



Le CENTRE d'ÉDUCATION  
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

## *Concours Fryer 2025*

le jeudi 3 avril 2025  
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 4 avril 2025  
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

*Solutions*

1. (a) Au cours de la première semaine, Azizi a vendu un total de  $15 + 23 + 18 + 15 + 7 = 78$  tablettes de chocolat.
- (b) Au cours de la deuxième semaine, Azizi a vendu un total of  $7 + 15 + x + 23 + x = 45 + 2x$  tablettes de chocolat, donc  $45 + 2x = 73$ . Après avoir résolu  $45 + 2x = 73$ , nous obtenons  $2x = 28$ , et donc  $x = 14$ .
- (c) Au cours de la troisième semaine, Azizi a vendu  $y$  tablettes de chocolat le lundi,  $y + 6$  le mardi,  $y + 12$  le mercredi,  $y + 18$  le jeudi, et  $y + 24$  le vendredi.  
 Au total, il a vendu  $y + (y + 6) + (y + 12) + (y + 18) + (y + 24) = 5y + 60$  tablettes de chocolat, et donc  $5y + 60 = 100$ . Après avoir résolu  $5y + 60 = 100$ , nous obtenons  $5y = 40$ , et donc  $y = 8$ .  
 (Pouvez-vous expliquer la raison pour laquelle la quantité totale vendue,  $5y + 60$ , est égale à 5 fois la quantité qu’Azizi a vendu le mercredi ?)
2. (a) Nous organisons les résultats obtenus dans un tableau, semblable à l’exemple ci-dessous.  
 Un joueur gagnant est accordé  $W = 3$  points pour chaque partie gagnée.

| Résultats<br>des parties | Points accordés |      |      |
|--------------------------|-----------------|------|------|
|                          | Ava             | Beau | Cato |
| Ava et Beau égalité      | 1               | 1    | —    |
| Beau perd contre Cato    | —               | 0    | 3    |
| Ava et Cato égalité      | 1               | —    | 1    |

À la fin du tournoi, Ava a gagné 2 points, Beau a gagné 1 point, et Cato a gagné 4 points, et donc  $S = 2 + 1 + 4 = 7$ .

Par ailleurs, 2 parties se terminent par une partie nulle, et pour chaque partie se terminant par une égalité, 2 points sont accordés (1 point à chaque joueur). Ainsi, les deux parties nulles accordent  $2 \times 2 = 4$  points à  $S$ . L’autre partie s’est terminée avec un joueur gagnant, et donc 3 points sont accordés (3 au joueur gagnant, 0 au joueur perdant). Ainsi, cette partie accorde 3 points à  $S$ , et donc  $S = 4 + 3 = 7$ .

- (b) Chaque partie se terminant en partie nulle accorde 2 points à  $S$  (1 point à chaque joueur). Si les 3 parties se terminent en partie nulle, alors  $S = 3 \times 2 = 6$ , tel que requis.

Ensuite, nous confirmons que les 3 parties se terminant en parties nulles est la seule possibilité.

Chaque partie déclarant un gagnant accorde 4 points à  $S$  (4 au joueur gagnant, 0 au joueur perdant).

Si les 3 parties se terminent avec un joueur gagnant, alors  $S = 3 \times 4 = 12$ .

Si 2 parties se terminent avec un joueur gagnant, et 1 partie est une partie nulle, alors  $S = 2 \times 4 + 2 = 10$ .

Si 1 partie se termine avec un joueur gagnant, et 2 parties sont des parties nulles, alors  $S = 4 + 2 \times 2 = 8$ .

Ainsi, si  $W = 4$  et  $S = 6$ , la seule possibilité est que les 3 parties se terminent en parties nulles.

- (c) Le tournoi se termine par une partie nulle sur trois, et donc deux des parties se terminent avec un joueur gagnant.

La partie se terminant par une partie nulle accorde 2 à  $S$  (1 point à chaque joueur).

Une partie se terminant avec un joueur gagnant accorde  $W$  à  $S$ , et donc deux parties se terminant avec un joueur gagnant accorde  $2W$  à  $S$ .

Dans ce cas,  $S = 2W + 2$  ou  $2W + 2 = 24$  qui signifie que  $2W = 22$ , et donc  $W = 11$ .

