



Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur 2025

le mercredi 12 novembre 2025
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 13 novembre 2025
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. Le mardi, Wendei mange 2 biscuits à l'heure du dîner, ce qui lui en laisse $7 - 2 = 5$. Après l'école, il achète 5 autres biscuits pour en avoir un total de $5 + 5 = 10$.

Le mercredi, Wenfei mange 2 biscuits à l'heure du dîner, ce qui lui en laisse $10 - 2 = 8$. Après l'école, il achète 8 autres biscuits pour en avoir un total de $8 + 8 = 16$.

Le jeudi, Wenfei mange 2 biscuits à l'heure du dîner, ce qui lui en laisse $16 - 2 = 14$. Après l'école, il achète 14 autres biscuits pour en avoir un total de $14 + 14 = 28$.

Le vendredi, Wenfei mange 2 biscuits à l'heure du dîner, ce qui lui en laisse $28 - 2 = 26$. Après l'école, il achète 26 autres biscuits pour en avoir un total de $26 + 26 = 52$.

RÉPONSE : 52.

2. *Solution 1*

Si l'équation est satisfaite pour tous les nombres réels x , alors elle est satisfaite pour $x = 1$. Quand $x = 1$, on a $4x - 3 = 1$ et $16x - 12 = 4$, donc on obtient $10 - k = 4$, d'où $k = 6$.

Remarque : cette solution aurait fonctionné essentiellement de la même manière pour toute valeur de x autre que $x = \frac{3}{4}$.

Solution 2

En factorisant l'expression donnée, on obtient $(4x - 3)(10 - k) = 4(4x - 3)$.

En réarrangeant, on obtient $(4x - 3)(10 - k) - 4(4x - 3) = 0$, ce qui peut être davantage factorisé en $(4x - 3)(10 - k - 4) = (4x - 3)(6 - k) = 0$.

Cela signifie que $4x - 3 = 0$ ou que $6 - k = 0$. Cependant, $4x - 3 = 0$ est vrai seulement lorsque $x = \frac{3}{4}$, mais l'équation est vraie pour tous les nombres réels x .

Par conséquent, il faut que $6 - k = 0$, donc $k = 6$.

RÉPONSE : $k = 6$

3. *Solution 1*

Il y a 6 possibilités pour le premier lancer, et il y a 6 possibilités pour le second lancer. Par conséquent, il y a un total de $6 \times 6 = 36$ possibilités pour les deux lancers.

Si le premier lancer est 1, alors il y a 5 possibilités pour le second lancer qui sont supérieures au premier lancer. Elles sont 2, 3, 4, 5 et 6.

Si le premier lancer est 2, alors il y a 4 possibilités pour le second lancer qui sont supérieures au premier lancer.

Dans le tableau ci-dessous, la première colonne contient les valeurs possibles pour le premier lancer, la deuxième colonne contient les possibilités pour le second lancer qui sont supérieures au premier lancer, et la troisième colonne contient le nombre de possibilités pour le second lancer qui sont supérieures au premier lancer.

Premier lancer	Seconds lancers possibles	# de seconds lancers
1	2, 3, 4, 5, 6	5
2	3, 4, 5, 6	4
3	4, 5, 6	3
4	5, 6	2
5	6	1
6		0

Il y a $5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 15$ paires possibles de lancers pour lesquelles le second lancer est supérieur au premier lancer. Puisqu'il y a $6 \times 6 = 36$ paires possibles de lancers, la probabilité que le second lancer soit supérieur au premier lancer est $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Solution 2

La probabilité que le second lancer soit égal au premier lancer est $\frac{1}{6}$.

La probabilité que les deux lancers soient différents est $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Pour chaque paire d'entiers distincts de 1 à 6, ces deux résultats peuvent apparaître de deux façons : soit le plus petit nombre apparaît en premier, ou soit le plus grand nombre apparaît en premier.

Par conséquent, si les deux nombres sont différents, alors il y a une probabilité de $\frac{1}{2}$ que le plus petit nombre apparaisse en premier.

Donc la probabilité que le second nombre soit supérieur au premier nombre est $\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$.

RÉPONSE : $\frac{5}{12}$

4. Puisque x et y sont des carrés parfaits, on peut les exprimer sous la forme $x = n^2$ et $y = m^2$ pour deux entiers non négatifs n et m . L'équation donnée peut être réécrite comme :

$$\begin{aligned}x - y &= 35 \\n^2 - m^2 &= 35 \\(n + m)(n - m) &= 35\end{aligned}$$

Puisque n et m sont des entiers non négatifs dont le produit n'est pas zéro, $n + m$ est un entier positif. Par conséquent, $n - m$ est également un entier positif.

Le fait que n et m soient non négatifs implique que $n + m \geq n - m$, et donc $(n + m, n - m)$ doit être une paire de diviseurs positifs de 35, avec $n - m$ égal au plus petit des deux diviseurs.

