



Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire 2025

le mercredi 12 novembre 2025
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 13 novembre 2025
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A1. *Solution 1*

Puisque 85% des ânes du sanctuaire sont des adultes et que le reste sont des ânon, $100\% - 85\% = 15\%$ des ânes du sanctuaire sont des ânon.

Puisque 10% de 140 est 14, 5% de 140 est 7, et donc 15% de 140 est $14 + 7 = 21$.

On conclut qu'il y a 21 ânon dans le sanctuaire.

Solution 2

Puisque 85% des 140 ânes du sanctuaire sont des adultes, il y a $0,85 \times 140 = 119$ ânes adultes dans le sanctuaire.

Les ânes restants sont des ânon; ainsi, il y a $140 - 119 = 21$ ânon dans le sanctuaire.

RÉPONSE : 21

2. *Solution 1*

Puisque le nombre de timbres que Paige possède est un multiple de 5 et que le nombre total de timbres que Jimmy et Paige ont ensemble est 18, Paige doit avoir 5, 10 ou 15 timbres.

Puisque Jimmy a un nombre pair de timbres et que le nombre total de timbres est pair, Paige doit aussi avoir un nombre pair de timbres.

On conclut que Paige a 10 timbres et que Jimmy a $18 - 10 = 8$ timbres.

Solution 2

Puisque le nombre de timbres que Jimmy possède est pair, on peut représenter ce nombre par $2a$ où a est un entier positif.

Puisque le nombre de timbres que Paige possède est un multiple de 5, on peut représenter ce nombre par $5b$ où b est un entier positif.

Puisque le nombre total de timbres qu'ils ont ensemble est 18, on a $2a + 5b = 18$.

Puisque 18 et $2a$ sont pairs, $5b$ doit être pair et donc b doit être pair.

Puisque $5 \times 4 = 20$ est supérieur à 18, b doit être inférieur à 4.

Cela signifie que $b = 2$ et donc Paige a $5b = 5 \times 2 = 10$ timbres.

Par conséquent, Jimmy a $18 - 10 = 8$ timbres.

RÉPONSE : 8

3. *Solution 1*

D'après les informations données, augmenter le volume d'eau de $\frac{1}{3}$ de la capacité du vase à $\frac{2}{3}$ de la capacité du vase entraîne une augmentation de masse de $800 \text{ g} - 600 \text{ g} = 200 \text{ g}$.

Autrement dit, ajouter un volume d'eau égal à $\frac{1}{3}$ de la capacité du vase entraîne une augmentation de masse de 200 g.

Cela signifie que la masse de l'eau lorsque le vase est rempli à $\frac{1}{3}$ de sa capacité est 200 g.

On conclut que la masse du vase vide est $600 \text{ g} - 200 \text{ g} = 400 \text{ g}$.

Solution 2

On suppose que la masse en grammes du vase vide est v et que la masse en grammes du volume d'eau nécessaire pour remplir le vase à $\frac{1}{3}$ de sa capacité est w .

D'après les informations données, on a $v + w = 600$ et $v + 2w = 800$.

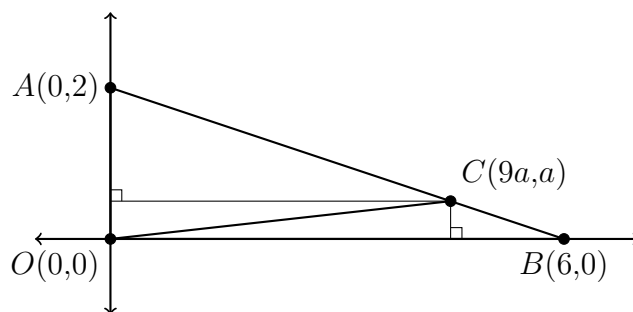
En réarrangeant la première équation, on obtient $w = 600 - v$.

En substituant cette expression dans la deuxième équation, on obtient $800 = v + 2w = v + 2(600 - v)$, ce qui se simplifie en $800 = v + 1200 - 2v$ ou $800 = 1200 - v$.

Par conséquent, on a $v = 1200 - 800 = 400$ et donc la masse du vase vide est 400 g.