- (d) Comme démontré au (b), il y a quatre résultats qui doivent être examinés pour déterminer les valeurs possibles de  $S$ . Le tournoi peut se terminer ayant précisément 0, 1, 2, ou 3

parties nulles.

Si le tournoi se termine avec 0 partie nulle, alors chacune des 3 parties déclare un joueur gagnant, et ainsi  $S = 3W$ . Dans ce cas,  $3W = 21$  et donc  $W = 7$ .

Si le tournoi se termine avec 1 partie nulle, alors chacune des 2 parties déclare un joueur gagnant, et ainsi  $S = 2W + 2$ . Dans ce cas,  $2W + 2 = 21$  ou  $2W = 19$  ce qui est impossible puisque  $W$  est un entier.

Si le tournoi se termine avec 2 parties nulles, alors 1 partie déclare un joueur gagnant, et ainsi

$S = W + 2 \times 2$ . Dans ce cas,  $W + 4 = 21$  ou  $W = 17$ .

En dernier lieu, si le tournoi se termine avec 3 parties nulles, alors 0 partie déclare un joueur gagnant, et ainsi  $S = 3 \times 2 = 6$ , et donc  $S$  ne peut être égal à 21.

Si le tournoi se termine avec  $S = 21$ , les valeurs de l'entier possible de  $W$  sont 7 et 17.

3. (a) Un entier positif  $n > 1$  est un carré strictement parfait lorsque l'exposant de chaque facteur premier de la factorisation première de  $n$  est pair.

Notons que  $2^3 \times 3^2$  comprend un exposant impair au facteur premier 2, et un exposant pair au facteur premier 3.

Alors,  $2^3 \times 3^2 \times j$  est un carré parfait lorsque  $j$  est égal au produit d'un nombre impair des facteurs de 2 et d'un nombre pair de chaque facteur primaire supplémentaire plus grand que 2 (y compris la possibilité d'aucun facteur primaire supplémentaire).

Puisque  $j \leq 20$ , alors la factorisation première de  $j$  doit comprendre soit un facteur de 2 ou trois facteurs de 2, et  $j$  ne peut comprendre cinq ou plus de facteurs de 2 puisque  $2^5 > 20$ .

Lorsque  $j = 2$ , le produit même,  $2^3 \times 3^2 \times 2 = 2^4 \times 3^2 = (2^2 \times 3) \times (2^2 \times 3)$ , est un carré parfait.

Lorsque  $j = 2^3 = 8$ , le produit même,  $2^3 \times 3^2 \times 2^3 = 2^6 \times 3^2 = (2^3 \times 3) \times (2^3 \times 3)$ , est aussi un carré parfait.

Est-il possible que la factorisation première de  $j$  comprenne un 2 et un nombre pair d'un autre facteur primaire plus grand que 2 ?

Le plus petit nombre primaire plus grand que 2 est 3, et lorsque  $j = 2 \times 3^2 = 18 < 20$ , le produit même  $2^3 \times 3^2 \times 2 \times 3^2 = 2^4 \times 3^4 = (2^2 \times 3^2) \times (2^2 \times 3^2)$ , est un carré parfait.

L'autre plus petite valeur possible de  $j$  dont la factorisation primaire comprend strictement un 2 est  $2 \times 5^2$ , ce qui est plus grand que 20. (Notez que  $j = 2 \times 3^4$  est aussi plus grand que 20.)

L'autre plus petite valeur possible de  $j$  dont la factorisation primaire comprend strictement trois facteurs de 2 est  $2^3 \times 3^2$ , ce qui est aussi plus grand que 20.

Ainsi, les entiers positifs  $j$  correspondant aux conditions données sont 2, 8 et 18.

- (b) Puisque  $3600 = 60^2$  et  $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ , alors  $3600 = (2^2 \times 3 \times 5)^2 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$ .

Ainsi, chaque diviseur de 3600 comprend au plus les facteurs primaires 2, 3 et 5, et ne peuvent comprendre tout autre facteur.

De plus, la factorisation première de chaque diviseur de 3600 comprend au plus quatre facteurs de 2, deux facteurs de 3, et deux facteurs de 5.

Supposons que  $k = 2^x \times 3^y \times 5^z$ . Alors  $20 \times k = 2^2 \times 5 \times 2^x \times 3^y \times 5^z = 2^{x+2} \times 3^y \times 5^{z+1}$  est un diviseur de  $3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$  strictement lorsque  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ , et  $0 \leq z \leq 1$ , pour les entiers  $x, y, z$ .