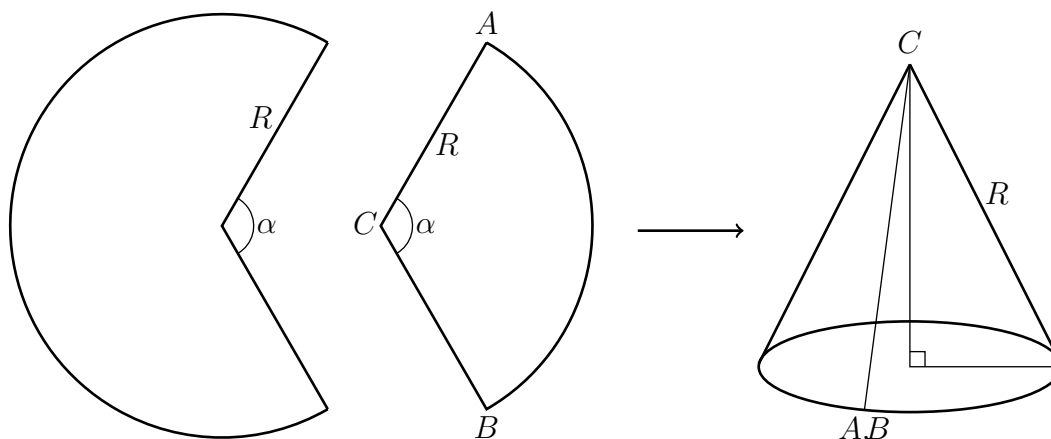
En considérant les diviseurs positifs de 35, les possibilités pour la paire $(n + m, n - m)$ se limitent à (35,1) et (7,5). Ainsi, il y a deux possibilités : $n - m = 1$ et $n + m = 35$, ou $n - m = 5$ et $n + m = 7$.

Dans le premier cas, en additionnant les deux équations, on obtient $2n = 36$, ce qui donne $n = 18$ et $m = 17$. Ce cas donne $x = 18^2 = 324$ et $y = 17^2 = 289$, donc $x + y = 324 + 289 = 613$.

Dans le second cas, en additionnant les deux équations, on obtient $2n = 12$, ce qui donne $n = 6$ et $m = 1$. Ainsi, $x = 6^2 = 36$ et $y = 1^2 = 1$, donc $x + y = 36 + 1 = 37$.

RÉPONSE : 613 and 37

5. On commence par trouver une formule générale pour le volume d'un cône formé à partir d'un secteur d'angle α en degrés et de rayon R . La construction du cône est illustrée dans le schéma ci-dessous.



La circonférence de la base du cône est égale à la longueur de l'arc du secteur. La longueur de l'arc du secteur est $\frac{\alpha}{360}$ de la circonférence totale du cercle, soit $\frac{\alpha}{360}(2\pi R) = \frac{\alpha\pi R}{180}$. Ainsi, le rayon de la base du cône est $\frac{1}{2\pi} \times \frac{\alpha\pi R}{180} = \frac{\alpha R}{360}$.

Le centre de la base du cône, le sommet du cône et un point quelconque sur la circonférence de la base forment un triangle rectangle. Les cathètes du triangle sont le rayon de la base et la hauteur du cône, et l'hypoténuse est la génératrice du cône, qui est égale à R . On obtient donc les équations suivantes, toutes équivalentes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha R}{360}\right)^2 + h^2 &= R^2 \\ h^2 &= R^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{360^2}\right) \\ h^2 &= R^2 \frac{360^2 - \alpha^2}{360^2} \\ h &= \frac{R}{360} \sqrt{360^2 - \alpha^2} \end{aligned}$$

où, à la dernière ligne, on utilise le fait que h et R sont positifs et que $360^2 > \alpha^2$ (puisque $360 > \alpha$).

On a maintenant des expressions pour le rayon et la hauteur du cône en fonction du rayon du cercle et de l'angle du secteur. En utilisant la formule du volume d'un cône, on obtient

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{\alpha R}{360}\right)^2 \frac{R}{360} \sqrt{360^2 - \alpha^2} = \frac{\pi \alpha^2 R^3 \sqrt{360^2 - \alpha^2}}{3 \times 360^3}$$

Dans notre cas, on a $R = 1$ et on cherche la valeur de θ telle que $\alpha = \theta$ et $\alpha = 2\theta$ donnent le

même volume. On a donc les équations suivantes, toutes équivalentes :

$$\begin{aligned}\frac{\pi\theta^2(1)^3\sqrt{360^2-\theta^2}}{3 \times 360^3} &= \frac{\pi(2\theta)^2(1)^3\sqrt{360^2-(2\theta)^2}}{3 \times 360^3} \\ \theta^2\sqrt{360^2-\theta^2} &= (2\theta)^2\sqrt{360^2-(2\theta)^2} \\ \sqrt{360^2-\theta^2} &= 4\sqrt{360^2-4\theta^2} \quad (\text{car } \theta \neq 0)\end{aligned}$$

et donc on peut élever les deux côtés au carré pour obtenir $360^2 - \theta^2 = 16(360^2 - 4\theta^2)$. En réarrangeant, on obtient $63\theta^2 = 15(360^2)$ ou $\theta^2 = \frac{5}{21}(360)^2$. En prenant la racine carrée, on trouve $\theta = 360\sqrt{\frac{5}{21}}$.

$$\text{RÉPONSE : } \theta = 360\sqrt{\frac{5}{21}}$$

6. *Solution 1*

Le nombre d'entiers à 8 chiffres est 9×10^7 puisqu'un entier à 8 chiffres comporte 9 choix pour le premier chiffre (1 à 9) et 10 choix pour chacun des autres chiffres (0 à 9). Lorsque les 0 sont effacés, chacun de ces 9×10^7 entiers contribue au moins un entier au nouveau total. Le défi est de compter combien d'entiers supplémentaires il contribue.

Supposons qu'un entier contribue au moins deux entiers. Dans ce cas, il doit contenir un chiffre 0 suivi immédiatement (à droite) d'un chiffre non nul. Pour construire un tel entier, on a 9 choix pour le premier chiffre, et 9 choix pour le chiffre non nul d qui vient immédiatement après le 0. Cette paire, $0d$, peut occuper les deuxième et troisième positions, les troisième et quatrième positions, et ainsi de suite jusqu'aux septième et huitième positions, pour un total de 6 possibilités. Les $8 - 3 = 5$ chiffres restants peuvent être quelconques. Cela donne un total de $9^2 \times 6 \times 10^5$.