RÉPONSE : 400 g

4. On trace le triangle AOB dans le plan cartésien et on dessine un segment de droite à partir du point C sur le côté AB vers chacun des côtés OA et OB , en rencontrant chaque côté à angle droit.



Solution 1

Une base du triangle AOC est $OA = 2$ et la hauteur correspondante est la distance horizontale de l'axe des ordonnées au point C , qui est égale à $9a$.

Ainsi, l'aire du triangle AOC est $\frac{1}{2} \times 2 \times 9a = 9a$.

Une base du triangle BOC est $OB = 6$ et la hauteur correspondante est la distance verticale de l'axe des abscisses au point C , qui est égale à a .

Ainsi, l'aire du triangle BOC est $\frac{1}{2} \times 6 \times a = 3a$.

On conclut que le rapport de l'aire du triangle AOC à l'aire du triangle BOC est $9a : 3a$ ou $3 : 1$.

Solution 2

La pente de la droite passant par les points $A(0, 2)$ et $B(6, 0)$ est $m = \frac{2-0}{0-6} = -\frac{1}{3}$ et donc une équation de cette droite est $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

Puisque $C(9a, a)$ se trouve sur le segment de droite AB , ce point doit vérifier l'équation de la droite donnée ci-dessus.

Cela signifie que $a = -\frac{1}{3}(9a) + 2$, ce qui se simplifie en $a = -3a + 2$ ou $4a = 2$ et donc $a = \frac{1}{2}$.

Par conséquent, les coordonnées de C sont $(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}) = (4, 5; 0, 5)$.

En utilisant les coordonnées de C , on peut calculer l'aire de chaque triangle.

La base du triangle AOC est $OA = 2$ et la hauteur correspondante est la distance horizontale de l'axe des ordonnées au point C , qui est $\frac{9}{2}$.

Ainsi, l'aire du triangle AOC est $\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$.

La base du triangle BOC est $OB = 6$ et la hauteur correspondante est la distance verticale de l'axe des abscisses au point C , qui est $\frac{1}{2}$.

Donc l'aire du triangle BOC est $\frac{1}{2} \times 6 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Par conséquent, le rapport de l'aire du triangle AOC à l'aire du triangle BOC est $\frac{9}{2} : \frac{3}{2}$ ou $3 : 1$.

RÉPONSE : $3 : 1$

5. Le nombre total de minutes entre le début de la première réunion et la fin de la dernière réunion est $3 \times 60 = 180$. Soit m le nombre de minutes de chaque réunion et soit b le nombre de minutes de chaque pause. Comme dans l'énoncé, on note le nombre de réunions par n .

Puisque l'après-midi commence par une réunion et se termine par une réunion, le nombre de pauses devrait être un de moins que le nombre de réunions. On peut voir cela en remarquant que chaque réunion, sauf la dernière, est suivie d'une pause.

Ainsi, le nombre total de minutes que Raya passe en réunions est $n \times m$, et le nombre total de minutes que Raya passe en pause est $(n-1) \times b$. On obtient donc l'équation $nm + (n-1)b = 180$, qui peut être développée en $nm + nb - b = 180$.

D'après la troisième condition de l'énoncé, on a aussi que chaque réunion dure 10 minutes de plus que chaque pause, ce qui signifie que $b = m - 10$. En substituant cette expression dans $nm + nb - b = 180$, on obtient

$$nm + n(m - 10) - (m - 10) = 180$$

Après développement, on obtient $nm + nm - 10n - m + 10 = 180$, ce qui peut se réécrire sous la forme $2nm - 10n = m + 170$. En factorisant, on obtient $2n(m - 5) = m + 170$ et en isolant $2n$, on trouve

$$2n = \frac{m + 170}{m - 5}$$

On remarque que m doit être supérieur à 10, puisque la durée de chaque pause, qui est $m - 10$, doit être positive. On peut réécrire l'expression sous la forme $2n = \frac{(m - 5) + 175}{m - 5}$, d'où il découle que $2n = 1 + \frac{175}{m - 5}$.