Tel que mentionné à la partie (a),  $20 \times k = 2^{x+2} \times 3^y \times 5^{z+1}$  est un carré parfait strictement lorsque chacun des exposants,  $x + 2$ ,  $y$ , et  $z + 1$  est pair.

Puisque  $0 \leq x \leq 2$ , alors  $x + 2$  est pair lorsque  $x = 0$  or  $x = 2$ .

Puisque  $0 \leq y \leq 2$ , alors  $y$  est pair lorsque  $y = 0$  or  $y = 2$ .

Puisque  $0 \leq z \leq 1$ , alors  $z + 1$  est pair lorsque  $z = 1$ .

Il y a 2 possibilités pour  $x$ , 2 possibilités pour  $y$ , et 1 possibilité pour  $z$ , et ainsi il y a  $2 \times 2 \times 1 = 4$  de valeurs possibles pour  $k$ .

Lorsque  $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ , nous obtenons  $k = 2^0 \times 3^0 \times 5^1 = 5$ .

Lorsque  $(x, y, z) = (0, 2, 1)$ , nous obtenons  $k = 2^0 \times 3^2 \times 5^1 = 45$ .

Lorsque  $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ , nous obtenons  $k = 2^2 \times 3^0 \times 5^1 = 20$ .

Lorsque  $(x, y, z) = (2, 2, 1)$ , nous obtenons  $k = 2^2 \times 3^2 \times 5^1 = 180$ .

Les entiers positifs  $k$  respectant les conditions données sont 5, 45, 20, et 180.

(c) Puisque  $2025 = 45^2$  et  $45 = 3^2 \times 5$ , alors  $2025 = (3^2 \times 5)^2 = 3^4 \times 5^2$ .

Puisque  $a^2$  et  $b^2$  sont des carrés parfaits, et que  $a^2 \times b^2 \times c = 2025$ , alors  $a^2$  et  $b^2$  sont chacun des diviseurs de carré parfait de 2025.

Les diviseurs de carré parfait de  $2025 = 3^4 \times 5^2$  sont 1,  $3^2$ ,  $3^4$ ,  $5^2$ ,  $3^2 \times 5^2$ , et  $3^4 \times 5^2$ .

Nous comptons le nombre de triplets ordonnés des entiers positifs  $(a, b, c)$  en examinant les 2 cas suivants : (1) Soit que  $a^2$  ou  $b^2$  est égal à 1 ; (2) Les deux,  $a^2$  et  $b^2$ , ne sont pas égaux à 1.

Cas 1 : Au moins un de  $a^2$  ou  $b^2$  est égal à 1

Supposons que  $a^2 = 1$ . Alors  $b^2$  peut être égal à chacun des diviseurs de carré parfait de 2025 énumérés précédemment.

C'est-à-dire,  $b^2$  peut être égal à chacune des 6 valeurs : 1,  $3^2$ ,  $3^4$ ,  $5^2$ ,  $3^2 \times 5^2$ , et  $3^4 \times 5^2$ .

Pour chacune des valeurs de  $b^2$ ,  $c = \frac{2025}{a^2 \times b^2}$ . Par exemple, lorsque  $a^2 = 1$  et  $b^2 = 1$ , alors

$c = \frac{3^4 \times 5^2}{1 \times 1} = 3^4 \times 5^2$ , et donc  $(a, b, c) = (1, 1, 3^4 \times 5^2)$  est un triplet ordonné possible.

Lorsque  $a^2 = 1$  et  $b^2 = 3^2$ , alors  $c = \frac{3^4 \times 5^2}{1 \times 3^2} = 3^2 \times 5^2$ , et donc  $(a, b, c) = (1, 3, 3^2 \times 5^2)$  est un triplet ordonné possible.

En continuant ainsi avec  $a^2 = 1$ , nous obtenons les 6 triples ordonnés suivants  $(a, b, c)$  :

$$(1, 1, 3^4 \times 5^2), (1, 3, 3^2 \times 5^2), (1, 3^2, 5^2), (1, 5, 3^4), (1, 3 \times 5, 3^2), (1, 3^2 \times 5, 1)$$

Pour chacun des triples ordonnés ci-dessus, à l'exception de  $(1, 1, 3^4 \times 5^2)$ , nous obtenons un nouveau triplet ordonné en échangeant  $a$  et  $b$ .

