sait que $f(n) = 4$ exactement quand $0 < \log_2(\log_2(\log_2(\log_2 n))) \leq 1$. Comme le logarithme est une fonction strictement croissante, $0 < \log_2(\log_2(\log_2(\log_2 n))) \leq 1$ exactement quand $2^0 < \log_2(\log_2(\log_2 n)) \leq 2^1$, ou $1 < \log_2(\log_2(\log_2 n)) \leq 2$.

En continuant d'inverser les logarithmes, on obtient :

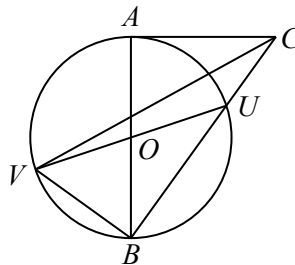
- $1 < \log_2(\log_2(\log_2 n)) \leq 2$ exactement quand $2^1 < \log_2(\log_2 n) \leq 2^2$, ou $2 < \log_2(\log_2 n) \leq 4$.
- $2 < \log_2(\log_2 n) \leq 4$ exactement quand $2^2 < \log_2 n \leq 2^4$, ou $4 < \log_2 n \leq 16$.
- $4 < \log_2 n \leq 16$ exactement quand $2^4 < n \leq 2^{16}$, ou $16 < n \leq 65536$.

Autrement dit, $f(n) = 4$ exactement quand $16 < n \leq 65536$. Comme n est un entier, $f(n) = 4$ exactement quand $17 \leq n \leq 65536$.

Il y a donc $65536 - 16 = 65520$ entiers positifs n pour lesquels $f(n) = 4$.

8. (a) *Solution 1*

Comme le cercle a un rayon de 2, alors $AO = OB = VO = OU = 2$, donc $AB = VU = 4$.



Comme AC est tangente au cercle en A , alors $\angle CAB = 90^\circ$.

Comme UV est un diamètre du cercle, alors $\angle UBV = 90^\circ$.

Comme $BU = 2UC$, on pose $UC = t$ et $BV = 2t$ pour un certain $t > 0$; ainsi, $BC = 3t$.

Par le théorème tangente-sécante, $CA^2 = CU \cdot CB = t \cdot 3t = 3t^2$.

Par le théorème de Pythagore dans le triangle ABC , $BC^2 = AB^2 + AC^2$, ou $(3t)^2 = 4^2 + 3t^2$, ce qui donne $6t^2 = 16$, ou $t = \sqrt{\frac{8}{3}}$ car $t > 0$.

Dans le triangle CUV , on considère $CU = t = \sqrt{\frac{8}{3}}$ comme base et VB comme hauteur (on note que VB est perpendiculaire au prolongement de la base.)

Par le théorème de Pythagore dans le triangle VBU , on a

$$VB = \sqrt{VU^2 - BU^2} = \sqrt{4^2 - (2t)^2} = \sqrt{16 - 4t^2} = \sqrt{16 - 4 \cdot \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}}$$

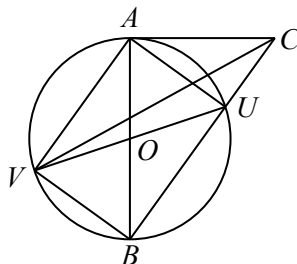
car $VB > 0$.

Finalement, l'aire du triangle CUV est égale à $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{128}{9}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Solution 2

On joint A à U , A à V , et B à V .

Comme AB est un diamètre du cercle, alors $\angle AUB = \angle AVB = 90^\circ$. De même, comme UV est un diamètre, alors $\angle VBU = 90^\circ$.



Comme le quadrilatère $AVBU$ a quatre angles droits, c'est un rectangle.

On considère le triangle CUV avec la base CU et la hauteur extérieure VB (on note que BV est perpendiculaire au prolongement de CU car $AVBU$ est un rectangle.)

Comme $AVBU$ est un rectangle, $BV = AU$, donc l'aire du triangle CUV est égale à $\frac{1}{2} \cdot UC \cdot AU$.

Soit $UC = t$. Ainsi, $BV = 2UC = 2t$ et $BC = BU + UC = 3t$.

Comme BA est un diamètre du cercle et AC est tangente au cercle, alors $\angle BAC = 90^\circ$.

On considère les trois triangles BUA , BAC et AUC .

Ces triangles sont rectangles en U , A et U , respectivement. Comme les triangles BUA et BAC partagent un angle commun en B , ils sont semblables. Cela signifie que $\frac{AB}{BU} = \frac{BC}{AB}$.

Comme les triangles BAC et AUC partagent un angle commun en C , ils sont semblables.

Cela implique à son tour que le triangle BUA est semblable au triangle AUC ,

$$\text{donc } \frac{UC}{AU} = \frac{AU}{BU}.$$

Comme le rayon du cercle est 2, le diamètre est 4, donc $AB = 4$.

Comme $\frac{AB}{BU} = \frac{BC}{AB}$, alors $\frac{4}{2t} = \frac{3t}{4}$, donc $6t^2 = 16$, ou $t^2 = \frac{8}{3}$.

Comme $t > 0$, on obtient $t = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

Comme $\frac{UC}{AU} = \frac{AU}{BU}$, alors $\frac{t}{AU} = \frac{AU}{2t}$, donc $AU^2 = 2t^2 = \frac{16}{3}$.

Comme $AU > 0$, alors $AU = \sqrt{\frac{16}{3}}$.