La quantité $2n$ est un entier positif pair. Pour qu'elle soit égale à $1 + \frac{175}{m - 5}$, il faut que $\frac{175}{m - 5}$ soit un entier positif impair. On remarque que, puisque le numérateur est impair, $\frac{175}{m - 5}$ sera automatiquement impair s'il est entier. On doit donc déterminer les valeurs de m telles que $m - 5$ soit un diviseur positif de 175.

Les diviseurs positifs de 175 sont 1, 5, 7, 25, 35 et 175. Puisque m doit être supérieur à 10, on rejette les valeurs $m - 5 = 1$ et $m - 5 = 5$. Cela signifie que $m - 5$ est égal à 7, 25, 35 ou 175. Cela correspond respectivement aux valeurs $m = 12, 30, 40$ et 180.

Si $m = 180$, il n'y aurait qu'une seule réunion occupant tout l'après-midi. Or, on sait que $n \geq 2$, donc on rejette aussi $m = 180$.

Les trois autres cas conviennent. Si $m = 12$, alors $2n = 1 + \frac{175}{7} = 26$, donc $n = 13$. En effet, s'il y a 13 réunions de 12 minutes et $13 - 1 = 12$ pauses de $12 - 10 = 2$ minutes, le temps total est $13 \times 12 + 12 \times 2 = 156 + 24 = 180$ minutes. De même, on vérifie que lorsque la durée d'une réunion est de 30 minutes, le nombre de réunions est 4, et lorsque la durée d'une réunion est de 40 minutes, le nombre de réunions est 3.

On conclut qu'il y a trois valeurs possibles pour n , soit 3, 4 et 13.

RÉPONSE : 3, 4, 13

6. On commence par considérer les valeurs de $[2x] + [3x] + [5x] + [7x]$ pour x tel que $0 \leq x < 1$.

La valeur de $[2x]$ est soit 0 soit 1 dépendamment de si $0 \leq x < \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \leq x < 1$, respectivement. Pour le voir, on suppose que $0 \leq x < \frac{1}{2}$. Alors $2(0) \leq 2x < 2(\frac{1}{2})$, ou autrement dit $0 \leq 2x < 1$. On a donc $[2x] = 0$ dans ce cas. En revanche, si $\frac{1}{2} \leq x < 1$, multiplier l'inégalité par 2 donne $1 \leq 2x < 2$, et ainsi $[2x] = 1$.

On a montré que pour $0 \leq x < 1$, la contribution de $[2x]$ à la somme est déterminée par le fait que $x < \frac{1}{2}$ ou non.

Un raisonnement semblable permet de déterminer la valeur de $[3x]$ selon que $0 \leq x < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{3} \leq x < 1$. (On remarque que tout x tel que $0 \leq x < 1$ satisfait exactement une de ces trois conditions.)

En multipliant les inégalités dans chacun de ces trois cas par 3, on obtient $0 \leq 3x < 1$, $1 \leq 3x < 2$ et $2 \leq 3x < 3$. Ainsi, $[3x]$ est égal à 0, 1 ou 2, selon que l'une des conditions $0 \leq x < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{3} \leq x < 1$ est vérifiée.

En poursuivant ce raisonnement, on peut déterminer les valeurs de $[5x]$ et $[7x]$ selon la position de x sur la droite réelle entre 0 et 1. Les résultats sont résumés dans les tableaux ci-dessous.

x	$0 \leq x < \frac{1}{7}$	$\frac{1}{7} \leq x < \frac{2}{7}$	$\frac{2}{7} \leq x < \frac{3}{7}$	$\frac{3}{7} \leq x < \frac{4}{7}$	$\frac{4}{7} \leq x < \frac{5}{7}$	$\frac{5}{7} \leq x < \frac{6}{7}$	$\frac{6}{7} \leq x < 1$
$[7x]$	0	1	2	3	4	5	6

x	$0 \leq x < \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \leq x < \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5} \leq x < \frac{3}{5}$	$\frac{3}{5} \leq x < \frac{4}{5}$	$\frac{4}{5} \leq x < 1$
$[5x]$	0	1	2	3	4

