



Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatia 2025

le jeudi 3 avril 2025
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 4 avril 2025
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Après 7 minutes, Abi aura $30 + (7 \times 2) = 30 + 14 = 44$ jetons au total.
 (b) Après 12 minutes, Désirée a reçu $12 \times 2 = 24$ jetons supplémentaires. Comme elle avait 37 jetons au total, elle avait donc commencé avec $37 - 24 = 13$ jetons.
 Au total, il y avait 80 jetons, donc Carl avait commencé avec $80 - 13 = 67$ jetons.
 (c) Au début, Essi a reçu 12 jetons et Francis en a reçu $100 - 12 = 88$.
 Après t minutes, Essi en a $12 + 2t$, tandis que Francis en a $88 + 2t$.
 Après t minutes, Francis a le triple des jetons d'Essi, donc $88 + 2t = 3(12 + 2t)$. On obtient
 $88 + 2t = 36 + 6t$, soit $52 = 4t$, et donc $t = \frac{52}{4} = 13$.

2. (a) *Solution 1*

Puisque 10 % de 5 cm est $\frac{10}{100} \times 5 \text{ cm} = 0,1 \times 5 \text{ cm} = 0,5 \text{ cm}$, la longueur du nouveau rectangle est $5 \text{ cm} + 0,5 \text{ cm} = 5,5 \text{ cm}$. Son aire est donc $5,5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 22 \text{ cm}^2$.

Solution 2

Lorsqu'on augmente 5 cm de 10 %, la longueur obtenue est $\left(1 + \frac{10}{100}\right) \times 5 \text{ cm}$, soit $1,1 \times 5 \text{ cm}$ ce qui donne 5,5 cm.

Ainsi, l'aire du nouveau rectangle est $5,5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 22 \text{ cm}^2$.

(b) *Solution 1*

Un carré d'aire égale à 100 cm^2 a pour côté $\sqrt{100 \text{ cm}^2} = 10 \text{ cm}$.

Puisque 30 % de 10 cm est $\frac{30}{100} \times 10 \text{ cm} = 0,3 \times 10 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$, la longueur du nouveau rectangle est $10 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 13 \text{ cm}$, et sa largeur est $10 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$.

L'aire de ce rectangle est donc $13 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} = 91 \text{ cm}^2$, ce qui représente $\frac{91 \text{ cm}^2}{100 \text{ cm}^2} \times 100 \% = 91 \%$ de l'aire du carré initial.

L'aire a donc diminué de $100 \% - 91 \% = 9 \%$.

Solution 2

Un carré d'aire égale à 100 cm^2 a pour côté $\sqrt{100 \text{ cm}^2} = 10 \text{ cm}$.

Lorsque 10 cm est augmenté de 30 %, la longueur obtenue est $\left(1 + \frac{30}{100}\right) \times 10 \text{ cm}$, soit $1,3 \times 10 \text{ cm}$, ce qui donne 13 cm.

Lorsque 10 cm est diminué de 30 %, la longueur obtenue est $\left(1 - \frac{30}{100}\right) \times 10 \text{ cm}$, soit $0,7 \times 10 \text{ cm}$, ce qui donne 7 cm.

Ainsi, l'aire du rectangle obtenu est $13 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} = 91 \text{ cm}^2$, soit $100 \text{ cm}^2 - 91 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2$ de moins que l'aire du carré initial.

L'aire a donc diminué de $\frac{9 \text{ cm}^2}{100 \text{ cm}^2} \times 100 \% = 9 \%$.

(c) Soit la longueur du rectangle initial ℓ et sa largeur w .

La longueur du rectangle obtenu est $\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times \ell$, et sa largeur est $\left(1 - \frac{20}{100}\right) \times w$, soit $\frac{8}{10}w$.

L'aire du rectangle initial, ℓw , est égale à l'aire du rectangle obtenu, $\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times \ell \times \frac{8}{10}w$.

En égalant les aires et en simplifiant, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{x}{100}\right) \times \ell \times \frac{8}{10}w &= \ell w \\
 \left(1 + \frac{x}{100}\right) \times \frac{8}{10} \times \ell w &= \ell w \\
 \left(1 + \frac{x}{100}\right) \times \frac{8}{10} &= 1 \quad (\text{puisque } \ell w > 0) \\
 1 + \frac{x}{100} &= \frac{10}{8} \\
 \frac{x}{100} &= \frac{10}{8} - \frac{8}{8} \\
 \frac{x}{100} &= \frac{2}{8} \\
 x &= \frac{1}{4} \times 100
 \end{aligned}$$

et donc $x = 25$.