Par conséquent, l'aire du triangle CUV est

$$\frac{1}{2} \cdot UC \cdot AU = \frac{1}{2} \cdot t \cdot AU = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{\sqrt{128}}{2 \cdot 3} = \frac{8\sqrt{2}}{2 \cdot 6} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Solution 3

Soit $UC = t$, donc $BU = 2UC = 2t$ et $BC = BU + UC = 3t$.

Comme le rayon du cercle est 2, alors $OB = OU = 2$.

Supposons que $\angle OBU = \theta$.

Comme le triangle OBU est isocèle avec $OB = OU$, alors $\angle OUB = \angle OBU = \theta$ et $\angle BOU = 180^\circ - 2\theta$.

En appliquant la loi des sinus dans le triangle OBU , on obtient $\frac{\sin(\angle OUB)}{OU} = \frac{\sin(\angle BOU)}{BU}$.

Ainsi, $\frac{\sin \theta}{2} = \frac{\sin(180^\circ - 2\theta)}{2t}$, ce qui donne $t \sin \theta = \sin(180^\circ - 2\theta)$.

On note que $\sin(180^\circ - 2\theta) = \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$.

Ainsi, $t \sin \theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, ou $t = 2 \cos \theta$ car $0^\circ < \theta < 180^\circ$, ce qui signifie que $\sin \theta \neq 0$.

Ensuite, AB est un diamètre du cercle et AC est une tangente au cercle, ce qui signifie que $\angle BAC = 90^\circ$.

Par conséquent, le triangle BAC donne $\cos \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3t}$.

En substituant, on obtient $t = \frac{8}{3t}$, donc $t^2 = \frac{8}{3}$.

On peut maintenant procéder comme dans la Solution 1 ou la Solution 2 pour calculer l'aire du triangle CUV .

(b) Soit k un entier positif.

Supposons que l'un de ces triangles a des côtés de longueurs a , k et c .

Puisque le périmètre doit être $3k$, alors $a + k + c = 3k$, ou $a + c = 2k$.

Supposons que $a = k - t$ pour un certain entier $t \geq 0$; ainsi, $c = 2k - a = k + t$ (l'un ou l'autre de a ou c est au plus k , donc on peut supposer que $a \leq k$.)

Par conséquent, les longueurs des côtés sont $k - t$, k et $k + t$ pour un certain entier $t \geq 0$.

On note que $k - t \leq k \leq k + t$.

Pour que ce soient les longueurs des côtés d'un triangle, l'inégalité triangulaire doit être satisfaite.

Comme on connaît déjà les tailles relatives des côtés, l'existence d'un triangle ayant ces longueurs de côtés est équivalente à trouver des entiers $k > 0$ et $t \geq 0$ satisfaisant l'inégalité $k + t < (k - t) + k$, qui se simplifie en $2t < k$, ou $t < \frac{1}{2}k$.

Ensuite, le triangle doit être obtus.

Or, un triangle ABC avec $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$, $a \leq b \leq c$, est obtus exactement quand $a^2 + b^2 < c^2$:

On peut voir cela en notant que l'angle de plus grande mesure est opposé au côté le plus long c , donc l'angle de plus grande mesure est $\angle ACB$.

En appliquant la loi des cosinus, on note que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\angle ACB)$$

Comme $a > 0$ et $b > 0$, alors $\cos(\angle ACB) < 0$ (c'est-à-dire $\angle ACB$ est obtus) exactement quand $-2ab \cos(\angle ACB) > 0$, ce qui arrive exactement quand $c^2 > a^2 + b^2$.

En utilisant ce résultat, le triangle de côtés $k - t$, k , $k + t$ est obtus exactement quand $(k - t)^2 + k^2 < (k + t)^2$.

En développant et simplifiant, on trouve que cette inégalité est vraie exactement quand

$$k^2 - 2kt + t^2 + k^2 < k^2 + 2kt + t^2$$

ou $k^2 < 4kt$, ou $t > \frac{1}{4}k$ (car $k > 0$).

Ainsi, pour un entier positif (fixé) k , les conditions sur le triangle sont équivalentes à ce que l'entier t satisfasse l'inégalité $\frac{1}{4}k < t < \frac{1}{2}k$.

Cela signifie qu'on doit trouver tous les entiers positifs k pour lesquels il y a exactement 100 entiers t avec $\frac{1}{4}k < t < \frac{1}{2}k$.

Pour ce faire, on note que tout entier positif k peut s'écrire sous la forme $k = 4q$, $k = 4q+1$, $k = 4q+2$ ou $k = 4q+3$ pour un certain entier non négatif q .

Si $k = 4q$, l'inégalité devient $q < t < 2q$.

Comme q est un entier non négatif, on peut réécrire cette inégalité comme $q+1 \leq t \leq 2q-1$.

Il y a $(2q-1) - (q+1) + 1 = q-1$ entiers dans cet intervalle.

Pour qu'il y ait 100 entiers dans cet intervalle, $q = 101$, donc $k = 404$.

Si $k = 4q+1$, l'inégalité devient $q + \frac{1}{4} < t < 2q + \frac{1}{2}$.

Comme q est un entier non négatif, on peut réécrire cette inégalité comme $q+1 \leq t \leq 2q$.

Il y a $2q - (q+1) + 1 = q$ entiers dans cet intervalle.

Pour qu'il y ait 100 entiers dans cet intervalle, $q = 100$, donc $k = 401$.

Si $k = 4q+2$, l'inégalité devient $q + \frac{1}{2} < t < 2q + 1$.