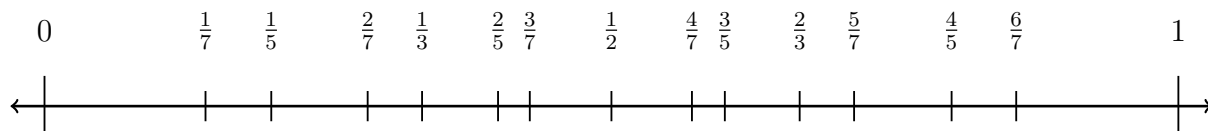
x	$0 \leq x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \leq x < 1$
$[3x]$	0	1	2

x	$0 \leq x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \leq x < 1$
$[2x]$	0	1

On imagine maintenant que x commence à 0 et augmente très lentement de 0 à 1 sans jamais atteindre 1. La somme $[2x] + [3x] + [5x] + [7x]$ commencera à 0 puisque $[0] = 0$. Cette somme n'augmentera que lorsque x atteint puis dépasse l'une des valeurs

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{4}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{6}{7}$$

Si, par exemple, x passe d'une valeur légèrement inférieure à $\frac{4}{7}$ à une valeur légèrement supérieure à $\frac{4}{7}$, alors la valeur de $[7x]$ augmente de 1, et donc la somme $[2x] + [3x] + [5x] + [7x]$ augmente aussi de 1. On remarque que les fractions énumérées ci-dessus sont toutes distinctes, donc cette somme n'augmente que d'une unité à la fois. En plaçant ces fractions sur une droite numérique, on obtient ce qui suit :



Lorsque $0 \leq x < \frac{1}{7}$, on a $[2x] = [3x] = [5x] = [7x] = 0$, donc la somme est 0. Dès que x dépasse $\frac{1}{7}$, c'est-à-dire lorsque $\frac{1}{7} \leq x < \frac{1}{5}$, on a $[7x] = 1$ tandis que $[2x] = [3x] = [5x] = 0$, donc la somme est 1. Puis, lorsque x dépasse $\frac{1}{5}$ et que $\frac{1}{5} \leq x < \frac{2}{7}$, on a $[5x] = [7x] = 1$ tandis que $[2x] = [3x] = 0$, donc la somme est $0 + 0 + 1 + 1 = 2$. Ainsi, les valeurs de $[2x] + [3x] + [5x] + [7x]$ augmentent à partir de 0, par incréments de 1, jusqu'à 13, puisqu'il y a 13 valeurs particulières que x franchit. Donc, si $0 \leq x < 1$, alors il y a 14 valeurs entières distinctes que peut prendre $[2x] + [3x] + [5x] + [7x]$.

On utilisera l'observation suivante. Soit a un entier et x un nombre réel. Alors $[a + x] = a + [x]$. Cela signifie que si x est augmenté d'un entier, sa partie entière augmente de cet entier. On laisse au lecteur le soin de s'en convaincre.

On considère maintenant un entier positif fixé k et un nombre réel x tel que $k \leq x < k + 1$. Alors il existe un nombre réel y avec $0 \leq y < 1$ tel que $x = k + y$. On a donc

$$\begin{aligned}
 [2x] + [3x] + [5x] + [7x] &= [2(k + y)] + [3(k + y)] + [5(k + y)] + [7(k + y)] \\
 &= [2k + 2y] + [3k + 3y] + [5k + 5y] + [7k + 7y] \\
 &= 2k + [2y] + 3k + [3y] + 5k + [5y] + 7k + [7y] \\
 &= 17k + [2y] + [3y] + [5y] + [7y]
 \end{aligned}$$

Lorsque x varie de k à $k + 1$, y varie de 0 à 1 (sans atteindre 1), et la valeur de $[2y] + [3y] + [5y] + [7y]$ prend toutes les valeurs entières de 0 à 13 inclusivement. Puisque k est fixé, on en déduit que $[2x] + [3x] + [5x] + [7x]$ varie de $17k + 0$ à $17k + 13$ inclusivement.

On a maintenant que lorsque $0 \leq x < 1$, $[2x] + [3x] + [5x] + [7x]$ prend les valeurs de 0 à 13 inclusivement ; lorsque $1 \leq x < 2$, $[2x] + [3x] + [5x] + [7x]$ prend les valeurs de $17(1) + 0 = 17$ à $17(1) + 13 = 30$ inclusivement ; et ainsi de suite. Il reste à compter les entiers dans ces listes qui appartiennent à l'intervalle donné : $1 \leq n \leq 2025$.

En excluant la valeur $n = 0$, le premier intervalle pour x contribue 13 entiers au décompte (1 à 13). Puisque $2025 = 17(119) + 2$, les intervalles correspondant à $k = 1$ jusqu'à $k = 118$ contribuent chacun 14 entiers au décompte, pour un total de $118 \times 14 = 1652$ entiers supplémentaires. L'intervalle correspondant à $k = 119$ contribue trois entiers supplémentaires : $17(119) + 0 = 2023$, $17(119) + 1 = 2024$ et $17(119) + 2 = 2025$.

On conclut qu'il y a $13 + 1652 + 3 = 1668$ entiers n tels que $1 \leq n \leq 2025$ et vérifiant la propriété donnée.

RÉPONSE : 1668

Partie B

1. (a) En utilisant la formule donnée avec largeur $x = 3$, longueur $y = 6$ et hauteur $z = 11$, on calcule

$$2(xy + xz + yz) = 2(3 \times 6 + 3 \times 11 + 6 \times 11) = 2(18 + 33 + 66) = 2(117) = 234.$$

Par conséquent, l'aire de la surface du prisme est 234 cm^2 .

- (b) En utilisant la formule donnée avec largeur $x = 2a$, longueur $y = 4a$ et hauteur $z = a$, on obtient

$$xy + xz + yz = (2a)(4a) + (2a)(a) + (4a)(a) = 8a^2 + 2a^2 + 4a^2 = 14a^2.$$

Par conséquent, l'aire de la surface du prisme est égale à $2(14a^2) = 28a^2 \text{ cm}^2$.

L'aire de la surface du prisme est aussi égale à 9072 cm^2 et donc $28a^2 = 9072$ ou $a^2 = 324$.

Puisque $a > 0$, on a $a = 18$.

- (c) *Solution 1*

Soit $AB = x$.

Alors le prisme est de largeur x , de hauteur $z = AD = x$ et de longueur $y = CH = 2x$.

Cela signifie que $xy = (x)(2x) = 2x^2$, que $xz = (x)(x) = x^2$ et que $yz = (2x)(x) = 2x^2$.

Par conséquent, l'aire de la surface du prisme est donnée par

$$2(xy + xz + yz) = 2(2x^2 + x^2 + 2x^2) = 2(5x^2) = 10x^2.$$

Puisque GH est égal à la hauteur du prisme, on a $GH = AD = x$.

Puisque la face $BGHC$ est un rectangle ayant pour diagonale CG , le triangle CHG est rectangle en H .

D'après le théorème de Pythagore, $CG^2 = CH^2 + GH^2$ ou $10^2 = (2x)^2 + x^2$, ce qui se simplifie en $100 = 4x^2 + x^2 = 5x^2$.

Puisque $5x^2 = 100$, on a $10x^2 = 2(5x^2) = 2(100) = 200$.

Ainsi l'aire de la surface du prisme droit à base rectangulaire est 200 cm^2 .

Solution 2

Soit $AB = x$.

Alors $GH = BC = AD = AB = x$ et $CH = 2x$.

Puisque la face $BGHC$ est un rectangle ayant pour diagonale CG , le triangle CHG est rectangle en H .

D'après le théorème de Pythagore, $CG^2 = CH^2 + GH^2$ ou $10^2 = (2x)^2 + x^2$, ce qui se simplifie en $100 = 4x^2 + x^2 = 5x^2$.

Par conséquent, $x^2 = 20$.

Puisque $x > 0$, on a $x = \sqrt{20}$.

Cela signifie que la largeur du prisme est $x = \sqrt{20}$, la longueur du prisme est $y = 2x = 2\sqrt{20}$ et la hauteur du prisme est $z = x = \sqrt{20}$.

On calcule que

$$xy = (\sqrt{20})(2\sqrt{20}) = 2(\sqrt{20})^2 = 2(20) = 40$$

$$xz = (\sqrt{20})(\sqrt{20}) = (\sqrt{20})^2 = 20$$

$$yz = (2\sqrt{20})(\sqrt{20}) = 2(\sqrt{20})^2 = 2(20) = 40$$

et donc $2(xy + xz + yz) = 2(40 + 20 + 40) = 2(100) = 200$.

Ainsi, l'aire de la surface du prisme droit à base rectangulaire est 200 cm^2 .

Remarque : ces calculs peuvent aussi être effectués en simplifiant d'abord $\sqrt{20}$ en $2\sqrt{5}$.

2. (a) Il y a 5 listes possibles et elles sont

1,2 2,1 2,2 2,3, 3,2

- (b) Chacun des deux premiers entiers pourrait être soit 1 ou soit 2, donc il y a 2×2 possibilités pour les deux premiers entiers. Il y a donc 4 possibilités pour la liste.
- (c) On suppose que la liste se termine par un 3. Alors il ne peut pas y avoir un autre 3 dans la liste puisque Blaise aurait cessé de générer des entiers plus tôt si c'était le cas. Il y a $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilités pour les trois premiers entiers si le dernier entier est 3 mais qu'aucun autre n'est 3. Cependant, si cela inclut deux 2 consécutifs, alors la liste se serait terminée plus tôt. On doit donc exclure les possibilités suivantes pour les trois premiers entiers : 2,2,1 et 1,2,2 et 2,2,2. Par conséquent, il y a $8 - 3 = 5$ possibilités pour la liste, en supposant qu'elle se termine parce qu'un 3 a été généré.

Sinon, la liste doit se terminer par deux 2 consécutifs. On note que le deuxième entier de la liste ne peut pas être 3 puisque cela aurait fait terminer la liste plus tôt, et il ne peut pas non plus être 2 puisque cela aurait aussi fait terminer la liste plus tôt. Ainsi, le deuxième entier de la liste est 1. Le premier entier de la liste peut être soit 1 soit 2, donc les possibilités pour la liste sont 2,1,2,2 et 1,1,2,2, si la liste se termine parce que deux 2 consécutifs ont été générés.

Cela donne un total de $5 + 2 = 7$ listes.

- (d) Si la liste se termine parce qu'un 3 a été généré, alors les 9 premiers entiers sont chacun 1 ou 2, avec la propriété qu'il n'y a pas deux 2 consécutifs parmi eux. Si la liste se termine parce que deux 2 consécutifs ont été générés, alors le huitième (troisième à partir de la fin) entier de la liste doit être 1 (comme on l'a démontré dans la solution de la partie (c)). Les 7 premiers entiers sont tous soit 1 soit 2 et il n'y a pas deux 2 consécutifs parmi eux.

Ainsi, pour résoudre ce problème, on doit déterminer le nombre de listes de longueur 7 et 9 ayant la propriété que chaque entier est soit 1 soit 2, mais un 2 ne peut pas être à côté d'un autre 2.

Comme on l'a indiqué ci-dessus, la réponse à la question est la somme de ces deux dénombrements. On inclut deux approches différentes pour trouver ces dénombrements.

Approche 1 : Dénombrement direct

Pour compter le nombre de listes de sept 1 et 2 ayant la propriété qu'il n'y a pas deux 2 consécutifs, on observe qu'une telle liste contient zéro, un, deux, trois ou quatre 2. S'il y a au moins cinq 2, alors il doit y en avoir au moins deux consécutifs.

S'il y a zéro 2, alors chaque entier de la liste est 1, donc il y a 1 liste dans ce cas.

S'il y a un 2, alors il y a 7 positions possibles pour le 2 et chaque autre entier de la liste est 1. Il y a 7 listes dans ce cas.

Supposons que la liste contienne deux 2. Si le 2 le plus à gauche est en première position, alors il y a 5 choix pour l'emplacement de l'autre 2 (il ne peut pas être en deuxième position). Si le 2 le plus à gauche est en deuxième position, alors il y a 4 choix pour placer l'autre 2. En continuant de cette façon, on voit qu'il y a $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ façons de placer les deux 2 de sorte qu'ils ne soient pas consécutifs. Il n'y a qu'une seule façon de compléter la liste dans chaque cas puisque tous les autres entiers sont 1. