



Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2025

le jeudi 3 avril 2025
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 4 avril 2025
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) D'après le graphique, on compte 1 élève âgé de 14 ans, 0 élève âgé de 15 ans, 3 élèves âgés de 16 ans et 2 élèves âgés de 17 ans.
Le nombre total d'élèves dans le club d'arts est donc $1 + 0 + 3 + 2 = 6$.
- (b) En utilisant le résultat de la partie a), la moyenne d'âge des élèves du club d'arts est $\frac{(1 \times 14) + (3 \times 16) + (2 \times 17)}{6} = \frac{96}{6} = 16$.
- (c) D'après la partie b), la somme des âges des 6 élèves actuellement dans le club d'arts est de 96.
Si n élèves de 15 ans se joignent au club, le nombre d'élèves sera $6 + n$ et la somme de leurs âges sera $96 + 15n$.
La nouvelle moyenne d'âge de tous les élèves du club est de 15,5.
En résolvant pour n , on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{96 + 15n}{6 + n} &= 15,5 \\ 96 + 15n &= 15,5(6 + n) \\ 96 + 15n &= 93 + 15,5n \\ 3 &= 0,5n\end{aligned}$$

et donc $n = \frac{3}{0,5} = 6$. Par conséquent, le nombre d'élèves de 15 ans à se joindre au club d'arts pour que la moyenne d'âge des élèves du club soit de 15,5 est 6.

2. Pour chaque partie, le carré magique complété est présenté après la partie d).

- (a) La constante magique est 18, donc le nombre manquant dans la première ligne est $18 - 7 - 2 = 9$. En considérant la diagonale allant du coin supérieur droit au coin inférieur gauche, on obtient $9 + n + 3 = 18$, donc $n = 6$.
- (b) En partant de la première colonne, la constante magique est $8 + 9 + 4 = 21$. Ainsi, le nombre manquant de la deuxième ligne est $21 - 9 - 5 = 7$. En considérant la diagonale allant du coin supérieur droit au coin inférieur gauche, le nombre manquant dans le coin supérieur droit est $21 - 7 - 4 = 10$.
À partir de la première ligne, on obtient $8 + p + 10 = 21$, donc $p = 3$.

7	2	
	n	
3		

8	p	
9		5
4		

- (c) *Solution 1*

La somme des nombres dans la première colonne est égale à la somme des nombres dans la troisième ligne. Puisque ces deux sommes ont en commun le nombre manquant dans le coin inférieur gauche, la somme des deux autres nombres de la première colonne doit être égale à la somme des deux nombres restants de la troisième ligne. Ainsi, $13 + 7 = (r + 1) + (r + 3)$, et donc $20 = 2r + 4$, soit $16 = 2r$, d'où l'on obtient $r = 8$.

13		r
7		17
	$r+1$	$r+3$

Solution 2

La somme des nombres dans la troisième colonne est $r + 17 + (r + 3) = 2r + 20$, et donc la somme des nombres dans la troisième ligne est également $2r + 20$. Ainsi, le nombre manquant de la troisième ligne est $(2r + 20) - (r + 1) - (r + 3) = 16$.

En partant de la première colonne, la constante magique est $13 + 7 + 16 = 36$, et donc $2r + 20 = 36$, soit $2r = 16$, d'où l'on obtient $r = 8$.

- (d) La somme des nombres dans la troisième ligne est $(u + 2) + (u - 5) + u = 3u - 3$, et donc la somme des nombres dans la deuxième colonne est également $3u - 3$. Ainsi, le nombre manquant dans la deuxième colonne est $(3u - 3) - (u + 3) - (u - 5) = u - 1$, comme illustré.

	$u+3$	
	$u-1$	12
$u+2$	$u-5$	u

La somme des nombres sur la diagonale allant du coin supérieur droit au coin inférieur gauche est égale à la somme des nombres dans la troisième colonne. Puisque ces deux sommes ont en commun le nombre manquant dans le coin supérieur droit, la somme des deux autres nombres sur la diagonale est égale à la somme des deux autres nombres de la troisième colonne.

Autrement dit, $(u + 2) + (u - 1) = u + 12$, soit $2u + 1 = u + 12$, donc $u = 11$.

(a)

7	2	9
8	6	4
3	10	5

(b)

8	3	10
9	7	5
4	11	6

(c)

13	15	8
7	12	17
16	9	11

(d)

9	14	7
8	10	12
13	6	11

3. (a) Dans le rectangle $ABCD$, le côté AD est parallèle à l'axe des ordonnées et, par conséquent, le côté BC est également parallèle à l'axe des ordonnées.