3. (a) On commence par déterminer l'intersection de la parabole et de la droite. En égalant les membres de droite des équations et en résolvant, on obtient :

$$\begin{aligned}
 x^2 + 3x - 12 &= 2x \\
 x^2 + x - 12 &= 0 \\
 (x + 4)(x - 3) &= 0
 \end{aligned}$$

et donc $x = -4$ et $x = 3$.

En appliquant la formule donnée avec $p = 3$ et $q = -4$, l'aire comprise entre la parabole et la droite est $\frac{(3 - (-4))^3}{6} = \frac{7^3}{6} = \frac{343}{6}$.

- (b) Soient les abscisses de V et W les entiers v et w , respectivement, avec $v > w$.

Ainsi v et w sont des solutions de l'équation $mx - 6 = -x^2 + 7x - 90$, qui se simplifie en $x^2 + (m - 7)x + 84 = 0$.

Cette équation est donc équivalente à $(x - v)(x - w) = 0$, soit $x^2 - (v + w)x + vw = 0$. Le produit des racines, vw , est égal à 84.

L'aire comprise entre la parabole et la droite est égale à $\frac{(v - w)^3}{6}$, minimale lorsque $v - w$ est le plus petit possible.

Pour déterminer cette aire minimale, il faut trouver la plus petite valeur de $v - w$ pour des entiers v et w tels que $vw = 84$ et $v > w$.

Les couples de facteurs positifs (w, v) de 84 sont $(1, 84)$, $(2, 42)$, $(3, 28)$, $(4, 21)$, $(6, 14)$ et $(7, 12)$.

La valeur minimale possible pour $v - w$ est 5, ce qui se produit lorsque $v = 12$ et $w = 7$.

Chaque facteur peut également être négatif, de même, on obtient que la plus petite valeur de $v - w$ est 5 lorsque $v = -7$ et $w = -12$.

En égalant les coefficients des équations équivalentes $x^2 + (m - 7)x + 84 = 0$ et $x^2 - (v + w)x + vw = 0$, on obtient $m - 7 = -(v + w)$, soit $m = 7 - (v + w)$.

Lorsque $v = 12$ et $w = 7$, on obtient $m = 7 - (12 + 7) = -12$.

Lorsque $v = -7$ et $w = -12$, on obtient $m = 7 - (-7 - 12) = 26$.

Les deux valeurs possibles de m pour lesquelles l'aire comprise entre la parabole et la droite est minimale sont -12 et 26 .

- (c) Soient les abscisses de T et U les entiers t et u , respectivement, avec $t > u$.

Ainsi, t et u sont des solutions de l'équation $x^2 + (g + h)x + 9 = -x^2 + gx + h$, qui se simplifie en $2x^2 + hx + 9 - h = 0$.

Cette équation est équivalente à $(x - t)(x - u) = 0$, et donc $x^2 + \frac{h}{2}x + \frac{9 - h}{2} = 0$ est équivalent à $x^2 - (t + u)x + tu = 0$.

En égalant les termes constants, on obtient $tu = \frac{9 - h}{2}$ (équation (1)), et en égalant les coefficients du terme linéaire, on obtient $-(t + u) = \frac{h}{2}$, soit $t + u = -\frac{h}{2}$ (équation (2)).

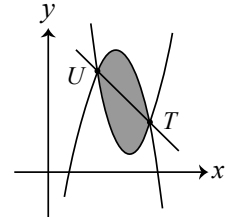
On considère la droite passant par T et U , comme illustré.

L'aire comprise entre cette droite et la parabole d'équation

$y = -x^2 + gx + h$ est égale à $\frac{(t - u)^3}{6}$.

De même, l'aire comprise entre cette droite et la parabole

d'équation $y = x^2 + (g + h)x + 9$ est égale à $\frac{(t - u)^3}{6}$.



Par conséquent, l'aire comprise entre les deux paraboles est égale à $2 \times \frac{(t - u)^3}{6} = \frac{(t - u)^3}{3}$.

Or, cette aire vaut $\frac{3087}{8}$, et donc :

$$\begin{aligned}\frac{(t - u)^3}{3} &= \frac{3087}{8} \\ (t - u)^3 &= \frac{9261}{8} \\ t - u &= \sqrt[3]{\frac{9261}{8}} \\ t &= u + \frac{21}{2} \quad (\text{équation (3)})\end{aligned}$$

On reporte l'équation (3) dans (2) et on obtient $u + \frac{21}{2} + u = -\frac{h}{2}$, soit $h = -4u - 21$.

On reporte ensuite $h = -4u - 21$ ainsi que l'équation (3) dans l'équation (1) et on résout, ce qui donne :

$$\begin{aligned}tu &= \frac{9 - h}{2} \\ \left(u + \frac{21}{2}\right)u &= \frac{9 - (-4u - 21)}{2} \\ (2u + 21)u &= 9 + 4u + 21 \\ 2u^2 + 17u - 30 &= 0 \\ (2u - 3)(u + 10) &= 0\end{aligned}$$

et les solutions sont $u = \frac{3}{2}$ and $u = -10$.

Lorsque $u = \frac{3}{2}$, $h = -4 \cdot \frac{3}{2} - 21 = -27$, et lorsque $u = -10$, $h = -4(-10) - 21 = 19$.

Les valeurs possibles de h pour lesquelles l'aire comprise entre les paraboles est $\frac{3087}{8}$ sont -27 et 19 .

4. (a) Le troisième terme de la suite est $45 \cdot \frac{3}{5} = 27$, et le premier terme est $45 \div \frac{3}{5} = 45 \cdot \frac{5}{3} = 75$.
Donc, la somme des trois premiers termes vaut $75 + 45 + 27 = 147$.
- (b) La raison, r , de la suite géométrique $x, 12, y$ est $r = \frac{12}{x}$, et aussi $r = \frac{y}{12}$.
Donc $\frac{y}{12} = \frac{12}{x}$, soit $xy = 144$.
En reportant $y = 25 - x$ dans $xy = 144$ et en résolvant, on obtient :

$$\begin{aligned} x(25 - x) &= 144 \\ 25x - x^2 &= 144 \\ x^2 - 25x + 144 &= 0 \\ (x - 9)(x - 16) &= 0 \end{aligned}$$

et donc $x = 9$ et $x = 16$. Lorsque $x = 9$, $y = 25 - 9 = 16$ et lorsque $x = 16$, $y = 25 - 16 = 9$.
Les couples possibles d'entiers positifs (x, y) sont $(9, 16)$ et $(16, 9)$.

- (c) Soit r la raison de la suite géométrique, et donc $b = ar$, $c = ar^2$ et $d = ar^3$.
Puisque $a + b + c + d = 65$, on obtient :

$$\begin{aligned} a + ar + ar^2 + ar^3 &= 65 \\ a(1 + r + r^2 + r^3) &= 65 \\ a((1 + r) + r^2(1 + r)) &= 65 \\ a(1 + r)(1 + r^2) &= 65 \end{aligned}$$

Puisque $r = \frac{b}{a}$ et que a et b sont des entiers non nuls, r est un nombre rationnel.

Soit $r = \frac{m}{n}$ avec m et n des entiers non nuls premiers entre eux (ou, $\text{pgcd}(m, n) = 1$).
Alors, $a(1 + r)(1 + r^2) = 65$ devient :

$$\begin{aligned} a \left(1 + \frac{m}{n}\right) \left(1 + \left(\frac{m}{n}\right)^2\right) &= 65 \\ a \left(\frac{m+n}{n}\right) \left(\frac{m^2+n^2}{n^2}\right) &= 65 \\ \frac{a}{n^3} (m+n)(m^2+n^2) &= 65 \end{aligned}$$

Puisque d est un entier et que $d = ar^3 = a \cdot \frac{m^3}{n^3}$, alors $a \cdot \frac{m^3}{n^3}$ est un entier.

Comme $\text{pgcd}(m, n) = 1$, m^3 et n^3 n'ont pas de diviseurs en commun. On peut en conclure que n^3 divise a , ce qui signifie que $\frac{a}{n^3}$ est un entier.

Soit $p = \frac{a}{n^3}$, alors $p(m+n)(m^2+n^2) = 65$ pour des entiers m, n, p .

Chacun des nombres p , $m+n$ et m^2+n^2 est un entier, et donc un diviseur de 65.

Les diviseurs de 65 sont ± 1 , ± 5 , ± 13 et ± 65 .

Puisque m et n sont des entiers non nuls, $m^2+n^2 \geq 2$ et $m^2+n^2 \geq m+n$.

On remarque que les facteurs p et $m+n$ sont soit tous les deux positifs, soit tous les deux négatifs, puisque m^2+n^2 est positif pour toutes les valeurs de m et n . Donc, on doit considérer trois cas possibles : $m^2+n^2 = 65$, $m^2+n^2 = 13$ et $m^2+n^2 = 5$.

1^{er} cas : $m^2 + n^2 = 65$

Si $m^2 + n^2 = 65$, alors $m + n = 1$ et $p = 1$ ou $m + n = -1$ et $p = -1$.

