Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2026

(10^e^ année – Secondaire IV)

le mercredi 25 février 2026
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 26 février 2026
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a $13 + 15 + 17 = 28 + 17 = 45$.

Réponse : (B)

2. Un million s'écrit 1 000 000, ce qui est égal à 10^6.

Réponse : (D)

3. *Solution 1*
Puisque $4x + 1 = 13$, alors $3 \times (4x + 1) = 3 \times 13$, et donc $12x + 3 = 39$.

Solution 2
En résolvant $4x+1 = 13$, on obtient $4x = 12$, d'où $x = 3$. Ainsi, la valeur de $12x+3 = 12(3)+3 = 39$.

Réponse : (E)

4. Puisque le segment reliant 0 à 6 sur la droite numérique est divisé en 12 parties égales, chaque partie a une longueur de $\frac{6}{12} = 0{,}5$.
La position de M est à 2 parties à droite de 0, donc la valeur de M est $2 \times 0{,}5 = 1{,}0$.
La position de N est à 3 parties à gauche de 6, donc la valeur de N est $6 - (3 \times 0{,}5) = 4{,}5$.
La valeur de $N - M = 4{,}5 - 1{,}0 = 3{,}5$.

Réponse : (B)

5. En courant tous les deux jours, Carley a couru les 18, 20, 22 et 24 mai. Entre le 18 et le 25 mai inclusivement, Carley a couru pendant 4 jours.

Réponse : (E)

6. Sur les 40 gâteaux de Jin, 75 % soit $\frac{3}{4}$ sont au chocolat, donc Jin a $40 \times \frac{3}{4} = 30$ gâteaux au chocolat

et $40 - 30 = 10$ gâteaux à la vanille.
Puisque Jin a $30 - 10 = 20$ gâteaux au chocolat de plus qu'à la vanille, elle doit cuire 20 gâteaux à la vanille de plus pour que la moitié des gâteaux soient à la vanille.

Réponse : (B)

7. Puisque $9 = 3 \times 3$, le nombre 9 laisse un reste de 0 lorsqu'il est divisé par 3. Puisque $9 = 2 \times 4 + 1$, le nombre 9 laisse un reste de 1 lorsqu'il est divisé par 4. Les restes obtenus en divisant chacun des autres nombres donnés par 3 et par 4 figurent dans le tableau suivant.

	9	11	10	13	8
reste après division par 3	0	2	1	1	2
reste après division par 4	1	3	2	1	0

Parmi les entiers donnés, 13 est celui dont le reste est le même qu'il soit divisé par 3 ou par 4.

Réponse : (D)

8. Lorsqu'un point (x,y) subit une translation de 5 unités vers la gauche, les coordonnées du point obtenu sont $(x - 5,y)$.
Ainsi, lorsque $Q(4,2)$ subit une translation de 5 unités vers la gauche, les coordonnées du point obtenu sont $(-1,2)$.
Lorsqu'un point (x,y) subit une translation de 6 unités vers le bas, les coordonnées du point obtenu sont $(x,y - 6)$.
Ainsi, lorsque $(-1,2)$ subit une translation de 6 unités vers le bas, les coordonnées du point obtenu sont $R(-1, -4)$.

Réponse : (A)

9. *Solution 1*

Si la longueur, la largeur et la hauteur du prisme droit à base rectangulaire sont les entiers ℓ cm, w cm et h cm respectivement, alors les aires de trois de ses faces sont ℓw cm^2, ℓh cm^2 et wh cm^2. Ainsi, chaque paire d'aires partage un facteur commun, et les facteurs communs sont les dimensions du prisme, ℓ, w et h.
Les nombres 12 et 15 ont pour facteurs communs 1 et 3.
Si l'une des dimensions ℓ, w ou h est égale à 1, les deux autres dimensions sont 12 et 15, mais ce n'est pas possible puisque 12×15 n'est pas égal à 20.
Si l'une des dimensions est égale à 3, les autres dimensions sont $\dfrac{12}{3} = 4$ et $\dfrac{15}{3} = 5$, dont le produit donne bien 20.
Ainsi, ℓ, w et h sont égaux à 3, 4 et 5 dans un certain ordre, et le volume du prisme droit à base rectangulaire est $V = 3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$, soit 60 cm^3.

Solution 2

Si la longueur, la largeur et la hauteur du prisme droit à base rectangulaire sont les entiers ℓ cm, w cm et h cm respectivement, alors les aires de trois de ses faces sont ℓw cm^2, ℓh cm^2 et wh cm^2. Donc ℓw, ℓh et wh sont égaux à 12, 20 et 15 dans un certain ordre, d'où $(\ell w)(\ell h)(wh) = 12 \times 20 \times 15$, soit $\ell^2 w^2 h^2 = 3600$. Par conséquent, $(\ell wh)^2 = 3600$, ce qui donne $\ell wh = 60$.
En cm^3, le volume du prisme est $V = \ell wh = 60$.

Réponse : (A)

10. Au départ, la moyenne des trois nombres visibles est $\dfrac{3+7+8}{3} = \dfrac{18}{3} = 6$. Après avoir retourné le 3, la nouvelle moyenne est 7.

Si le nombre au verso de la carte portant le 3 est x, alors $\dfrac{x+7+8}{3} = 7$, soit $x + 15 = 3 \times 7$, d'où $x = 21 - 15 = 6$. On note que la moyenne des nombres sur les trois cartes a augmenté de 1 lorsque le 3 a été retourné, donc la somme des trois nombres visibles a augmenté de 3. Ainsi, le nouveau nombre (au verso de la carte portant le 3) est $3 + 3 = 6$.

De façon similaire, puisque la moyenne a de nouveau augmenté de 1 lorsque le 7 a été retourné, le nombre au verso de la carte portant le 7 est $7 + 3 = 10$.

Enfin, la moyenne a augmenté de 1 lorsque le 8 a été retourné, donc le nombre au verso de la carte portant le 8 est $8 + 3 = 11$.

Réponse : (A)

11. *Solution 1*

Dans le triangle ABC, $\angle ACB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$.
Puisque $\angle BCD = 90^\circ$, alors $\angle ACD = \angle BCD - \angle ACB = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$.
Puisque $\angle ACE = 90^\circ$, alors $\angle DCE = \angle ACE - \angle ACD = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$.

Solution 2

Puisque $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$, alors AB est parallèle à DC.
Ainsi, $\angle ACD = \angle BAC = 42^\circ$ par un théorème des parallèles(angles alternes-internes, configuration en Z).
Puisque $\angle ACE = 90^\circ$, alors $\angle DCE = \angle ACE - \angle ACD = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$.

Solution 3

Puisque $\angle BAD = 90^\circ$, alors $\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$.
Dans le triangle ADC, $\angle ACD = 180^\circ - \angle ADC - \angle CAD = 180^\circ - 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$.

Puisque $\angle ACE = 90°$, alors $\angle DCE = \angle ACE - \angle ACD = 90° - 42° = 48°$.

RÉPONSE : (C)

12. En mars, Max a lu $\frac{1}{3}$ des b livres, ce qui signifie qu'il lui restait $1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ des b livres, soit $\dfrac{2}{3}b$ livres à lire. En avril, il a lu 5 livres de plus, se laissant $\dfrac{2}{3}b - 5$ livres à lire. Il lui restait alors 7 livres à lire, donc $\dfrac{2}{3}b-5 = 7$. En résolvant, on obtient $\dfrac{2}{3}b = 12$, soit $2b = 12\times 3$, d'où $b = \dfrac{36}{2} = 18$.

RÉPONSE : (A)

13. L'aire d'un cercle de rayon K est 15π, donc $\pi \times K^2 = 15\pi$, soit $K^2 = 15$.
L'aire d'un cercle de rayon $2K$ est $\pi \times (2K)^2 = \pi \times 4K^2$.
En substituant $K^2 = 15$, on obtient que l'aire d'un cercle de rayon $2K$ est $\pi \times 4(15) = 60\pi$.

RÉPONSE : (E)

14. *Solution 1*
Si $\dfrac{2m-n}{n} = \dfrac{3}{5}$, alors $5(2m-n) = 3n$, soit $10m-5n = 3n$. En simplifiant, on obtient $10m = 8n$, d'où
$\dfrac{m}{n} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$.

Solution 2
Si $\dfrac{2m-n}{n} = \dfrac{3}{5}$, alors $\dfrac{2m}{n} - \dfrac{n}{n} = \dfrac{3}{5}$, soit $\dfrac{2m}{n} - 1 = \dfrac{3}{5}$. En simplifiant, on obtient $\dfrac{2m}{n} = \dfrac{8}{5}$, d'où
$\dfrac{m}{n} = \dfrac{8}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{5}$.

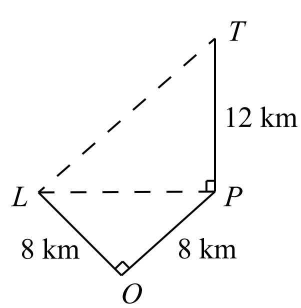
RÉPONSE : (A)

15. Supposons que le diamètre de chaque demi-cercle est x.
Autrement dit, $PQ = RS = TU = x$, et donc $PU = PQ + QT + TU = x + 5 + x = 2x + 5$.
Aussi, $PU = PR + RS + SU = 8 + x + 8 = x + 16$.
Ainsi, $2x + 5 = x + 16$, soit $x = 11$, et donc $PQ = 11$.

RÉPONSE : (D)

16. Soit O le point de départ des deux bateaux, R le point que Le Rond atteint après la première heure, P le point que Le Thon atteint après la première heure, et T le point que Le Thon atteint après avoir voyagé vers le nord pendant 90 minutes à partir de P.

Le Rond voyage de O à R en 1 heure à une vitesse de 8 km/h, donc la longueur de OR est 8 km.
Le Thon voyage de O à P en 1 heure à une vitesse de 8 km/h, donc la longueur de OP est 8 km.
Le Thon voyage de P à T en 90 minutes, soit 1,5 heure, à une vitesse de 8 km/h, donc la longueur de PT est 8 km/h $\times$ 1,5 h = 12 km.



La direction de O vers R est nord-ouest, et la direction de O vers P est nord-est. Chacune de ces directions forme un angle de 45° avec le nord, donc $\angle LOP = 45° + 45° = 90°$.

Pendant la première heure, Le Rond et Le Thon ont chacun parcouru la même distance en formant un angle de 45° avec le nord, donc les deux bateaux se trouvent exactement à la même latitude lorsqu'ils atteignent les points R et P respectivement. Autrement dit, Le Thon était directement à l'est du Le Rond après la première heure. Puisque Le Thon voyage ensuite vers le nord, on conclut que $\angle RPT = 90°$.

On a que le triangle ROP est rectangle en O et que le triangle RPT est rectangle en P.
Par le théorème de Pythagore, $OR^2 + OP^2 = RP^2$ et $RP^2 + PT^2 = RT^2$.
En substituant l'expression de RP^2 tirée de la première équation dans la seconde, et en utilisant les longueurs calculées ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} RT^2 &= OR^2 + OP^2 + PT^2 \\ &= 8^2 + 8^2 + 12^2 \\ &= 64 + 64 + 144 \\ &= 272 \end{aligned}$$

Puisque $RT > 0$, on a $RT = \sqrt{272}$. Au kilomètre près, la distance entre les deux bateaux est 16.

Réponse : (A)

17. Si l'entier strictement positif à deux chiffres n a pour chiffre des dizaines x et pour chiffre des unités y, alors $n = 10x + y$ et $s = x + y$. On a alors $n - s = (10x + y) - (x + y) = 9x$, donc $n - s$ est un multiple de 9 (x étant un entier strictement positif). Parmi les réponses proposées, le seul multiple de 9 est 54.
(Par exemple, si $n = 62$, alors $n - s = 62 - (6 + 2) = 54$.)

Réponse : (D)

18. La sauterelle commence à l'origine, (0,0).
En (0,0), la somme des coordonnées x et y est $x + y = 0 + 0 = 0$.
Chaque saut (vers le haut, llee bas, la gauche ou la droite) augmente ou diminue de 1 l'abscisse ou l'origine, et donc augmente ou diminue $x + y$ de 1.
Ainsi, chaque saut change la parité de $x + y$ (de pair à impair ou d'impair à pair).
Puisque $x + y$ est pair en (0,0), après exactement 6 sauts $x + y$ est pair à la position finale (x,y).
On commence par déterminer les points (x,y) auxquels la sauterelle peut arriver, avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$ étant donné (dans le premier quadrant ou sur les axes qui le bordent).
Puisque la sauterelle fait 6 sauts, $x + y$ est au plus 6.
Pour $x + y = 6$, la sauterelle peut, par exemple, sauter de 6 unités vers la droite pour arriver en (6,0), ou sauter de 5 unités vers la droite et 1 vers le haut pour arriver en (5,1). En continuant ainsi avec $x + y = 6$, les autres points d'arrivée possibles sont (4,2), (3,3), (2,4), (1,5) et (0,6).
La sauterelle peut-elle arriver en un point (x,y) tel que $x + y = 4$? (Rappelons que $x + y$ est pair, donc on peut ignorer $x + y = 5$ par exemple.) La sauterelle pourrait, par exemple, sauter 1 unité vers la droite, puis 1 unité vers la gauche, revenant en (0,0) avec 4 sauts restants. Donc pour $x + y = 4$, les points d'arrivée possibles sont (4,0), (3,1), (2,2), (1,3) et (0,4).
Pour $x + y = 2$, les points d'arrivée possibles sont (2,0), (1,1) et (0,2).
Enfin, la sauterelle pourrait sauter 3 fois vers la droite et 3 fois vers la gauche pour revenir en (0,0).
En résumé, pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$, la sauterelle peut arriver en

(i)9 points avec $x > 0$ et $y > 0$: (5,1), (4,2), (3,3), (2,4), (1,5), (3,1), (2,2), (1,3), (1,1),

(ii)6 points sur l'axe des x positifs ou l'axe des y positifs : (2,0), (4,0), (6,0), (0,2), (0,4), (0,6),
(iii)le point (0,0).

Par symétrie, la sauterelle peut arriver aux 9 points correspondant à (i) dans chacun des 3 autres quadrants, pour un total de $9 \times 4 = 36$ points.
Par symétrie, la sauterelle peut arriver aux 6 points correspondant à (ii) sur l'axe des x négatifs ou l'axe des y négatifs, pour un total de $6 \times 2 = 12$ points.
Ainsi, $N = 36 + 12 + 1 = 49$.

Réponse : (D)

19. Puisque la moyenne des trois premiers lancers est 3, la somme des trois premiers lancers est $3 \times 3 = 9$. Les résultats des 4e, 5e et 6e lancers sont a, b et c, donc la moyenne de l'ensemble des six lancers est $\dfrac{9+a+b+c}{6}$. Pour que cette moyenne soit un entier, $9+a+b+c$ doit être un multiple de 6.
Chaque lancer est un entier strictement positif entre 1 et 6 inclusivement, donc $a+b+c$ est au moins $1+1+1=3$ et au plus $6+6+6=18$.
Par conséquent, $9+a+b+c$ est au moins $9+3=12$ et au plus $9+18=27$.
Les multiples de 6 entre 12 et 27 inclusivement sont 12, 18 et 24, donc la moyenne est un entier exactement lorsque $a+b+c=3$, $a+b+c=9$ ou $a+b+c=15$.
On compte ensuite le nombre de triplets ordonnés (a,b,c) pour chacun de ces 3 cas.

Cas 1 : $a+b+c=3$
Il existe exactement 1 triplet ordonné, $(a,b,c) = (1,1,1)$, dans ce cas.

Cas 2 : $a+b+c=9$
Si $a=6$, alors $b+c=3$, donc $(b,c)=(1,2)$ ou $(b,c)=(2,1)$.
Si $a=5$, alors $b+c=4$, donc $(b,c)=(1,3)$, $(b,c)=(2,2)$ ou $(b,c)=(3,1)$.
On continue de faire ainsi et on résume les résultats dans le tableau suivant.

Valeur de a	Valeur de $b+c$	Paires ordonnées (b,c) possibles	Nombre de triplets ordonnés
6	3	(1,2), (2,1)	2
5	4	(1,3), (2,2), (3,1)	3
4	5	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	4
3	6	(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)	5
2	7	(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)	6
1	8	(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)	5

En tout, il y a $2+3+4+5+6+5=25$ triplets ordonnés dans ce cas.