Cela semble être un surcomptage car, par exemple, l'entier 90999099 est compté deux fois : une fois quand le 09 est placé aux deuxième et troisième positions, et une fois lorsque le 09 est placé aux sixième et septième positions.

On remarque que l'entier 90999099 contribue 3 entiers à la nouvelle liste. L'un d'eux est déjà compté dans le total de 9×10^7 , et les 2 autres apparaissent précisément parce qu'il y a deux occurrences d'un 0 suivi d'un chiffre non nul. Ainsi le nombre de fois que cet entier est compté dans le total de $9^2 \times 6 \times 10^5$ du paragraphe précédent est exactement égal au nombre d'entiers supplémentaires qu'il apporte à la liste finale.

En général, s'il y a k occurrences d'un 0 suivi immédiatement à droite d'un chiffre non nul, alors l'entier est compté k fois dans $9^2 \times 6 \times 10^5$, et il contribue k entiers supplémentaires. Par conséquent, le surcomptage de $9^2 \times 6 \times 10^5$ compte exactement le nombre d'entiers additionnels obtenus en effaçant les 0.

Ainsi, la réponse est

$$9 \times 10^7 + 9^2 \times 6 \times 10^5 = 10^5(900 + 81 \times 6) = 10^5(900 + 486) = 138\,600\,000$$

Solution 2

On note S_n le nombre d'entiers dans la liste finale après effacement des 0, en partant de tous les entiers à n chiffres. On cherche S_8 .

Pour un entier positif n , on note $T(N)$ le nombre d'entiers contriubés par N quand les zéros sont effacés. Par exemple, si N ne contient aucun chiffre égal à 0, alors $T(N) = 1$. Comme autre exemple, $T(1\,230\,456) = 2$ car il contribue les entiers 123 et 456.

Avec ces choix de notation, S_n est la somme des valeurs de $T(N)$ quand N parcourt tous les entiers positifs à n chiffres.

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_1 &= T(1) + T(2) + T(3) + T(4) + T(5) + T(6) + T(7) + T(8) + T(9) \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

De plus, $S_2 = 90$ puisque tout 0 dans un entier à 2 chiffres doit être le chiffre des unités, donc son effacement ne produit pas d'entier supplémentaire.

On considère S_3 . Il y a 900 entiers à trois chiffres au départ. Dans ce cas, la seule façon dont l'effacement d'un zéro peut produire un entier supplémentaire est lorsque l'entier est de la forme $x0y$ où x et y sont non nuls. Il y a 81 tels entiers. Pour un entier à 3 chiffres N , on a $T(N) = 2$ si N est de la forme $x0y$ avec x et y non nuls, et $T(N) = 1$ sinon. Comme on l'a remarqué, il y a 81 entiers N tels que $T(N) = 2$, donc $S_3 = 900 + 81 = 981$.

On considère S_4 . Il y a 9000 entiers à quatre chiffres au départ. Les entiers qui produisent au moins un entier supplémentaire après séparation sont de la forme $x00y$, $xy0z$, ou $x0ya$ où x , y et z sont non nuls et a peut être nul.

Si $N = x00y$, alors $T(N) = 2$. Une autre façon de voir cela est que $T(N) = T(x00y) = 1 + T(y)$. Ainsi, chaque $x00y$ produit $T(y)$ entiers supplémentaires pour la liste, et donc l'ensemble des entiers de la forme $x00y$ produit $9 \times T(y)$ entiers supplémentaires puisqu'il y a 9 choix pour x . Lorsque l'on additionne $T(y)$ pour tous les choix de y , on obtient S_1 , donc les entiers $x00y$ contribuent $9 \times S_1$ entiers supplémentaires à la liste.

Par un raisonnement similaire, les entiers de la forme $x0ya$ contribuent $9 \times S_2$ entiers supplémentaires, et les entiers de la forme $xy0z$ contribuent $9^2 \times S_1$ entiers d'extra. Ainsi, $S_4 = 9000 + 9(S_1 + S_2) + 9^2(S_1) = 10620$.

On considère S_n où $n \geq 4$. Il y a $9 \times 10^{n-1}$ entiers à n chiffres dans la liste avant l'effacement des 0. Les entiers qui produisent au moins un entier supplémentaire après effacement des 0 sont constitués de d chiffres non nuls (avec $1 \leq d \leq n-2$) suivis de r zéros (avec $1 \leq r \leq n-d-1$), suivis d'un entier à $n-d-r$ chiffres. On peut écrire un tel entier sous la forme

$$N = x_1x_2 \cdots x_d 0 \cdots 0 y a_2 a_3 \cdots a_{n-d-r}$$

où $x_1, x_2, \dots, x_d, y$ sont des chiffres non nuls. On remarque que

$$T(N) = T(x_1x_2 \cdots x_d 0 \cdots 0 y a_2 a_3 \cdots a_{n-d-r}) = 1 + T(y a_2 a_3 \cdots a_{n-d-r})$$