Ainsi, les côtés AD et BC sont verticaux, et les points A et D ont la même abscisse, soit 10, et les points B et C ont également la même abscisse, soit 20.

De manière similaire, AB est parallèle à l'axe des abscisses et, par conséquent, CD est également parallèle à l'axe des abscisses.

Ainsi, les côtés AB et CD sont horizontaux, et les points A et B ont la même ordonnée, soit 15, et les points C et D ont également la même ordonnée, soit 27.

Ainsi, les coordonnées de B sont $(20, 15)$, et les coordonnées de D sont $(10, 27)$, comme illustré.

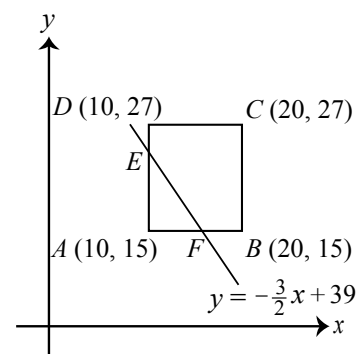
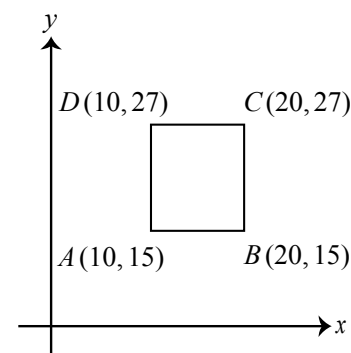
Puisque $AB = 20 - 10 = 10$ et $BC = 27 - 15 = 12$, l'aire du rectangle $ABCD$ est $10 \times 12 = 120$.

- (b) Le point E est situé sur AD , comme illustré, et son abscisse est donc 10. Le point E se trouve également sur la droite d'équation $y = -\frac{3}{2}x + 39$, et donc pour $x = 10$, son ordonnée est $y = -\frac{3}{2}(10) + 39 = 24$.

Le point F est situé sur AB , et son ordonnée est donc 15. Le point F se trouve sur la droite d'équation $y = -\frac{3}{2}x + 39$. Pour $y = 15$, on a $15 = -\frac{3}{2}x + 39$, soit $-24 = -\frac{3}{2}x$, d'où l'on obtient $x = 24 \times \frac{2}{3} = 16$.

Le point E a pour coordonnées $(10, 24)$, donc $EA = 24 - 15 = 9$. Le point F a pour coordonnées $(16, 15)$, donc $AF = 16 - 10 = 6$. L'aire du triangle EAF est $\frac{1}{2}(EA)(AF) = \frac{1}{2}(9)(6) = 27$.

L'aire du pentagone $BCDEF$ est égale à la différence entre l'aire du rectangle $ABCD$ et celle du triangle EAF , soit $120 - 27 = 93$.



(c) *Solution 1*

Le point G est situé sur AD , comme illustré, et son abscisse est donc 10.

Le point G se trouve également sur la droite d'équation $y = mx + b$, donc pour $x = 10$, son ordonnée est $y = 10m + b$.

Le point H est situé sur AB , comme illustré, et son ordonnée est donc 15.

Le point H se trouve également sur la droite d'équation $y = mx + b$, donc pour $y = 15$, on obtient $15 = mx + b$, soit $15 - b = mx$.

Ainsi, $x = \frac{15 - b}{m}$.

Le point G a pour coordonnées $(10, 10m + b)$, et donc

$$GA = 10m + b - 15.$$

Le point H a pour coordonnées $\left(\frac{15 - b}{m}, 15\right)$, et donc $AH = \frac{15 - b}{m} - 10$.

L'aire du triangle GAH est $\frac{1}{2}(GA)(AH) = \frac{1}{2}(10m + b - 15) \left(\frac{15 - b}{m} - 10\right)$.

En posant l'aire du triangle GAH égale à $-\frac{8}{m}$ et en simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(10m + b - 15) \left(\frac{15 - b}{m} - 10\right) &= -\frac{8}{m} \\ 2m \times \frac{1}{2}(10m + b - 15) \left(\frac{15 - b}{m} - 10\right) &= -\frac{8}{m} \times 2m \quad (\text{since } m \neq 0) \\ (10m + b - 15) \left(m \times \left(\frac{15 - b}{m} - 10\right)\right) &= -16 \\ (10m + b - 15)(15 - b - 10m) &= -16 \\ (10m + b - 15)^2 &= 16 \\ 10m + b - 15 &= \pm 4 \end{aligned}$$

donc $10m + b = 11$, soit $10m + b = 19$.

Puisque $10m + b$ est l'ordonnée de G , et que G est situé entre $A(10, 15)$ et $D(10, 27)$, on a $15 < 10m + b < 27$ et donc $10m + b \neq 11$.

Les entiers m et b satisfont $m < 0$ et $b < 50$.

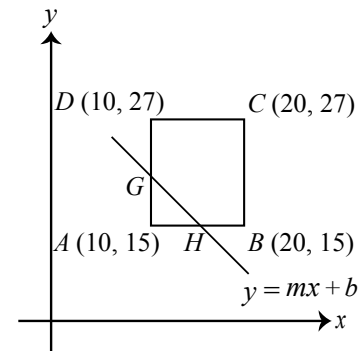
Supposons que $m = -1$, la plus grande valeur possible de m .

Dans ce cas, $10(-1) + b = 19$, donc $b = 29$. Lorsque $(m, b) = (-1, 29)$, on vérifie que l'abscisse de H est $x = \frac{15 - b}{m} = \frac{15 - 29}{-1} = 14$, et donc H est situé entre A et B .

Si $m = -2$, alors $10(-2) + b = 19$, et donc $b = 39$. Lorsque $(m, b) = (-2, 39)$, l'abscisse de H est $x = \frac{15 - 39}{-2} = 12$, et donc H est situé entre A et B .

Si $m = -3$, alors $10(-3) + b = 19$, donc $b = 49$. Lorsque $(m, b) = (-3, 49)$, l'abscisse de H est $x = \frac{15 - 49}{-3} = \frac{34}{3}$, et donc H est situé entre A et B .

Si $m \leq -4$, alors $b = 19 - 10m \geq 19 - 10(-4) = 59$ ce qui est impossible puisque $b < 50$. Les couples ordonnés d'entiers (m, b) tels que $b < 50$ et pour lesquels l'aire du triangle GAH est égale à $-\frac{8}{m}$, sont $(-1, 29)$, $(-2, 39)$ et $(-3, 49)$.



Solution 2

Le point G est situé sur AD , comme illustré, et a donc pour abscisse 10.

Notons l'ordonnée de G par g .

Puisque G se trouve entre A et D , on a $15 < g < 27$ et $GA = g - 15$.

Le point H est situé sur AB , comme illustré, et a donc pour ordonnée 15.

Notons l'abscisse de H par h .

Puisque H se trouve entre A et B , on a $10 < h < 20$ et $AH = h - 10$.

Ainsi, l'aire du triangle GAH est $\frac{1}{2}(GA)(AH) = \frac{1}{2}(g - 15)(h - 10)$.

L'aire du triangle GAH est aussi égale à $-\frac{8}{m}$, donc $\frac{1}{2}(g - 15)(h - 10) = -\frac{8}{m}$, soit $(g - 15)(h - 10) = -\frac{16}{m}$.

La droite passant par $G(10, g)$ et $H(h, 15)$ a pour pente $\frac{g - 15}{10 - h}$.

Or, cette droite a pour équation $y = mx + b$ et a donc pour pente m .

En égalant les pentes, on obtient $\frac{g - 15}{10 - h} = m$.

En utilisant les équations $\frac{g - 15}{10 - h} = m$ et $(g - 15)(h - 10) = -\frac{16}{m}$, ainsi que la propriété suivante : si $p = q$ et $r = s$, alors $p \times r = q \times s$, on obtient ce qui suit :

$$\begin{aligned} \frac{g - 15}{10 - h} \times (g - 15)(h - 10) &= m \times -\frac{16}{m} \\ -\frac{g - 15}{h - 10} \times (g - 15)(h - 10) &= m \times -\frac{16}{m} \\ (g - 15)^2 &= 16 \quad (\text{puisque ni } m \text{ ni } h - 10 \text{ ne sont nuls}) \\ g - 15 &= \pm 4 \end{aligned}$$

donc $g = 15 + 4 = 19$, soit $g = 15 - 4 = 11$.

Puisque $15 < g < 27$, on a $g = 19$.

La droite d'équation $y = mx + b$ passe par $G(10, 19)$, donc $19 = 10m + b$, soit $b = 19 - 10m$.

Les deux nombres m et b sont des entiers, avec $m < 0$ et $b < 50$.

Supposons que $m = -1$, la plus grande valeur possible de m .

Dans ce cas, $b = 19 - 10(-1) = 29$. Lorsque $(m, b) = (-1, 29)$, on utilise l'équation de la

droite $y = mx + b$ pour vérifier que l'abscisse de $H(h, 15)$ est $h = \frac{15 - b}{m} = \frac{15 - 29}{-1} = 14$, et donc $H(14, 15)$ se situe entre $A(10, 15)$ et $B(20, 15)$, comme requis.

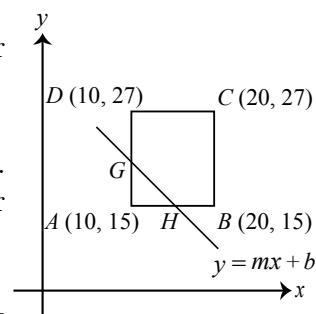
Si $m = -2$, alors $b = 19 - 10(-2) = 39$. Lorsque $(m, b) = (-2, 39)$, on peut montrer de la même manière que $h = 12$ et donc H se situe entre A et B .

Si $m = -3$, alors $b = 19 - 10(-3) = 49$. Lorsque $(m, b) = (-3, 49)$, on obtient $h = \frac{34}{3}$ et donc

H se situe entre A et B .

Si $m \leq -4$, alors $b = 19 - 10m \geq 19 - 10(-4) = 59$ ce qui est impossible puisque $b < 50$.

Les couples ordonnés d'entiers (m, b) tels que $b < 50$ et pour lesquels l'aire du triangle GAH est égale à $-\frac{8}{m}$, sont $(-1, 29)$, $(-2, 39)$ et $(-3, 49)$.



4. (a) La factorisation en nombres premiers de 400 est $2^4 5^2$, donc 400 a $(4 + 1)(2 + 1) = 15$ diviseurs strictement positifs.

Puisque $20^2 = 400$, l'un de ces 15 diviseurs est 20, d'où on obtient le couple ordonné $(a, b) = (20, 20)$.

Les 14 diviseurs strictement positifs restants donnent $\frac{14}{2} = 7$ paires d'entiers strictement positifs (a, b) avec $a < b$. Une de ces 7 paires contient $a = 1$, ce qu'il faut omettre puisque $a > 1$.

Ainsi, il y a 6 couples ordonnés (a, b) avec $a < b$ et 1 avec $a = b$, pour un total de 7 couples ordonnés d'entiers strictement positifs (a, b) pour lesquels $ab = 400$ et $1 < a \leq b$.

(Ces couples ordonnés sont $(2, 200)$, $(4, 100)$, $(5, 80)$, $(8, 50)$, $(10, 40)$, $(16, 25)$ et $(20, 20)$.)

- (b) La factorisation en nombres premiers de 270 000 est $2^4 3^3 5^4$.

On compte le nombre de manières de distribuer chacun des facteurs premiers parmi p , q et r .

Les trois facteurs 3 peuvent être attribués à un seul des nombres p , q ou r .

Cela peut se réaliser de 3 manières différentes.

Deux facteurs 3 peuvent être attribués à un nombre parmi p , q ou r , tandis que le facteur restant est attribué à un autre nombre. Il y a 3 choix pour le nombre recevant deux facteurs 3 et 2 choix pour le nombre recevant le facteur restant, soit $3 \times 2 = 6$ manières.

Enfin, chaque facteur 3 peut être attribué à un nombre différent parmi p , q et r , ce qui donne une seule manière de procéder.

En conséquence, il y a $3 + 6 + 1 = 10$ manières de distribuer les facteurs égaux à 3 parmi p , q et r .

Tous les quatre facteurs premiers égaux à 2 peuvent être attribués à un seul des nombres p , q ou r .

Cela peut se réaliser de 3 manières différentes.

Trois facteurs 2 peuvent être attribués à un nombre parmi p , q ou r , tandis que le facteur restant est attribué à un autre nombre. Il y a 3 choix pour le nombre recevant trois facteurs 2 et 2 choix pour le nombre recevant le facteur restant, soit $3 \times 2 = 6$ manières.

Deux facteurs 2 peuvent être attribués à un des nombres parmi p , q ou r , et les deux autres facteurs à un autre nombre parmi les restants. Il y a 3 choix pour le nombre recevant les deux premiers facteurs 2 et 2 choix pour le nombre recevant les deux autres facteurs restants. Cependant, puisque l'attribution des facteurs de 2 à chaque nombre est symétrique, on compte chaque possibilité deux fois.

Ainsi, il y a $\frac{3 \times 2}{2} = 3$ manières de réaliser cette attribution.

(Cela revient à compter le nombre de manières de choisir le nombre qui ne reçoit aucun facteur 2.)

Enfin, deux facteurs 2 peuvent être attribués à un des nombres de 3 manières différentes, et un facteur 2 peut être attribué à chacun des deux nombres restants d'une seule façon, donc il y a 3 manières de réaliser cette distribution. Au total, il y a $3 + 6 + 3 + 3 = 15$ manières de distribuer les facteurs de 2 parmi p , q et r .

Par analogie, il y a 15 manières de distribuer les quatre facteurs 5 parmi p , q et r . En conclusion, il y a $10 \times 15 \times 15 = 2250$ distributions des facteurs premiers, ce qui correspond à 2250 triplets ordonnés d'entiers strictement positifs (p, q, r) tels que $pqr = 270\,000$.

- (c) Tel que montré dans la partie b), il y a 2250 triplets ordonnés d'entiers strictement positifs (x, y, z) tels que $xyz = 270\,000 = 2^4 3^3 5^4$.

Pour des valeurs distinctes de x , y et z , ces 2250 triplets incluent les 6 ordres possibles de

x , y et z .

Par exemple, chacun des 6 ordres de $(5^4, 2^4, 3^3)$ est inclus parmi les 2250 triplets.

Parmi ces 6, seul $(2^4, 3^3, 5^4)$ est compté dans la partie c), puisque l'on impose la condition $x \leq y \leq z$.

Ainsi, il faut déterminer le nombre de triplets ordonnés de la partie b) qui ne satisfont pas $x \leq y \leq z$ et soustraire ce nombre de 2250 (on appelle cela l'étape 1).

De plus, on demande des triplets ordonnés pour lesquels $1 < x$. Il faut donc également déterminer le nombre de triplets ordonnés pour lesquels $x = 1$ et soustraire ce nombre du nombre de triplets restants après l'étape 1. On appelle cela l'étape 2.

Étape 1

Puisque 270 000 n'est pas un cube parfait, il est impossible d'avoir $x = y = z$.

Donc, chacun des triplets ordonnés parmi les 2250 appartient exactement à l'un des deux cas suivants : soit exactement deux parmi x , y et z sont égaux, soit les trois sont distincts.

Supposons qu'exactly deux parmi x , y et z sont égaux, par exemple $x = y$.

Dans ce cas, $xyz = x^2z = 2^43^35^4$, et donc x^2 est un carré parfait diviseur de $2^43^35^4$.

Tout diviseur de $2^43^35^4$ qui est un carré parfait s'écrit sous la forme $2^u3^v5^w$ où $u = 0, 2$ ou 4 , $v = 0$ ou 2 , et $w = 0, 2$ ou 4 .

Il y a 3 choix pour u , 2 choix pour v et 3 choix pour w , donc il y a $3 \times 2 \times 3 = 18$ diviseurs carrés parfaits de $2^43^35^4$.

Lorsque exactement deux des facteurs sont égaux, il y a 3 manières d'ordonner ces trois facteurs. On obtient donc $3 \times 18 = 54$ triplets ordonnés pour lesquels exactement deux parmi x , y et z sont égaux.

Ainsi, le nombre de triplets ordonnés pour lesquels x , y et z sont distincts est $2250 - 54 = 2196$.

Pour le cas où x , y et z ont des valeurs distinctes, les 2196 triplets incluent chacun des 6 ordres possibles de x , y et z .

Ainsi, le nombre de triplets ordonnés (x, y, z) tels que $1 \leq x < y < z$ est $\frac{2196}{6} = 366$.

Puisqu'il y a 18 triplets ordonnés (x, y, z) pour lesquels x , y , z ne sont pas tous distincts (exactement deux sont égaux), le nombre de triplets ordonnés (x, y, z) tels que $1 \leq x \leq y \leq z$ est $366 + 18 = 384$. Ceci complète l'étape 1.

Étape 2

On demande que chacun de x , y , z soit strictement supérieur à 1. Dans cette dernière étape, on détermine donc le nombre de triplets ordonnés pour lesquels $x = 1$, puis on soustrait ce nombre de 384.

Lorsque $x = 1$, le produit $xyz = 2^43^35^4$ devient $yz = 2^43^35^4$, c'est-à-dire que (y, z) est une paire de facteurs strictement positifs de $2^43^35^4$.

Puisque $2^43^35^4$ possède $5 \times 4 \times 5 = 100$ facteurs strictement positifs, il y a $\frac{100}{2} = 50$ paires (y, z) avec $y \leq z$, et donc 50 paires ordonnées pour lesquelles $x = 1$.

Ainsi, le nombre de triplets ordonnés d'entiers strictement positifs (x, y, z) tels que $xyz = 270\,000$ et $1 < x \leq y \leq z$ est $384 - 50 = 334$.