Comme q est un entier non négatif, on peut réécrire cette inégalité comme $q+1 \leq t \leq 2q$.

Il y a $2q - (q+1) + 1 = q$ entiers dans cet intervalle.

Pour qu'il y ait 100 entiers dans cet intervalle, $q = 100$, donc $k = 402$.

Si $k = 4q+3$, l'inégalité devient $q + \frac{3}{4} < t < 2q + \frac{3}{2}$.

Comme q est un entier non négatif, on peut réécrire cette inégalité comme $q+1 \leq t \leq 2q+1$.

Il y a $2q+1 - (q+1) + 1 = q+1$ entiers dans cet intervalle.

Pour qu'il y ait 100 entiers dans cet intervalle, $q = 99$, donc $k = 399$.

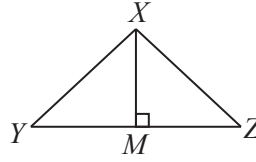
Par conséquent, les entiers positifs k satisfaisant les conditions sont $k = 399, 401, 402, 404$.

9. (a) Supposons que $XY = XZ = a$.

Cela signifie que le triangle a des côtés de longueurs a, a, b .

Comme le périmètre du triangle est 32, alors $a + a + b = 32$, donc $2a = 32 - b$, ou $a = 16 - \frac{1}{2}b$.

Soit M le milieu de YZ ; ainsi, $YM = MZ = \frac{1}{2}b$.



Comme M est le milieu de YZ et que le triangle XYZ est isocèle, le segment XM est perpendiculaire à YZ .

Par le théorème de Pythagore,

$$XM = \sqrt{XY^2 - YM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2}$$

car $XM > 0$.

Comme l'aire du triangle XYZ est 40, alors $\frac{1}{2} \cdot YZ \cdot XM = 40$.

En combinant toutes ces informations, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot YZ \cdot XM &= 40 \\ b\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2} &= 80 \\ b^2 \left(\left(16 - \frac{1}{2}b\right)^2 - \frac{1}{4}b^2 \right) &= 80^2 \\ b^2 \left(256 - 16b + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}b^2 \right) &= 6400 \\ b^2(256 - 16b) &= 6400 \\ b^2(16 - b) &= 400 \\ 0 &= b^3 - 16b^2 + 400 \end{aligned}$$

Par conséquent, si on pose $f(x) = x^3 - 16x^2 + 400$, alors le polynôme f a les propriétés requises.

- (b) Supposons que le triangle XYZ vérifie $XY = XZ = a$, $YZ = b$, a pour périmètre P et pour aire A .

En généralisant le travail fait en (a), on obtient $2a + b = P$, ou $a = \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}b$, et aussi

$$\frac{1}{2}b\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2} = A.$$

En utilisant ces équations, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} b\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2} &= 2A \\ b^2 \left(\left(\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}b\right)^2 - \frac{1}{4}b^2 \right) &= 4A^2 \\ b^2 \left(\frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}Pb + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}b^2 \right) &= 4A^2 \\ b^2 \left(\frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}Pb \right) &= 4A^2 \\ b^2(P^2 - 2Pb) &= 16A^2 \\ 0 &= 2Pb^3 - P^2b^2 + 16A^2 \\ 0 &= b^3 - \frac{P}{2}b^2 + \frac{8A^2}{P} \end{aligned}$$

Par conséquent, b est une racine du polynôme $f(x) = x^3 - \frac{P}{2}x^2 + \frac{8A^2}{P}$.

Rien de spécial ne concerne “ b ” dans le travail ci-dessus, donc toute racine réelle strictement positive de ce polynôme cubique sera la longueur de YZ dans un triangle isocèle XYZ avec $XY = XZ$, d’aire A et de périmètre P .

Or, le polynôme cubique $f(x) = x^3 - \frac{P}{2}x^2 + \frac{8A^2}{P}$ a pour terme constant $\frac{8A^2}{P}$, qui est strictement positif.

Cela signifie que le produit des racines du polynôme cubique $f(x)$ est $-\frac{8A^2}{P}$, qui est négatif. Cela signifie que f ne peut pas avoir 3 racines qui soient toutes des réels strictement positifs, car leur produit serait positif.

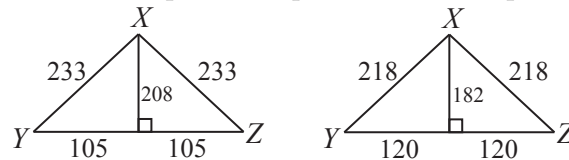
Ainsi, f a au plus 2 racines réelles strictement positives, ce qui signifie qu’il existe au plus 2 triangles isocèles non congruents d’aire A et de périmètre P .

- (c) Une paire d’entiers positifs A et P ayant cette propriété est $A = 21840$ et $P = 676$.

Les triangles ci-dessous sont non congruents, isocèles et ont des longueurs de côtés inférieures à 300.

Ils ont tous deux un périmètre de $P = 676$. De plus, ils ont tous deux une aire $A = 21840$ car $\frac{1}{2} \cdot 210 \cdot 208 = 21840$ et $\frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 182 = 21840$.

On note enfin que 210 est divisible par 7 et que 240 ne l’est pas.



Comment peut-on trouver ces entiers A et P de façon systématique ?

D’après (b), on veut trouver A et P pour lesquels le polynôme cubique

$$f(x) = x^3 - \frac{P}{2}x^2 + \frac{8A^2}{P}$$

a deux racines entières strictement positives et distinctes.