Il y a 9^d combinaisons possibles pour les chiffres $x_1x_2 \cdots x_d$ qui précèdent les r zéros, puisqu'il y a d chiffres non nuls. Étant donné une combinaison de ces d chiffres, le nombre d'entiers nouveaux générés pour la liste lorsque les $n-d-r$ derniers chiffres varient est S_{n-d-r} puisque les chiffres $y a_2 a_3 \cdots a_{n-d-r}$ parcourent tous les entiers positifs possibles à $n-d-r$ chiffres. Autrement dit, pour des valeurs données de n , d et r , le nombre d'entiers supplémentaires générés est

$$9^d S_{n-d-r}$$

puisque'il y a 9^d façons de choisir le début de l'entier et, pour chaque début, S_{n-d-r} façons dont les $n-d-r$ derniers chiffres produisent de nouveaux entiers. Par exemple, si $n = 5$ et $d = 2$, alors on peut avoir $r = 1$ ou $r = 2$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_5 &= 9 \times 10^4 + 9(S_1 + S_2 + S_3) + 9^2(S_1 + S_2) + 9^3(S_1) \\ &= 90\,000 + 9(9 + 90 + 981) + 9^2(9 + 90) + 9^3(9) \\ &= 114\,300 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_6 &= 9 \times 10^5 + 9(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) + 9^2(S_1 + S_2 + S_3) + 9^3(S_1 + S_2) + 9^4(S_1) \\ &= 900\,000 + 9(9 + 90 + 981 + 10\,620) + 9^2(9 + 90 + 981) + 9^3(9 + 90) + 9^4(9) \\ &= 1\,224\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_7 &= 9 \times 10^6 + 9(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5) + 9^2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \\ &\quad + 9^3(S_1 + S_2 + S_3) + 9^4(S_1 + S_2) + 9^5(S_1) \\ &= 9\,000\,000 + 9(9 + 90 + 981 + 10\,620 + 114\,300) + 9^2(9 + 90 + 981 + 10\,620) \\ &\quad + 9^3(9 + 90 + 981) + 9^4(9 + 90) + 9^5(9) \\ &= 13\,050\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_8 &= 9 \times 10^7 + 9(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6) \\ &\quad + 9^2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5) + 9^3(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \\ &\quad + 9^4(S_1 + S_2 + S_3) + 9^5(S_1 + S_2) + 9^6(S_1) \\ &= 90\,000\,000 + 9(9 + 90 + 981 + 10\,620 + 114\,300 + 1\,224\,000) \\ &\quad + 9^2(9 + 90 + 981 + 10\,620 + 114\,300) + 9^3(9 + 90 + 981 + 10\,620) \\ &\quad + 9^4(9 + 90 + 981) + 9^5(9 + 90) + 9^6(9) \\ &= 138\,600\,000 \end{aligned}$$

RÉPONSE : 138 600 000

Partie B

1. (a) En substituant les coordonnées du point dans l'équation, on obtient $-9 = 6p + p^2$. En la réarrangeant, on obtient $0 = p^2 + 6p + 9 = (p + 3)^2$. Ainsi, $p = -3$.
- (b) En substituant chacun des trois points dans l'équation, on obtient les trois équations suivantes :

$$5 = a - b + c$$

$$4 = c$$

$$11 = a + b + c.$$

En substituant $4 = c$ dans les deux autres équations et en réarrangeant un peu, on obtient

$$1 = a - b$$

$$7 = a + b.$$

En additionnant ces deux équations, on obtient $2a = 8$ et donc $a = 4$. En substituant $a = 4$ dans la dernière équation, on obtient $b = 3$.

Par conséquent, $a = 4$, $b = 3$, $c = 4$.

(c) *Solution 1*

En substituant les coordonnées des deux points dans l'équation de la parabole, on obtient les deux équations

$$5 = (d - 1)^2 + q$$

$$5 = (d + 5)^2 + q$$

En soustrayant les deux équations, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= (d - 1)^2 + q - [(d + 5)^2 + q] \\ &= d^2 - 2d + 1 + q - d^2 - 10d - 25 - q \\ &= -12d - 24 \end{aligned}$$

et donc $12d = -24$ ou encore $d = -2$. La parabole passe par $(-2, 5)$, donc on a

$$5 = (-2 - 1)^2 + q$$

ce qui permet de résoudre pour q et d'obtenir $q = -4$.

Solution 2

Puisque les points $(d, 5)$ et $(d + 6, 5)$ ont la même ordonnée, ils sont l'image miroir l'un de l'autre, par rapport à un axe de symétrie. Par conséquent, l'axe de symétrie est $x = d + 3$, puisque $d + 3$ est la moyenne des deux abscisses.

L'axe de symétrie contient le sommet de la parabole, donc l'abscisse du sommet doit être $x = d + 3$.

L'équation de la parabole est donnée sous forme canonique, donc on déduit immédiatement de l'équation $y = (x - 1)^2 + q$ que l'abscisse du sommet est $x = 1$. Ainsi, $d + 3 = 1$ et $d = -2$. La parabole passe par $(-2, 5)$, donc on a

$$5 = (-2 - 1)^2 + q$$

ce qui permet de résoudre pour q et d'obtenir $q = -4$.

2. (a) Puisque AD est parallèle à BC , on a $\angle BCA = \theta$. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = 2^2 + 3^2$, donc $AC = \sqrt{13}$. Par conséquent, $\sin \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

(b) *Solution 1*

Soit x la longueur de TR et soit y la longueur de PR . Soit $\alpha = \angle PTR$. La loi des sinus appliquée à $\triangle PTR$ donne

$$\frac{\sin 45^\circ}{x} = \frac{\sin \alpha}{y}. \quad (1)$$

D'après le théorème de Pythagore, on obtient $y = \sqrt{4^2 + (3+x)^2} = \sqrt{25 + 6x + x^2}$ et aussi $PT = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Par la trigonométrie dans le triangle rectangle et puisque $\angle PTQ = 180^\circ - \alpha$, on obtient $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{4}{5}$. On rappelle que $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