Chacun des 5 nouveaux triples ordonnés peut être déterminé en laissant  $b^2 = 1$  et en suivant le processus ci-dessus, et alors chacun satisfait aux conditions données.

Il y a un total de  $5 \times 2 + 1 = 11$  triples ordonnés dans ce cas.

Cas 2 : Les deux,  $a^2$  et  $b^2$ , n'égalent pas 1

Si un des deux,  $a^2$  ou  $b^2$ , est égal à  $3^4 \times 5^2$ , alors l'autre doit être égal à 1 (puisque  $2025 = 3^4 \times 5^2$ ).

Dans le cas (2),  $a^2$  et  $b^2$  n'égalent pas à 1, et donc chacun n'est pas égal à  $3^4 \times 5^2$ .

En retirant ceux-ci de notre liste de diviseurs de carré parfait, les valeurs possibles de  $a^2$  et  $b^2$  qui restent sont :  $3^2$ ,  $3^4$ ,  $5^2$ , et  $3^2 \times 5^2$ .

Si  $a^2 = 3^2$ , alors  $b^2$  peut être égal à  $3^2$  ou  $5^2$  ou  $3^2 \times 5^2$ .

Si  $a^2 = 3^4$ , alors  $b^2$  peut être égal à  $5^2$ .

Si  $a^2 = 5^2$ , alors  $b^2$  peut être égal à  $3^2$  ou  $3^4$ .

En dernier lieu si  $a^2 = 3^2 \times 5^2$ , alors  $b^2$  peut être égal à  $3^2$ .

Dans chaque cas, la valeur de  $c$  peut être déterminée comme elle l'a été dans le Cas (1).

Ainsi, nous obtenons les 7 triples ordonnés suivants  $(a, b, c)$  :

$$(3, 3, 5^2), (3, 5, 3^2), (3, 3 \times 5, 1), (3^2, 5, 1), (5, 3, 3^2), (5, 3^2, 1), (3 \times 5, 3, 1)$$

Le nombre de triples ordonnés ayant des entiers positifs  $(a, b, c)$  afin que  $a^2 \times b^2 \times c = 2025$  est  $11 + 7 = 18$ .

4. (a) Nous débutons en plaçant le point  $E(4, 4)$  sur le segment  $CD$ , comme il est indiqué.

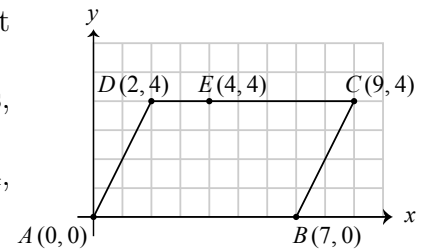
Afin de déterminer l'aire de chacun des trois triangles, considérez la base de chacun d'être le segment  $AB$ .

Les points  $C$ ,  $D$  et  $E$  ont chacun la même coordonnée  $y$ , 4, et donc chacun se retrouve sur la ligne horizontale  $y = 4$ .

La hauteur de chacun des trois triangles est la distance verticale entre la ligne  $y = 4$  et l'axe  $x$  (le segment passant entre  $A$  et  $B$ ), qui est 4.

Puisque  $AB = 7$ , alors l'aire de chacun des trois triangles est  $\frac{1}{2} \times 7 \times 4 = 14$ .

La somme des aires du  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ABD$ , et  $\triangle ABE$  est  $3 \times 14 = 42$ .



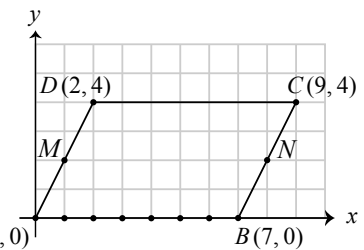
- (b) Le  $\triangle CDG$  a une aire pas égal à zéro, donc  $G$  ne peut pas se retrouver sur le segment  $CD$ .

Sur le segment  $AB$ , il y a 8 possibilités pour le point  $G$ .

Ceux-ci sont les points  $(k, 0)$  pour les entiers  $0 \leq k \leq 7$ .

Sur le segment  $AD$ ,  $(1, 2)$  est le seul point supplémentaire pour lequel les coordonnées sont des entiers. De même, la coordonnée  $(8, 2)$  est la seule possibilité supplémentaire pour le point  $G$  sur le segment  $BC$ . Les points  $(1, 2)$  et  $(8, 2)$  sont identifiés respectivement  $M$  et  $N$ , comme il est indiqué.