Si $m^2 + n^2 = 65$, les solutions entières sont $(m, n) = (\pm 1, \pm 8), (\pm 4, \pm 7), (\pm 8, \pm 1)$ et $(\pm 7, \pm 4)$. Pour chacune de ces solutions, $m + n \neq \pm 1$, donc il n'y a aucune solution lorsque $m^2 + n^2 = 65$.

2^e cas : $m^2 + n^2 = 13$

Lorsque $m^2 + n^2 = 13$, les solutions entières sont $(m, n) = (\pm 3, \pm 2)$ et $(\pm 2, \pm 3)$.

Cela donne les huit possibilités suivantes :

(i) $(m, n) = (3, 2)$, donc $m + n = 5$ et $p = 1 = \frac{a}{n^3}$, ce qui donne $a = 1 \cdot 2^3 = 8$.

En ce cas, $r = \frac{m}{n} = \frac{3}{2}$, et donc le quadruplet $(a, b, c, d) = (8, 12, 18, 27)$ satisfait les conditions spécifiées.

(ii) $(m, n) = (-3, -2)$, donc $m + n = -5$ et $p = -1 = \frac{a}{n^3}$, ce qui donne $a = -1 \cdot (-2)^3 = 8$.

En ce cas, $r = \frac{m}{n} = \frac{3}{2}$, et on obtient donc le même quadruplet que dans (i).

(iii) $(m, n) = (3, -2)$, donc $m + n = 1$ et $p = 5 = \frac{a}{n^3}$, ce qui donne $a = 5 \cdot (-2)^3 = -40$.

En ce cas, $r = \frac{m}{n} = -\frac{3}{2}$, et on obtient $(a, b, c, d) = (-40, 60, -90, 135)$.

(iv) $(m, n) = (-3, 2)$, donc $m + n = -1$ et $p = -5 = \frac{a}{n^3}$, ce qui donne $a = -5 \cdot (2)^3 = -40$.

En ce cas, $r = -\frac{3}{2}$, et on obtient donc le même quadruplet que dans (iii).

(v) $(m, n) = (2, 3)$, donc $m + n = 5$ et $p = 1$, ce qui donne $a = 1 \cdot 3^3 = 27$.

En ce cas, $r = \frac{2}{3}$, et on obtient $(a, b, c, d) = (27, 18, 12, 8)$.

(vi) $(m, n) = (-2, -3)$ donne le même quadruplet que dans (v).

(vii) $(m, n) = (-2, 3)$, donc $m + n = 1$ et $p = 5$, ce qui donne $a = 5 \cdot 3^3 = 135$.

En ce cas, $r = \frac{m}{n} = -\frac{2}{3}$, et on obtient $(a, b, c, d) = (135, -90, 60, -40)$.

(viii) $(m, n) = (2, -3)$ donne le même quadruplet que dans (vii).

3^e cas : $m^2 + n^2 = 5$

Lorsque $m^2 + n^2 = 5$, les solutions entières sont $(m, n) = (\pm 2, \pm 1)$ et $(\pm 1, \pm 2)$.

Puisque $m^2 + n^2 \geq m + n$, $m + n = 1$ et $p = 13$, ou $m + n = -1$ et $p = -13$.

Cela donne les quatre possibilités suivantes :

(i) $(m, n) = (2, -1)$, donc $m + n = 1$ et $p = 13 = \frac{a}{n^3}$, ce qui donne $a = 13 \cdot (-1)^3 = -13$.

En ce cas, $r = -2$, et on obtient $(a, b, c, d) = (-13, 26, -52, 104)$.

(ii) $(m, n) = (-2, 1)$ donne le même quadruplet que dans (i).

(iii) $(m, n) = (-1, 2)$, donc $m + n = 1$ et $p = 13$, ce qui donne $a = 13 \cdot 2^3 = 104$.

En ce cas, $r = -\frac{1}{2}$, et on obtient $(a, b, c, d) = (104, -52, 26, -13)$.

(iv) $(m, n) = (1, -2)$ donne le même quadruplet que dans (iii).

Les quadruplets d'entiers (a, b, c, d) tels que a, b, c, d forment une suite géométrique et $a + b + c + d = 65$ sont : $(8, 12, 18, 27)$, $(27, 18, 12, 8)$, $(-40, 60, -90, 135)$, $(135, -90, 60, -40)$, $(-13, 26, -52, 104)$ et $(104, -52, 26, -13)$. On peut vérifier que chacun de ces quadruplets forme bien une suite géométrique dont la somme est 65.