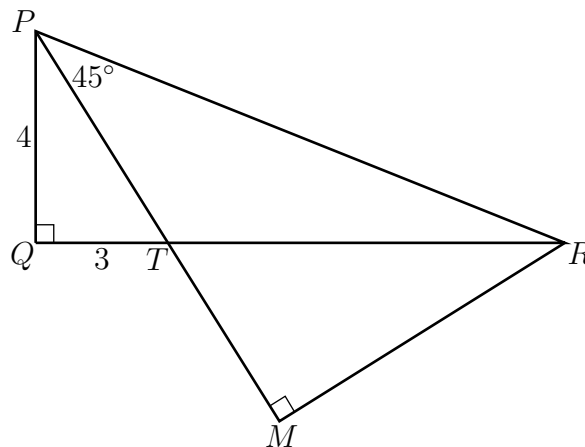
En substituant tout cela dans l'équation (1) et en réarrangeant, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{4}{5\sqrt{25 + 6x + x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}x} \\ 4\sqrt{2}x &= 5\sqrt{25 + 6x + x^2} \\ 32x^2 &= 25(25 + 6x + x^2) \\ 7x^2 - 150x - 625 &= 0. \end{aligned}$$

Les racines de ce polynôme sont $x = \frac{-25}{7}$ et $x = 25$. Puisque x est une longueur, on rejette la solution négative et on conclut que $TR = 25$.

Solution 2

On prolonge PT jusqu'à un point M de sorte que $\angle PMR = 90^\circ$.



D'après le théorème de Pythagore, $PT = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Dans le triangle PMR , il y a un angle droit et un angle de 45° , donc le triangle PMR est rectangle isocèle et ainsi $RM = PM$. Si l'on pose $TM = z$, alors $PM = RM = 5 + z$.

Dans les triangles MRT et QTP , on a $\angle MTR = \angle QTP$ car ce sont des angles opposés par le sommet. Ces triangles ont aussi chacun un angle droit, donc les triangles MRT et QTP sont semblables. Ainsi, $\frac{RM}{TM} = \frac{PQ}{TQ}$, donc $\frac{5+z}{z} = \frac{4}{3}$. En réarrangeant, on obtient $15 + 3z = 4z$, donc $z = 15$.

En utilisant encore des triangles semblables, $\frac{TR}{TM} = \frac{TP}{TQ}$, donc $TR = \frac{TM \cdot TP}{QT} = \frac{15 \cdot 5}{3} = 25$.

Solution 3

Si l'on pose $x = TR$, alors $\tan \angle QPR = \frac{3+x}{4}$. De plus, $\tan \angle QPR = \tan(\angle QPT + \angle TPR)$.

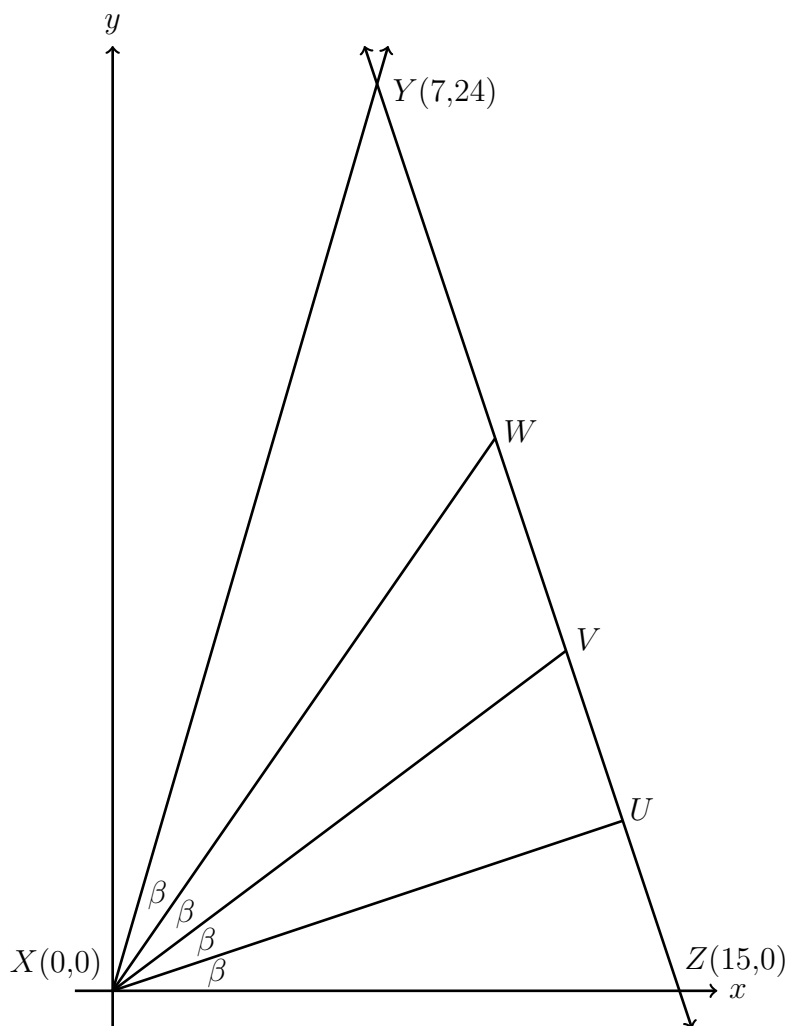
D'après le schéma, $\tan \angle QPT = \frac{3}{4}$ et $\tan \angle TPR = \tan 45^\circ = 1$. En utilisant la formule $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{3+x}{4} &= \tan \angle QPR \\ &= \tan(\angle QPT + \angle TPR) \\ &= \frac{\tan \angle QPT + \tan \angle TPR}{1 - \tan \angle QPT \tan \angle TPR} \\ &= \frac{\frac{3}{4} + 1}{1 - \frac{3}{4} \cdot 1} \\ &= 7 \end{aligned}$$

et donc $\frac{3+x}{4} = 7$, ce qui permet de résoudre pour x et d'obtenir $x = 25$.

(c) *Solution 1*

Soient U et V sur YZ tels que XU et XV trisectionnent $\angle WXZ$. Plus précisément, le long de YZ , W est le plus près de Y , V est ensuite le plus près de Y , et U est le plus éloigné de Y . On obtient alors $\angle WXV = \angle VXU = \angle UXZ = \beta$. Ainsi, $\angle WXZ = 3\beta$, donc $\angle WXY = \beta$ également.



En général, la pente d'une droite passant par l'origine est égale à $\tan$ de l'angle formé par la droite et l'axe des x . Ainsi, la droite WX a pour pente $\tan 3\beta$. Si l'on peut trouver $\tan 3\beta$, on peut déterminer l'équation de WX , puis trouver les coordonnées de W en l'intersectant avec YZ .

Afin de calculer $\tan 3\beta$, on remarque que $\tan(\angle YXZ) = \tan 4\beta = \frac{24}{7}$. En utilisant la formule de l'angle double pour la tangente, on a

$$\tan 4\beta = \frac{2 \tan 2\beta}{1 - \tan^2 2\beta}$$

et si l'on pose $\tan 2\beta = m$, on a $\frac{24}{7} = \frac{2m}{1 - m^2}$.

En faisant le produit croisé, on obtient $24(1 - m^2) = 7(mx)$, ce qui se réarrange en le polynôme $24m^2 + 14m - 24 = 0$. Par la formule quadratique, les racines sont $\frac{-7 \pm 25}{24}$.

Puisque 2β est un angle du premier quadrant, $\tan 2\beta$ est positif, donc $\tan 2\beta = \frac{-7 + 25}{24} = \frac{3}{4}$.

On peut répéter le même procédé avec $\tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta}$ en posant cette fois $\tan \beta = n$ pour obtenir $\frac{3}{4} = \frac{2n}{1 - n^2}$. Cela équivaut au polynôme $3n^2 + 8n - 3 = 0$. Par la formule

quadratique, sa seule racine positive est $n = \frac{-8+10}{6} = \frac{1}{3}$.

On utilise maintenant la formule d'addition pour la tangente afin d'obtenir

$$\begin{aligned}\tan 3\beta &= \frac{\tan \beta + \tan 2\beta}{1 - \tan \beta \tan 2\beta} \\ &= \frac{\frac{1}{3} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}} \\ &= \frac{13}{9}\end{aligned}$$

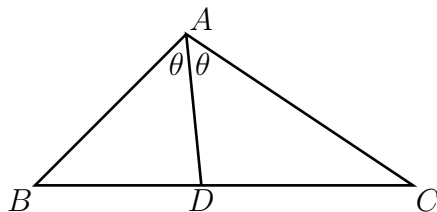
Par conséquent, le segment WX fait partie de la droite d'équation $y = \frac{13}{9}x$. On peut aussi vérifier que le segment YZ fait partie de la droite d'équation $y = -3x + 45$. Comme mentionné précédemment, W est le point d'intersection de ces deux droites.

L'abscisse de W est la solution de $-3x + 45 = \frac{13}{9}x$, soit $\frac{81}{8}$. Son ordonnée est $y = \frac{13}{9} \cdot \frac{81}{8} = \frac{117}{8}$.

Les coordonnées de W sont $\left(\frac{81}{8}, \frac{117}{8}\right)$.

Solution 2

En utilisant le même diagramme que dans la Solution 1, on approche plutôt ce problème à l'aide du *théorème de la bissectrice*. Autrement dit, si dans le triangle ABC , le point D est sur BC de sorte que AD bissecte $\angle BAC$, alors $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$.



Dans le triangle XYZ , le théorème de la bissectrice implique $\frac{XY}{XZ} = \frac{VY}{VZ}$. D'après le théorème de Pythagore, $XY = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$. Il est donné que $XZ = 15$, donc $\frac{25}{15} = \frac{VY}{VZ}$, ce qui équivaut à $VZ = \frac{3}{5}VY$.

Par la formule de distance,

$$YZ = \sqrt{(7-15)^2 + (24-0)^2} = \sqrt{64 + 576} = \sqrt{640} = 8\sqrt{10}$$

Puisque $YZ = VY + VZ$, on peut substituer $VZ = \frac{3}{5}VY$ pour obtenir

$$8\sqrt{10} = VY + \frac{3}{5}VY$$

et résoudre pour VY , ce qui donne $VY = 5\sqrt{10}$. Il s'ensuit que $VZ = 3\sqrt{10}$.

On peut aussi trouver les coordonnées de V . Puisque V est situé aux $\frac{5}{8}$ du segment allant de Y à Z le long de YZ , l'abscisse de V est aux $\frac{5}{8}$ du chemin entre l'abscisse de Y

(qui est 7) et celle de Z (qui est 15). Ainsi, l'abscisse de V est $7 + \frac{5}{8}(15 - 7) = 12$. Par un raisonnement similaire, l'ordonnée de V est $24 + \frac{5}{8}(0 - 24) = 9$.

Les coordonnées de V sont (12,9), donc la longueur XV est $\sqrt{12^2 + 9^2} = 15$.

En appliquant le théorème de la bissectrice au triangle XYV , on a maintenant $\frac{XV}{XY} = \frac{WV}{WY}$, donc $\frac{15}{25} = \frac{WV}{WY}$, soit $WV = \frac{3}{5}WY$. En utilisant le fait que $WY + WV = YV = 5\sqrt{10}$ et en substituant, on obtient

$$5\sqrt{10} = WY + \frac{3}{5}WY$$

ce qui permet de résoudre et d'obtenir $WY = \frac{25\sqrt{10}}{8}$.

On a maintenant $\frac{YW}{YZ} = \frac{\frac{25\sqrt{10}}{8}}{8\sqrt{10}} = \frac{25}{64}$, donc par un raisonnement similaire à celui utilisé pour trouver les coordonnées de V , l'abscisse de W est $7 + \frac{25}{64}(15 - 7) = \frac{81}{8}$ et l'ordonnée de W est $24 + \frac{25}{64}(0 - 24) = \frac{117}{8}$.

Les coordonnées de W sont $\left(\frac{81}{8}, \frac{117}{8}\right)$.

3. (a) D'après les conditions données dans l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= b_1 c_1 \\ c_3 &= b_1 c_2 + b_2 c_1 \\ c_4 &= b_1 c_3 + b_2 c_2 + b_3 c_1 \end{aligned}$$

On a aussi $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ et $b_3 = 4$. En substituant $b_1 = 1$ et $c_1 = 1$ dans $c_2 = b_1 c_1$, on obtient $c_2 = (1)(1) = 1$. On a alors

$$c_3 = b_1 c_2 + b_2 c_1 = (1)(1) + (2)(1) = 3$$

et enfin

$$c_4 = b_1 c_3 + b_2 c_2 + b_3 c_1 = (1)(3) + (2)(1) + (4)(1) = 9$$

donc $c_2 = 1$, $c_3 = 3$ et $c_4 = 9$.

(b) *Solution 1*

Supposons que $b_1 = a$ et que la raison commune est r , de sorte que $b_n = ar^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. On peut calculer les premières valeurs de c_i à l'aide de la relation entre une suite et son complément.

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 \\
c_2 &= b_1 c_1 \\
&= (a)(1) \\
&= a \\
c_3 &= b_1 c_2 + b_2 c_1 \\
&= (a)(a) + (ar)(1) \\
&= a(a + r) \\
c_4 &= b_1 c_3 + b_2 c_2 + b_3 c_1 \\
&= (a)(a(a + r)) + (ar)(a) + (ar^2)(1) \\
&= a^2(a + r) + a^2 r + ar^2 \\
&= a(a^2 + ar + ar + r^2) \\
&= a(a + r)^2
\end{aligned}$$

À partir de $c_2 = a$, $c_3 = a(a + r)$ et $c_4 = a(a + r)^2$, on a $c_3 = (a + r)c_2$ et $c_4 = (a + r)c_3$, ce qui suggère que la constante cherchée est $t = a + r$.

On procède par récurrence afin de démontrer que $c_n = (a + r)c_{n-1}$ pour tout $n \geq 3$. Cela a déjà été montré pour $n = 3$ et $n = 4$. Supposons que, pour un certain k , on ait $c_3 = (a + r)c_2$, $c_4 = (a + r)c_3$, $c_5 = (a + r)c_4$, et ainsi de suite jusqu'à $c_k = (a + r)c_{k-1}$. À l'aide de cette hypothèse, on déduira que $c_{k+1} = (a + r)c_k$.

D'après l'identité définissant c_{k+1} ainsi que l'hypothèse ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
c_{k+1} &= b_1 c_k + b_2 c_{k-1} + \cdots + b_{k-2} c_3 + b_{k-1} c_2 + b_k c_1 \\
&= b_1 (a + r) c_{k-1} + b_2 (a + r) c_{k-2} + \cdots + b_{k-2} (a + r) c_2 + b_{k-1} c_2 + b_k c_1 \\
&= (a + r) (b_1 c_{k-1} + b_2 c_{k-2} + \cdots + b_{k-2} c_2) + b_{k-1} c_2 + b_k c_1
\end{aligned} \tag{*}$$

En utilisant à nouveau la définition donnée dans l'énoncé, on a

$$\begin{aligned}
c_k &= b_1 c_{k-1} + b_2 c_{k-2} + \cdots + b_{k-2} c_2 + b_{k-1} c_1 \\
c_k - b_{k-1} c_1 &= b_1 c_{k-1} + b_2 c_{k-2} + \cdots + b_{k-2} c_2
\end{aligned}$$

Le côté droit de cette expression apparaît dans (*), donc on peut le substituer pour obtenir

$$\begin{aligned}
c_{k+1} &= (a + r) (b_1 c_{k-1} + b_2 c_{k-2} + \cdots + b_{k-2} c_2) + b_{k-1} c_2 + b_k c_1 \\
&= (a + r) (c_k - b_{k-1} c_1) + b_{k-1} c_2 + b_k c_1 \\
&= (a + r) c_k - (a + r) b_{k-1} c_1 + b_{k-1} c_2 + b_k c_1
\end{aligned} \tag{**}$$

Finalement, on peut utiliser les expressions connues de b_i et c_i pour montrer que

$$\begin{aligned}
-(a + r) b_{k-1} c_1 + b_{k-1} c_2 + b_k c_1 &= -(a + r) ar^{k-2} + ar^{k-2} a + ar^{k-1} \\
&= -a^2 r^{k-2} - ar^{k-1} + a^2 r^{k-2} + ar^{k-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

En substituant cela dans (**), on obtient $c_{k+1} = (a + r)c_k$. Cela complète la récurrence, donc on a montré que $c_n = (a + r)c_{n-1}$ pour tout $n \geq 3$.

Solution 2

Étant donné $n \geq 3$, on a les deux équations suivantes. On remarque que $n \geq 3$ est nécessaire pour que $n - 1 \geq 2$, ce qui permet d'écrire la seconde de ces deux équations.

$$\begin{aligned} c_n &= b_1 c_{n-1} + b_2 c_{n-2} + b_3 c_{n-3} + \cdots + b_{n-2} c_2 + b_{n-1} c_1 \\ c_{n-1} &= b_1 c_{n-2} + b_2 c_{n-3} + \cdots + b_{n-3} c_2 + b_{n-2} c_1 \end{aligned}$$

Par hypothèse, $b_1, b_2, b_3, \dots$ est une suite géométrique. Si l'on note par r sa raison, on a alors $rb_k = b_{k+1}$ pour tout $k \geq 1$. Ainsi, on peut multiplier les deux membres de la seconde équation ci-dessus par r afin d'obtenir

$$\begin{aligned} rc_{n-1} &= (rb_1)c_{n-2} + (rb_2)c_{n-3} + \cdots + (rb_{n-3})c_2 + (rb_{n-2})c_1 \\ &= b_2 c_{n-2} + b_3 c_{n-3} + \cdots + b_{n-2} c_2 + b_{n-1} c_1 \end{aligned}$$

On obtient ainsi les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} c_n &= b_1 c_{n-1} + b_2 c_{n-2} + b_3 c_{n-3} + \cdots + b_{n-2} c_2 + b_{n-1} c_1 \\ rc_{n-1} &= b_2 c_{n-2} + b_3 c_{n-3} + \cdots + b_{n-2} c_2 + b_{n-1} c_1 \end{aligned}$$

Les seconds membres de ces deux équations sont presque identiques. En effet, en soustrayant la seconde de la première, on obtient $c_n - rc_{n-1} = b_1 c_{n-1}$. Comme $b_1 = ar^{1-1} = a$, on peut réarranger cette relation pour obtenir $c_n = (a + r)c_{n-1}$.

On a montré que $c_n = (a + r)c_{n-1}$ pour tout $n \geq 3$. Ainsi, l'identité demandée est vérifiée avec $t = a + r$, où a et r sont les constantes telles que $b_n = ar^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

- (c) On observe que la suite $b_1, b_2, b_3, \dots$ étant arithmétique signifie que $b_{m+2} - b_{m+1} = b_{m+1} - b_m$ pour tout $m \geq 1$, ce qui peut se réécrire sous la forme $b_{m+2} - 2b_{m+1} + b_m = 0$ pour tout $m \geq 1$.

Pour $n \geq 4$, on a

$$c_n = b_1 c_{n-1} + b_2 c_{n-2} + b_3 c_{n-3} + b_4 c_{n-4} + \cdots + b_{n-2} c_2 + b_{n-1} c_1 \quad (1)$$

$$c_{n-1} = b_1 c_{n-2} + b_2 c_{n-3} + b_3 c_{n-4} + \cdots + b_{n-3} c_2 + b_{n-2} c_1 \quad (2)$$

$$c_{n-2} = b_1 c_{n-3} + b_2 c_{n-4} + \cdots + b_{n-4} c_2 + b_{n-3} c_1 \quad (3)$$

où les équations ci-dessus sont écrites de sorte que les termes faisant intervenir c_i soient alignés verticalement pour chaque i allant de 1 à $n - 3$.

On considère ce qui se produit si l'on calcule l'Équation (1) moins deux fois l'Équation (2) plus l'Équation (3). Dans le membre de droite de l'équation obtenue, les termes faisant intervenir c_1 sont

$$b_{n-1} c_1 - 2b_{n-2} c_1 + b_{n-3} c_1 = c_1 (b_{n-1} - 2b_{n-2} + b_{n-3}) = c_1 (0) = 0$$

d'après la remarque précédente. Plus généralement, si k est compris entre 1 et $n - 3$ inclus, alors

$$b_{n-k} c_k - 2b_{n-k-1} c_k + b_{n-k-2} c_k = c_k (b_{n-k} - 2b_{n-k-1} + b_{n-k-2}) = c_k (0)$$

On remarque que $k \leq n - 3$, donc $n - k - 2 \geq 1$, ce qui permet bien d'utiliser cette identité pour tout tel k .

Ainsi, si l'on calcule l'Équation (1) moins deux fois l'Équation (2) plus l'Équation (3), tous les termes contenant c_i pour i allant de 1 à $n-3$ s'annulent. Après cette simplification, il reste l'équation

$$c_n - 2c_{n-1} + c_{n-2} = b_1c_{n-1} + b_2c_{n-2} - 2b_1c_{n-2} \quad (4)$$

Si $n = 2028$, alors en utilisant les informations données dans l'énoncé, on a $c_n = 3$, $c_{n-1} = -3$, $c_{n-2} = 0$, donc l'Équation (4) donne

$$3 - 2(-3) + 0 = b_1(-3) + b_2(0) - 2b_1(0)$$

ce qui se simplifie en $9 = -3b_1$ ou encore $b_1 = -3$.

Si $n = 2027$, alors $c_n = -3$, $c_{n-1} = 0$ et $c_{n-2} = 3$, donc l'Équation (4) donne

$$-3 - 2(0) + 3 = b_1(0) + b_2(3) - 2b_1(3)$$

soit $0 = 3b_2 - 6b_1$. Comme on a montré que $b_1 = -3$, on peut substituer et obtenir $3b_2 = -18$ ou encore $b_2 = -6$.

On sait que $b_1, b_2, b_3, \dots$ est une suite arithmétique et on connaît désormais $b_1 = -3$ et $b_2 = -6$. Il s'ensuit que la raison de la suite est $-6 - (-3) = -3$, donc $b_n = -3 - 3(n-1)$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, $b_{2025} = -3 - 3(2024) = -6075$.