Au total, il y a 10 possibilités pour le point  $G$ .



- (c) Chacun de ces triangles a trois sommets choisis parmi les 18 points ayant des coordonnées de nombres entiers sur le périmètre de  $ABCD$ , pourvu que les trois sommets ne se retrouvent pas tous sur le même segment.

Ces 18 points ayant des coordonnées de nombres entiers sont les 8 points sur le segment  $AB$  (y compris  $A$  et  $B$ ), les 8 points sur le segment  $CD$  (y compris  $C$  et  $D$ ), et les 2 points  $M(1, 2)$  et  $N(8, 2)$ .

Chacun des triangles est décrit précisément par une des situations suivantes :

- le nombre de sommet de triangles aux points  $M$  et  $N$  est 0
- le nombre de sommet de triangles aux points  $M$  et  $N$  est 1
- le nombre de sommet de triangles aux points  $M$  et  $N$  est 2

Cas 1 : le nombre de sommet de triangles aux points  $M$  et  $N$  est 0

Dans ce cas, 2 sommets sont sur le segment  $AB$  et 1 sommet est sur le segment  $CD$ , ou vice versa.

Considérez les triangles des 2 sommets sur le segment  $AB$  et 1 sommet sur le segment  $CD$ . Considérez la base de chacun des triangles se trouvant sur le segment  $AB$ .

Il y a 1 triangle avec le sommet à  $A(0, 0)$  et  $B(7, 0)$ , et alors a une longueur de base de 7.

Il y a 2 triangles avec une longueur de base de 6. Un de ces triangles a des sommets à  $A(0, 0)$  et  $(6, 0)$ , et l'autre a des sommets à  $(1, 0)$  et  $B(7, 0)$ .

En continuant ainsi, il y a 3 triangles avec une longueur de base de 5, 4 triangles avec une longueur de base de 4, 5 triangles avec une longueur de base de 3, 6 triangles avec une longueur de base de 2, et 7 triangles avec une longueur de base de 1.

Chacun de ces triangles a une hauteur de 4 puisque tous les points sur le segment  $CD$  sont d'une distance verticale de 4 avec la base qui se trouve le long du segment  $AB$  (comme à la partie (a)).

Supposons que le point  $Q$  est un tel point sur le segment  $CD$  avec des coordonnées de nombres entiers.

La somme de tous les aires des triangles ayant 2 sommets sur le segment  $AB$  et 1 sommet

au point  $Q$  est

$$\frac{1}{2} \times 4 \times (1(7) + 2(6) + 3(5) + 4(4) + 5(3) + 6(2) + 7(1)) = \frac{1}{2} \times 4 \times 84 = 168$$

De plus, pour chacune de ces bases, il y a 8 possibilités pour le troisième sommet se trouvant sur le segment  $CD$ . Celles-ci sont les points  $(k, 4)$  pour les entiers  $2 \leq k \leq 9$ .

Ainsi, la somme des aires des triangles avec 2 sommets sur le segment  $AB$  et 1 sommet sur le segment  $CD$  est  $168 \times 8 = 1344$ .

De même, la somme des aires de tous les triangles ayant 2 sommets sur le segment  $CD$  et 1 sommet sur le segment  $AB$  est aussi 1 344, et donc la somme des aires de tous les triangles au Cas (1) est  $1344 \times 2 = 2688$ .

Cas 2 : le nombre de sommet de triangles aux points  $M$  et  $N$  est 1

Ce cas peut être divisé en deux sous-cas, comme suit :

(i) 2 sommets sont sur le segment  $AB$  (ou 2 sommets sont sur le segment  $CD$ ), et 1 sommet est sur le segment  $M$  ou  $N$

(ii) 1 sommet est sur le segment  $AB$ , 1 sommet est sur le segment  $CD$ , et 1 sommet est sur le segment  $M$  ou  $N$

Sous-cas 2(i) : 2 sommets sur le segment  $AB$  (ou 2 sommets sur le segment  $CD$ ), et 1 sommet est

Considérez les triangles avec 2 sommets sur le segment  $AB$  et 1 sommet, soit sur le segment  $M$  ou  $N$ .

Considérez la base de chacun de ces triangles qui se trouve le long du segment  $AB$ .

Les données et les longueurs de ces bases sont les mêmes qu'au Cas (1).

Chacun de ces triangles a une hauteur de 2 puisque les points  $M$  et  $N$  sont chacun une distance verticale de 2 de toute base se trouvant le long du segment  $AB$ .

La somme des aires de tous les triangles avec 2 sommets sur le segment  $AB$  et 1 sommet au point  $M$  est

$$\frac{1}{2} \times 2 \times (1(7) + 2(6) + 3(5) + 4(4) + 5(3) + 6(2) + 7(1)) = \frac{1}{2} \times 2 \times 84 = 84$$

De plus, pour chacune de ces bases, le troisième sommet peut aussi être le point  $N$ .

Ainsi, la somme des aires de tous les triangles avec 2 sommets sur le segment  $AB$  et 1 sommet, soit au point  $M$  ou  $N$  est  $84 \times 2 = 168$ .

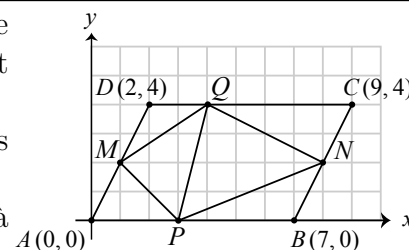
De même, la somme de tous les aires des triangles avec 2 sommets sur le segment  $CD$  et 1 sommet, soit sur le point  $M$  ou  $N$  est 168, et donc la somme des aires de tous les triangles du sous-cas 2(i) est  $168 \times 2 = 336$ .

Sous-cas 2(ii) : 1 sommet est sur le segment  $AB$ , 1 sommet est sur le segment  $CD$ , et 1 sommet es

Considérez deux points fixes avec des coordonnées de nombres entiers, le point  $P$  sur le segment  $AB$ , et le point  $Q$  sur le segment  $CD$ .

Dans le diagramme, le  $\triangle PMQ$  et le  $\triangle PNQ$  sont deux tels triangles décrits au sous-cas 2(ii).

La somme des aires du  $\triangle PMQ$  et du  $\triangle PNQ$  est égale à la somme des aires du  $\triangle PMN$  et du  $\triangle QMN$ .



Considérez la base du  $\triangle PMN$  et du  $\triangle QMN$  à être le segment  $MN$ , qui a une longueur de 7. Ainsi la hauteur de chaque triangle est 2.

Alors, la somme des aires du  $\triangle PMN$  et du  $\triangle QMN$  est  $2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 7 = 14$ .

Il y a 8 possibilités pour le point  $P$  et 8 possibilités pour le point  $Q$ , et donc  $8 \times 8 = 64$  paires différentes de triangles  $PMN$  et  $QMN$  avec des aires ayant une somme de 14. (Vous devriez confirmer par vous-même que cela est vrai même si la coordonnée du point  $P$  est  $(0, 0)$  ou  $(7, 0)$  et/ou si le point  $Q$  est  $(2, 4)$  ou  $(9, 4)$ .) La somme de tous les aires des triangles au sous-cas 2(ii) est  $14 \times 64 = 896$ .

Cas 3 : le nombre de sommet de triangles aux points  $M$  et  $N$  est 2

Dans ce cas, 1 sommet est sur le segment  $AB$  (ou sur le segment  $CD$ ), 1 sommet est au point  $M$ , et 1 sommet est au point  $N$ .

Considérez les triangles avec les sommets aux points  $M$ ,  $N$ , et 1 sommet au point  $AB$ .

Considérez la base de chacun de ces triangles d'être  $MN = 7$ . Alors chaque triangle a une hauteur de 2.

Puisqu'il y a 8 possibilités de sommet sur le segment  $AB$ , ainsi la somme de tous ces triangles est

$\frac{1}{2} \times 2 \times 7 \times 8 = 56$ . De même, la somme de tous les aires des triangles avec des sommets aux points  $M$ ,  $N$ , et 1 sommet sur le segment  $CD$  est aussi 56, et donc la somme de tous les aires des triangles au Cas 3 est  $56 \times 2 = 112$ .

La somme de tous les aires des triangles ayant des sommets avec des coordonnées de nombres entiers et se trouvant sur le périmètre de  $ABCD$  est  $2688 + 336 + 896 + 112 = 4032$ .