Cas 3 : $a+b+c=15$
On compte de façon similaire au cas 2 et on résume les résultats dans le tableau suivant.

Valeur de a	Valeur de $b+c$	Paires ordonnées (b,c) possibles	Nombre de triplets ordonnés
6	9	(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)	4
5	10	(4,6), (5,5), (6,4)	3
4	11	(5,6), (6,5)	2
3	12	(6,6)	1

Si $a<3$, alors $b+c>12$, ce qui est impossible.
En tout, il y a $4+3+2+1=10$ triplets ordonnés dans ce cas.

Le nombre de triplets ordonnés (a,b,c) pour lesquels la moyenne de l'ensemble des six lancers est un entier est $1+25+10=36$.

Réponse : (E)

20. Le choix de 5 lettres pour chacune des 5 positions dans la chaîne donne un total de $5^5 = 3125$ chaînes différentes dans la liste.
Parmi ces chaînes, $\frac{1}{5}$ commencent par la lettre A, $\frac{1}{5}$ commencent par la lettre B, et ainsi de suite jusqu'à E.
C'est-à-dire qu'il y a $\frac{1}{5} \times 5^5 = 5^4 = 625$ chaînes commençant par chacune des lettres A à E. Ainsi, la $3 \times 625 = 1875$e chaîne est la dernière chaîne commençant par C (soit $CEEEE$), et la $4 \times 625 = 2500$e chaîne est la dernière chaîne commençant par D (soit $DEEEE$).
Cela nous indique que la première lettre de la 2026e chaîne est D.

Parmi les 625 chaînes commençant par D, $\frac{1}{5}$ ont comme deuxième lettre A, $\frac{1}{5}$ ont comme deuxième lettre B, et ainsi de suite jusqu'à E. C'est-à-dire qu'il y a $\frac{1}{5} \times 625 = 125$ chaînes ayant comme deuxième lettre chacune des lettres A à E. Ainsi, la $1875 + 125 = 2000$e chaîne est la dernière chaîne commençant par D et ayant comme deuxième lettre A (soit $DAEEE$), et la $1875 + 2 \times 125 = 2125$e chaîne est la dernière chaîne commençant par D et ayant comme deuxième lettre B (soit $DBEEE$).
Cela nous indique que la 2001e chaîne est $DBAAA$, et que les deux premières lettres de la 2026e chaîne sont DB.

Parmi les 125 chaînes commençant par DB, $\frac{1}{5}$ ont comme troisième lettre A, $\frac{1}{5}$ ont comme troisième lettre B, et ainsi de suite jusqu'à E. C'est-à-dire qu'il y a $\frac{1}{5} \times 125 = 25$ chaînes commençant par DBA. La 2001e de celles-ci est $DBAAA$ et la $2000 + 25 = 2025$e est $DBAEE$. Ainsi, la 2026e chaîne est la chaîne suivant $DBAEE$, soit $DBBAA$, et la 2026e chaîne de la liste contient 2 lettres B.

Réponse : (C)

21. La région ombrée est un carré 16×16 dont on a retiré quatre quarts de cercle, chacun de rayon 8. Ainsi, la région a la même aire qu'un carré 16×16 dont on a retiré un cercle de rayon 8.
Un carré 16×16 a une aire de 256. Un cercle de rayon 8 a une aire de 64π. Ainsi, l'aire de la région ombrée est

$$256 - 64\pi \approx 54{,}94$$

Arrondie à l'entier le plus proche, l'aire est 55.

Réponse : 55

22. Soit y le nombre de personnes ayant acheté une boisson. Il est donné que $y > 40$.
Le nombre de personnes ayant acheté du maïs éclaté mais pas de boisson est $47 - x$.
Le nombre de personnes ayant acheté une boisson mais pas de maïs éclaté est $y - x$.
Le nombre de personnes ayant acheté les deux est x, et le nombre de personnes n'ayant rien acheté est $2x$.
Chaque personne appartient exactement à l'un de ces cas, donc

$$100 = (47 - x) + (y - x) + x + 2x$$

ce qu'on peut résoudre pour y pour obtenir $y = 53 - x$. Puisque $y > 40$, on doit avoir $53 - x > 40$, ce qui se simplifie en $x < 53 - 40$, soit $x < 13$. x étant un entier, on doit avoir $x \leq 12$.
On note que si $x = 12$, les achats satisfont les conditions :

Achats	Nombre de personnes
maïs éclaté et boisson	12
maïs éclaté sans boisson	35
boisson sans maïs éclaté	29
rien	24

Réponse : 12

23. Les entiers $2r-21$, $3r-1$, $r+12$ et $3r-17$ sont égaux aux entiers p, $2p$, q et $2q$ dans un certain ordre, ce qui donne les équations suivantes, toutes équivalentes :

$$\begin{aligned}(2r-21)+(3r-1)+(r+12)+(3r-17) &= p+2p+q+2q\\ 9r-27 &= 3p+3q\\ 3r-9 &= p+q \qquad (*)\end{aligned}$$

Il est donné que p et q sont deux des entiers $2r-21$, $3r-1$, $r+12$, $3r-17$. Il y a 6 possibilités pour les deux entiers égaux à p et q.

- Si p et q sont $2r-21$ et $3r-1$ dans un certain ordre, $p+q=(2r-21)+(3r-1)=5r-22$. On sait aussi que $p+q=3r-9$, donc $5r-22=3r-9$, ce qui donne $r=\frac{13}{2}$, qui n'est pas un entier. On conclut que p et q ne peuvent pas être $2r-21$ et $3r-1$.
- Si p et q sont $2r-21$ et $r+12$, alors $p+q=(2r-21)+(r+12)=3r-9$, ce qui concorde avec l'équation $(*)$. (Ce sera en fin de compte la seule possibilité.)
- Si p et q sont $2r-21$ et $3r-17$, alors $p+q=5r-38$. En utilisant de nouveau que $p+q=3r-9$, on obtient $3r-9=5r-38$. En résolvant pour r, on trouve $r=\frac{29}{2}$, qui n'est pas un entier.
- Si p et q sont $3r-1$ et $r+12$, on peut vérifier que $r=-20$, qui n'est pas un entier strictement positif.
- Si p et q sont $3r-1$ et $3r-17$, alors $r=3$. Si $r=3$, alors $2r-21$ est négatif, mais cela est impossible puisqu'il est l'un des entiers p, q, $2p$ et $2q$, qui doivent tous être positifs.
- Si p et q sont $r+12$ et $3r-17$, alors $r=-4$, qui n'est pas un entier strictement positif.

On conclut que p et q doivent être $2r-21$ et $r+12$ dans un certain ordre, ce qui signifie que $2p$ et $2q$ doivent être $3r-1$ et $3r-17$ dans un certain ordre. p et q étant interchangeables, on peut supposer que $p=2r-21$ et $q=r+12$, et il y a donc 2 cas à considérer.

Cas 1 : $p=2r-21$ et $2p=3r-1$

Si $p=2r-21$, alors $2p=2(2r-21)=4r-42$. En égalant les deux expressions pour $2p$ et en résolvant, on obtient $4r-42=3r-1$, donc $r=41$.

Cas 2 : $p=2r-21$ et $2p=3r-17$

En égalant les deux expressions pour $2p$ et en résolvant, on obtient $4r-42=3r-17$, donc $r=25$.

La somme de toutes les valeurs possibles de r est $41+25=66$.

Réponse : 66

24. Puisqu'ils sont des angles alternes, on a $\angle FEG=\angle ACG$ et $\angle EFG=\angle CAG$. Chacune des longueurs AC et FE est égale à la moitié de l'arête du même cube, donc $AC=FE$. Par le critère d'isométrie angle-côté-angle, le triangle EFG est isométrique au triangle CAG.
De cette isométrie on déduit que $CG=EG$, ce qui signifie que G est le point milieu de CE. De façon similaire, H est le point milieu de CD.
Désignons par J le point milieu de CF. On a $\frac{CG}{CE}=\frac{CJ}{CF}=\frac{1}{2}$, et puisque les triangles GCJ et

ECF partagent un angle commun en C, le triangle GCJ est semblable au triangle ECF.
Par conséquent, $\angle GJC = \angle EFC = 90^\circ$ et $\dfrac{GJ}{EF} = \dfrac{CJ}{CF} = \dfrac{1}{2}$. De façon similaire, $\dfrac{HJ}{DF} = \dfrac{1}{2}$.
De $\angle GJC = 90^\circ$, on déduit que $GJHC$ est une pyramide triangulaire de base $\triangle GJH$ et de hauteur CJ.
Considérons le rapport du volume de la pyramide $GJHC$ au volume de la pyramide $EFDC$.

$$\begin{aligned}\frac{\text{Volume}(GJHC)}{\text{Volume}(EFDC)} &= \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times GJ\times HJ\times CJ}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times EF\times DF\times CF}\\ &= \frac{GJ}{EF}\times\frac{HJ}{DF}\times\frac{CJ}{CF}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Le solide $EFDHJG$ est obtenu en retirant la pyramide $GJHC$ de la pyramide $EFDC$. En désignant par W le volume de $EFDC$ et par X le volume de $EFDHJG$, on a $X = W - \frac{1}{8}W = \frac{7}{8}W$.

Par symétrie, le volume de $ACBHJG$ est également $\frac{7}{8}W$. En conséquent, le volume du solide retiré de la section du cube dans le schéma est $2\times\frac{7}{8}W = \frac{7}{4}W$.

Quatre solides isométriques sont retirés du cube, donc le volume total retiré est $4\times\frac{7}{4}W = 7W$.
Le volume du cube est $6\times 6\times 6 = 216$, et le volume de $EFDC$ est

$$W = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times EF\times DF\times CF = \frac{1}{6}\times 3\times 3\times 6 = 9$$

Le volume du solide restant est $216 - 7\times 9 = 153$, donc la réponse à la question est 53.

Réponse : 53

25. La somme des $2k$ premiers entiers strictement positifs est

$$1+2+3+\cdots+(2k-1)+2k = \frac{2k(2k+1)}{2} = \frac{4k^2+2k}{2}$$

La somme des k entiers consécutifs commençant à $m \geq 1$ est

$$\begin{aligned}m+(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+k-1) &= km + (1+2+3+\cdots+(k-1))\\ &= km + \frac{(k-1)k}{2}\\ &= \frac{k^2+2km-k}{2}\end{aligned}$$

On doit avoir $m \leq k+1$, sinon $m+k-1 > 2k$. Ainsi, la somme des entiers restants est

$$\frac{4k^2+2k}{2} - \left(\frac{k^2+2km-k}{2}\right) = \frac{3k^2-2km+3k}{2}$$

On cherche donc les paires d'entiers strictement positifs (k,m) telles que $1 \leq m \leq k+1$ et

$$\frac{3k^2-2km+3k}{2} = 819$$

En réorganisant et en factorisant, cette équation devient

$$k(3k-2m+3)=1638$$

Ainsi, $(k,3k-2m+3)$ est une paire de diviseurs de 1638. Puisque $m \leq k+1$, on a $m < k+2$, d'où $-2m > -2k-4$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}(3k-2m+3)-k &= 2k-2m+3\\ &> 2k+(-2k-4)+3\\ &= -1\end{aligned}$$

Pour qu'un entier soit supérieur à -1, il doit être au moins égal à 0. Par conséquent, $(3k-2m+3) \geq k$, et donc dans chaque paire de diviseurs $(k,3k-2m+3)$, $3k-2m+3$ est le plus grand des deux. (1638 n'est pas un carré parfait, donc les diviseurs ne seront jamais égaux.) Les paires de diviseurs *ordonnés* de 1638 sont

(1,1638)	(7,234)	(18,91)
(2,819)	(9,182)	(21,78)
(3,546)	(13,126)	(26,63)
(6,273)	(14,117)	(39,42)

On observe que $3(k+1)-(3k-2m+3)=2m>0$. Par conséquent, si on triple le successeur du plus petit diviseur, le résultat doit dépasser le plus grand diviseur. Parmi les paires de diviseurs ci-dessus, seules (26,63) et (39,42) possèdent cette propriété.

Si $k=26$ et $3k-2m+3=63$, alors $m=9$; si $k=39$ et $3k-2m+3=42$, alors $m=39$.

Les deux seules valeurs possibles de k sont $k=26$ et $k=39$, et leur somme est $26+39=65$.

Réponse : 65