Supposons que le polynôme $f(x) = x^3 - \frac{P}{2}x^2 + \frac{8A^2}{P}$ a pour racines a , b et c , et que a et b sont des entiers strictement positifs.

En utilisant le lien entre les sommes et les produits des racines d’un polynôme cubique et ses coefficients, les trois équations suivantes sont vérifiées :

$$a + b + c = \frac{P}{2} \quad ab + bc + ac = 0 \quad abc = -\frac{8A^2}{P}$$

De la deuxième équation on tire que $ab + c(a + b) = 0$, ce qui donne $c = -\frac{ab}{a + b}$ (comme $a > 0$ et $b > 0$, alors $a + b > 0$.)

De la première équation, $a + b + c = a + b - \frac{ab}{a + b} = \frac{P}{2}$, donc

$$P = 2a + 2b - \frac{2ab}{a + b} = \frac{2a^2 + 4ab + 2b^2 - 2ab}{a + b} = \frac{2a^2 + 2ab + 2b^2}{a + b}$$

De la troisième équation,

$$8A^2 = -Pabc = -\left(\frac{2a^2 + 2ab + 2b^2}{a + b}\right) \cdot ab \cdot \left(-\frac{ab}{a + b}\right) = \frac{a^2b^2(2a^2 + 2ab + 2b^2)}{(a + b)^2}$$

et donc

$$A = \frac{ab\sqrt{a^2 + ab + b^2}}{2(a + b)}$$

Comme a et b sont des entiers strictement positifs, il faut au moins que $\sqrt{a^2 + ab + b^2}$ soit un entier, sinon A serait irrationnel (cela ne garantit pas que A soit un entier, mais c'est un bon point de départ.)

D'après les conditions de (c), on veut que l'un de a et b soit divisible par 7 (on rappelle que a et b sont des racines du polynôme $f(x)$, dont les racines sont les longueurs possibles de YZ .)

On commence par essayer $a = 7$ et on cherche un autre entier b pour lequel $a^2 + ab + b^2$ est un carré parfait.

Après quelques essais, on trouve que pour $a = 7$ et $b = 8$, on a

$$a^2 + ab + b^2 = 49 + 56 + 64 = 169 = 13^2$$

Pour $a = 7$ et $b = 8$, on a

$$P = \frac{2a^2 + 2ab + 2b^2}{a + b} = \frac{338}{15} \quad A = \frac{ab\sqrt{a^2 + ab + b^2}}{2(a + b)} = \frac{56 \cdot 13}{2 \cdot 15} = \frac{364}{15}$$

Ici, P et A ne sont pas des entiers.

Si on prend $a = 7$ et $b = 8$ et qu'on multiplie les longueurs des côtés des triangles correspondants par un facteur de 15, le périmètre est multiplié par 15 et l'aire du triangle est multipliée par $15^2 = 225$.

Ainsi, on aurait $a = 105$ et $b = 120$ et

$$P = \frac{338}{15} \cdot 15 = 338 \quad A = \frac{364}{15} \cdot 15^2 = 5460$$

Bien que cela semble fonctionner, si les deux autres côtés égaux du triangle isocèle avec $a = 105$ valent x , on obtient $105 + 2x = 338$, ce qui donne $x = 116,5$, qui n'est pas un entier.

Pour résoudre ce problème, on multiplie les longueurs des côtés des triangles par un facteur supplémentaire de 2 pour obtenir $a = 210$ et $b = 240$ et

$$P = 338 \cdot 2 = 676 \quad A = 5460 \cdot 4 = 21840$$

On obtient ainsi des triangles de côtés 210, 233, 233 et 240, 218, 218. Ces triangles ont des longueurs de côtés entières strictement positives inférieures à 300, des périmètres égaux de 676, et exactement l'un des côtés non égaux est divisible par 7.

On note que $\sqrt{233^2 - 105^2} = 208$ et $\sqrt{218^2 - 120^2} = 182$, ce qui donne les hauteurs des triangles vues dans les diagrammes ci-dessus et confirme que leurs aires sont égales à 21840.

Comme vérification finale, on note que $\frac{P}{2} = 338$ et que $\frac{8A^2}{P} = 5644800$ et que

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 338x^2 + 5644800 \\ &= (x - 210)(x^2 - 128x - 26880) \\ &= (x - 210)(x - 240)(x + 112) \end{aligned}$$

donc le polynôme $f(x)$ a bien les bonnes racines.

10. (a) On suppose que l'arrangement a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 de $1, 2, 3, 4, 5$ a un sommet intérieur en position 3 et n'en a aucun autre.

Comme $a_3 > a_2$ et $a_3 > a_4$, alors $a_3 \geq 3$, ce qui signifie que $a_3 = 3, a_3 = 4$ ou $a_3 = 5$.

Cas 1 : $a_3 = 3$

Ni a_2 ni a_4 ne peuvent être égaux à 4 ou 5.

Par conséquent, a_1 et a_5 sont égaux à 4 et 5 dans un certain ordre.

Cela signifie que a_2 et a_4 sont égaux à 1 et 2 dans un certain ordre.

Chacun de ces 4 arrangements possibles a un sommet intérieur en position 3 et en aucune autre position :

$$4, 1, 3, 2, 5 \quad 4, 2, 3, 1, 5 \quad 5, 1, 3, 2, 4 \quad 5, 2, 3, 1, 4$$

Il y a 4 arrangements dans ce cas.

Cas 2 : $a_3 = 4$

Ni a_2 ni a_4 ne peuvent être égaux à 5.

Par conséquent, soit $a_1 = 5$, soit $a_5 = 5$.

Les 3 entrées restantes peuvent être 1, 2, 3 dans l'un des 6 arrangements possibles.

Les 6 arrangements suivants illustrent cela pour $a_1 = 5$:

$$5, 1, 4, 2, 3 \quad 5, 1, 4, 3, 2 \quad 5, 2, 4, 1, 3 \quad 5, 2, 4, 3, 1 \quad 5, 3, 4, 1, 2 \quad 5, 3, 4, 2, 1$$

On peut inverser ces 6 arrangements pour obtenir les arrangements avec $a_5 = 5$.

Il y a 12 arrangements dans ce cas.

Cas 3 : $a_3 = 5$

Les entrées a_1 et a_2 seront toutes les deux inférieures à 5, car 5 est le plus grand nombre de la liste. De plus, que $a_1 < a_2 < 5$ ou $a_1 > a_2$ et $a_2 < 5$, il n'y a pas de sommet intérieur en position 2 (il ne peut pas y avoir de sommet intérieur en position 1.)

Cela signifie que 2 des 4 nombres restants peuvent occuper les positions a_1 et a_2 dans n'importe quel ordre. La même chose vaut pour a_4 et a_5 .

Par conséquent, il y a 4 entrées possibles pour a_1 , puis 3 entrées possibles pour a_2 , puis 2 entrées possibles pour a_4 , puis 1 entrée possible pour a_5 .

Cela signifie qu'il y a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ arrangements possibles dans ce cas.

En tout, il y a $4 + 12 + 24 = 40$ tels arrangements.

- (b) Supposons que $n \geq 5$ et que l'arrangement $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ de $1, 2, \dots, n-1, n$ a un sommet intérieur en position 2 et n'en a aucun autre.

Comme $a_2 > a_1$ et $a_2 > a_3$, alors $a_2 \geq 3$, ce qui signifie que $3 \leq a_2 \leq n$.

Comme la partie de l'arrangement de a_2 à a_n n'a pas de sommet intérieur et que $a_2 > a_3$, les termes de a_2 à a_n sont soit strictement décroissants, soit strictement décroissants puis strictement croissants. En particulier, leur direction (décroissante ou croissante) ne peut pas changer de nouveau de croissante à décroissante (c'est-à-dire que la direction change au plus une fois).

En particulier, cela signifie que les termes de la suite qui sont supérieurs à a_2 doivent se trouver à l'extrémité droite de la suite, et y être listés en ordre croissant. En effet, les termes supérieurs à a_2 ne peuvent pas se trouver en a_1 ni dans le segment décroissant commençant en a_2 ; donc, puisqu'ils forment un segment croissant, ils doivent se trouver à la fin et en ordre croissant.

On considère le cas $a_2 = n$.

Il y a $n - 1$ possibilités pour a_1 (car toute valeur restante est inférieure à n) et les $n - 2$

nombre restants sont placés aux positions a_3 à a_n .

Supposons que $a_1 = n - 1$ et que les nombres $1, 2, \dots, n - 3, n - 2$ sont placés aux positions a_3 à a_n .

Si a_1 était un autre nombre inférieur à $n - 1$, l'argument qui suit pourrait être adapté en ré-étiquetant les nombres placés aux positions a_3 à a_n comme $1, 2, \dots, n - 3, n - 2$ en ordre croissant. Seule leur valeur relative importe ici, et non leur relation avec la valeur de a_1 .

Comme $a_2 = n$ et que les termes de a_3 à a_n sont strictement décroissants, ou strictement décroissants puis strictement croissants, le plus grand nombre restant doit être à l'une des deux extrémités (soit a_3 , soit a_n). Ainsi, soit $a_3 = n - 2$, soit $a_n = n - 2$. Autrement dit, il y a 2 positions possibles pour $n - 2$.

Une fois $n - 2$ placé, il y a 2 positions possibles pour $n - 3$: soit à l'extrémité gauche, soit à l'extrémité droite du bloc restant de $n - 3$ termes. Si $n - 3$ se trouvait au milieu de ce bloc, il aurait deux voisins plus petits que lui, ce qui donnerait un sommet intérieur.

On continue à placer $n - 4$ jusqu'à 2 en ordre décroissant. Chacun de ces $n - 5$ nombres a 2 positions possibles. Il reste ensuite une position possible pour 1, le seul terme restant.

En combinant le tout, il y a $n - 1$ valeurs possibles pour a_1 , 2 positions possibles pour chacun des $n - 3$ nombres, et 1 position possible pour le dernier nombre non placé.

En tout, il y a $(n - 1) \cdot 2^{n-3}$ arrangements avec $a_2 = n$.

On considère ensuite le cas $a_2 = n - 1$.

Il y a $n - 2$ possibilités pour a_1 (chaque nombre de 1 à $n - 2$ fonctionne).

Le nombre n doit aller en position a_n , car il est supérieur à $a_2 = n - 1$ et il n'y a pas d'autre sommet intérieur.

Les $n - 3$ nombres restants doivent être les termes a_3 à a_{n-1} . Comme dans le cas $a_2 = n$, on place ces nombres un par un en commençant par le plus grand nombre restant (qui peut aller à 2 endroits), puis le suivant (2 endroits), et ainsi de suite. Il y a $n - 4$ nombres ayant chacun 2 positions possibles. Le dernier nombre n'a qu'une seule position possible. Dans ce cas, il y a $(n - 2) \cdot 2^{n-4}$ arrangements.

En général, supposons que $a_2 = n - k$ pour $0 \leq k \leq n - 3$.

Il y a $n - k - 1$ possibilités pour a_1 (chaque nombre de 1 à $n - k - 1$ fonctionne).

Les nombres $n, n - 1, \dots, n - k + 1$ doivent aller aux positions $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-k+1}$, respectivement, car ils sont supérieurs à $a_2 = n - k$ et il n'y a pas d'autre sommet intérieur.

Les $n - k - 2$ nombres restants doivent être les termes a_3 à a_{n-k} . De même, il y a $n - k - 3$ nombres ayant chacun 2 positions possibles. Le dernier nombre n'a qu'une seule position possible.

Dans ce cas, il y a $(n - k - 1) \cdot 2^{n-k-3}$ arrangements.

En tout, le nombre d'arrangements est

$$(n - 1) \cdot 2^{n-3} + (n - 2) \cdot 2^{n-4} + (n - 3) \cdot 2^{n-5} + \dots + 4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^0$$

Les trois derniers termes proviennent de $k = n - 5$, $k = n - 4$ et $k = n - 3$. On note que quand $a_2 = 3$ (correspondant à $k = n - 3$), il y a 2 choix pour a_1 (soit 2, soit 1), les nombres $n, n - 1, \dots, 5, 4$ sont placés de droite à gauche, et a_3 est le nombre restant, soit 1 ou 2.

En manipulant cette somme, on obtient

$$\begin{aligned}
 & (n-1) \cdot 2^{n-3} + (n-2) \cdot 2^{n-4} + (n-3) \cdot 2^{n-5} + \cdots + 4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^0 \\
 &= 2 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + \cdots + (n-2) \cdot 2^{n-4} + (n-1) \cdot 2^{n-3} \\
 &= \frac{1}{4} (2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (n-2) \cdot 2^{n-2} + (n-1) \cdot 2^{n-1}) \quad (\text{en multipliant et divisant par } 4) \\
 &= \frac{1}{4} (0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (n-2) \cdot 2^{n-2} + (n-1) \cdot 2^{n-1}) - \frac{1}{4} (0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1) \\
 &= \frac{1}{4} ((n-2)2^n + 2) - \frac{1}{2} \quad (\text{en utilisant la formule donnée}) \\
 &= (n-2) \cdot 2^{n-2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
 &= (n-2) \cdot 2^{n-2}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, le nombre d'arrangements est $(n-2) \cdot 2^{n-2}$.

- (c) Trois solutions sont présentées ci-dessous. La première utilise directement le résultat de la partie (b), la deuxième est un dénombrement direct similaire à la solution de la partie (b), et la troisième est aussi un dénombrement direct, mais se généralise plus facilement.

Solution 1

On considère un arrangement a_1, a_2, \dots, a_n des entiers 1 à n , et on fixe un entier positif $1 \leq m \leq n$. Pour chaque i de 1 à n , on définit $b_i = a_i$ si $b_i < m$, et $b_i = a_i + 1$ si $b_i \geq m$. Autrement dit, la liste b_1, b_2, \dots, b_n est obtenue en augmentant de 1 les a_i valant au moins m , et en laissant les autres a_i inchangés.

La liste b_1, b_2, \dots, b_n est un arrangement de $1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, n, n+1$. Par exemple, l'arrangement $4, 3, 5, 1, 6, 2$ de $1, 2, 3, 4, 5, 6$ donnerait $5, 4, 6, 1, 7, 2$ pour $m = 3$.

Supposons que a_1, a_2, \dots, a_n a un sommet intérieur en position k . Alors $a_{k-1} < a_k$, donc l'une des situations suivantes est vérifiée :

- $b_{k-1} = a_{k-1}$ et $b_k = a_k$,
- $b_{k-1} = a_{k-1}$ et $b_k = a_k + 1$, ou
- $b_{k-1} = a_{k-1} + 1$ et $b_k = a_k + 1$

Il est impossible d'avoir $b_{k-1} = a_{k-1} + 1$ et $b_k = a_k$, car si $a_{k-1} > m$, alors $a_k > m$. Dans les trois situations ci-dessus, on obtient $b_{k-1} < b_k$. Comme l'arrangement a un sommet intérieur en position k , on a aussi $a_{k+1} < a_k$, et un raisonnement très similaire montre que $b_{k+1} < b_k$. Ainsi, l'arrangement b_1, b_2, \dots, b_n a un sommet intérieur en position k .

Par un raisonnement très similaire, on peut montrer que si b_1, b_2, \dots, b_n a un sommet intérieur en position k , alors l'arrangement a_1, a_2, \dots, a_n en a un aussi.

D'après la partie (b), pour tout m avec $1 \leq m \leq n$, il y a $(n-2) \cdot 2^{n-2}$ arrangements de $1, 2, 3, \dots, m-1, m+1, \dots, n, n+1$ avec un sommet intérieur en position 2 et aucun autre sommet intérieur.

On cherche maintenant à compter le nombre d'arrangements de $1, 2, 3, \dots, n$ ayant un sommet intérieur en position 3 et aucun autre sommet intérieur.

On considère un arrangement a_1, a_2, \dots, a_n ayant un sommet intérieur en position 3 et aucun autre sommet intérieur, et on suppose que $a_1 = m$. Alors a_2, a_3, \dots, a_n est un arrangement des entiers $1, 2, 3, \dots, m-1, m+1, \dots, n$ ayant un sommet intérieur en position 2 et aucun autre sommet intérieur. D'après l'argument précédent, il y a exactement $((n-1)-2) \cdot 2^{(n-1)-2}$ tels arrangements. On va maintenant montrer que chaque tel arrangement se produit de cette façon.

On considère un arrangement quelconque b_1, b_2, \dots, b_{n-1} de $1, 2, 3, \dots, m-1, m+1, \dots, n$

ayant un sommet intérieur en position 2 et aucun autre sommet intérieur. L'arrangement $m, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ de $1, 2, 3, \dots, n$ a un sommet intérieur en position 3 et aucun sommet intérieur à droite de b_2 . La seule autre possibilité pour un sommet intérieur serait en position 2, mais $b_2 > b_1$, donc il n'y a pas de sommet intérieur en cette position, quelle que soit la valeur de m .

Par conséquent, on peut compter le nombre d'arrangements de $1, 2, 3, \dots, n$ ayant un sommet intérieur en position 3 et aucun autre sommet intérieur comme suit : on choisit m parmi $1, 2, 3, \dots, n$ de n façons possibles. On choisit ensuite un arrangement b_1, b_2, \dots, b_{n-1} de $1, 2, 3, \dots, m-1, m+1, \dots, n$ ayant un sommet intérieur en position 2 et aucun autre sommet intérieur. Cela peut se faire de $(n-3)2^{n-3}$ façons. L'arrangement $m, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ est un arrangement de $1, 2, 3, \dots, n$ ayant un sommet intérieur en position 3 et aucun autre sommet intérieur. D'après le raisonnement ci-dessus, tout tel arrangement se produit de cette façon, donc il y en a $n(n-3)2^{n-3}$.

Solution 2

Supposons qu'un arrangement de $1, 2, \dots, n-1, n$ a un sommet intérieur en position 3 et aucun autre sommet intérieur.

Supposons de plus que l'arrangement commence par a, b, c, d .

Comme la position 3 est un sommet, alors $b < c$ et $c > d$.

On note que, comme en (b), cela signifie que $3 \leq c \leq n$.

Comme il n'y a pas de sommet à droite de la position 3, les $n-3$ nombres à droite de c sont soit strictement décroissants à partir de d , soit strictement croissants à partir de d , soit décroissants puis croissants sans autre changement de direction.

On doit considérer deux cas possibles : $a < c$ ou $a > c$.

Cas 1 : $a < c$

Ici, $c \neq 3$, car $a < c$ et $b < c$ et $d < c$. Donc $4 \leq c \leq n$.

Il y a $c-1$ choix pour a (la seule restriction est qu'il est inférieur à c).

Il y a ensuite $c-2$ choix pour b (inférieur à c et différent de a).

Les nombres $c+1, c+2, \dots, n$ doivent être placés en ordre croissant à l'extrémité droite de l'arrangement, comme on l'a vu dans des situations similaires en (b).

Les $c-3$ nombres restants (tous inférieurs à c mais différents de a ou b) doivent être arrangés entre la position 4 et la position c selon les contraintes de direction ci-dessus. Il y a 2^{c-4} façons de le faire.

Par conséquent, dans ce cas, il y a $\sum_{c=4}^n (c-1)(c-2)2^{c-4}$ arrangements.

En ré-indexant cette somme en posant $k = c-4$, on trouve que le nombre d'arrangements est $\sum_{k=0}^{n-4} (k+3)(k+2)2^k$.

Cas 2 : $a > c$

Ici, $c \neq n$ car $a > c$. Donc $3 \leq c \leq n-1$.

Il y a $n-c$ choix pour a (la seule restriction est qu'il est supérieur à c).

Il y a $c-1$ choix pour b (inférieur à c).

Les nombres $c+1, c+2, \dots, n$ (sauf a) doivent être placés en ordre croissant aux positions de l'extrémité droite de l'arrangement, comme en (b).

Les $c-2$ nombres restants (tous inférieurs à c mais différents de b) doivent être arrangés entre la position 4 et la position $c+1$ selon les contraintes de direction ci-dessus. Il y a 2^{c-3} façons de le faire.

Par conséquent, dans ce cas, il y a $\sum_{c=3}^{n-1} (n-c)(c-1)2^{c-3}$ arrangements.

En posant $k = c - 3$, le nombre d'arrangements est $\sum_{k=0}^{n-4} (n-k-3)(k+2)2^k$.

En additionnant les sous-totaux des deux cas, le nombre total d'arrangements est

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{n-4} (k+3)(k+2)2^k + \sum_{k=0}^{n-4} (n-k-3)(k+2)2^k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-4} (k+2)2^k (k+3+n-k-3) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-4} n(k+2)2^k \\
 &= n \sum_{k=0}^{n-4} k2^k + n \sum_{k=0}^{n-4} 2^{k+1} \\
 &= n((n-5)2^{n-3} + 2) + n(2^{n-2} - 2) \quad (\text{formule donnée et série géométrique}) \\
 &= n(n-5)2^{n-3} + 2n2^{n-3} \\
 &= n(n-3)2^{n-3}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, le nombre total d'arrangements ayant un sommet intérieur en position 3 et aucun autre sommet intérieur est $n(n-3)2^{n-3}$. (Pour $n = 5$, on obtient $5 \cdot 2 \cdot 2^2 = 40$, comme en (a).)

Solution 3

On veut compter le nombre d'arrangements de $1, 2, \dots, n-1, n$ ayant un sommet intérieur en position 3 et aucun autre sommet intérieur.

On commence par arranger les nombres $1, 2, \dots, n-1$; on insérera n plus tard.

On note que si n est à l'intérieur d'un arrangement, il sera un sommet. Par conséquent, pour qu'un arrangement ait un sommet en position 3 et aucun autre sommet intérieur, n doit soit être en position 3, soit se trouver à l'une des extrémités de l'arrangement.

On choisit 2 nombres de la liste $1, 2, \dots, n-1$ pour former les 2 premiers nombres d'un arrangement de $n-1$ nombres. Il y a 2 ordres possibles pour ces 2 nombres. On appelle a le premier nombre et b le deuxième. En principe, on peut avoir $a < b$ ou $a > b$ et avoir tout de même un sommet en position 3.

Soit T un arrangement des $n-3$ nombres restants de la liste $1, 2, \dots, n-1$.

Comme on l'a vu en (b), il y a 2^{n-4} arrangements T formant une liste soit strictement décroissante, soit strictement croissante, soit décroissante puis croissante (comme en (b), on part du plus grand nombre et on le place à l'une des extrémités, puis on continue en ordre décroissant.)

Une fois les 2 premiers nombres choisis, il y a $2 \cdot 2^{n-4} = 2^{n-3}$ façons d'arranger les 2 premiers éléments suivis des $n-3$ éléments suivants en un arrangement de $n-1$ nombres. On veut maintenant considérer comment transformer ces arrangements de $n-1$ nombres en arrangements de n nombres ayant un sommet en position 3.

Soit y le nombre le plus à gauche de la sous-liste T , qui se trouve actuellement en position 3.

Cas 1 : $b < y$

Comme T est soit strictement décroissante, soit strictement croissante, soit décroissante puis croissante, l'arrangement de $n - 1$ nombres a déjà un sommet en position 3 (car $b < y$), sauf si les nombres de T sont strictement croissants.

On peut insérer l'entier n dans cet arrangement de $n - 1$ nombres pour créer ou maintenir un sommet en position 3 de la façon suivante :

- En position 3 entre b et y . Cela assure un sommet en position 3 (que les nombres de T soient strictement croissants ou non) et ne crée pas d'autre sommet grâce à la forme de l'arrangement de part et d'autre de la position 3.
- En position n , à condition que les nombres de T ne soient pas strictement croissants. Cela assure un sommet en position 3. Si $b < y$, que les nombres de T sont strictement croissants et que n est en position n , il n'y aura pas de sommet en position 3.

Il n'y a pas d'autre position où n peut être inséré pour maintenir un sommet intérieur uniquement en position 3. Si n est inséré au début de l'arrangement, le sommet éventuel se déplace en position 4 ; si n est inséré ailleurs au milieu de l'arrangement, il créera lui-même un sommet.

Cas 2 : $b > y$

Ici, l'arrangement de $n - 1$ nombres a déjà un sommet en position 2, sauf si $a > b$. On peut insérer l'entier n dans cet arrangement de $n - 1$ nombres pour créer ou maintenir un sommet en position 3 de la façon suivante :

- En position 3 entre b et y . Cela assure un sommet en position 3 (que $a < b$ ou $a > b$) et ne crée pas d'autre sommet grâce à la forme de l'arrangement de part et d'autre de la position 3.
- En position 1, à condition que $a < b$. Cela déplace le sommet qui était précédemment en position 2 vers la position 3. Si $b > y$, n est en position 1 et $a > b$, il n'y aura pas de sommet en position 3.

Par conséquent, pour chacune des $\binom{n-1}{2}$ façons de choisir les 2 premiers nombres et des 2^{n-3} façons suivantes d'arranger les $n - 1$ premiers éléments, il y a 2 façons d'insérer n , en notant qu'il y a deux cas exceptionnels à enlever. Cela donne $2 \cdot 2^{n-3} \cdot \binom{n-1}{2}$, ou $2^{n-2} \binom{n-1}{2}$ arrangements, avec deux cas à régler.

Les arrangements qui sont comptés ci-dessus mais qui ne doivent pas l'être dans le total final sont :

- Ceux avec $b < y$, les nombres de T strictement croissants et n place en position n . La direction de cet arrangement de n nombres est soit strictement croissante de la position 1 à n , soit décroissante de 1 à 2 puis croissante de 2 à n .
- Ceux avec $b > y$, $a > b$ et n place en position 1. La direction de cet arrangement de n nombres est soit strictement décroissante de la position 1 à n , soit décroissante de 1 à une certaine position à partir de la position 3 puis croissante jusqu'à la position n .

Ces arrangements sont exactement les arrangements des entiers $1, 2, \dots, n - 1$ qui sont strictement croissants (inclus dans le premier point), strictement décroissants (inclus dans le deuxième point), ou décroissants puis croissants sans autre changement de direction, avec l'entier n placé au début ou à la fin, selon le cas. Avec $n - 1$ nombres, il y a exactement 2^{n-2} tels arrangements.

Cela signifie que le nombre total d'arrangements ayant un sommet intérieur en position 3

et aucun autre sommet intérieur est $2^{n-2} \binom{n-1}{2} - 2^{n-2}$, ou $2^{n-2} \left(\binom{n-1}{2} - 1 \right)$.

Cet argument peut être généralisé pour déterminer le nombre d'arrangements ayant exactement un sommet intérieur en position k .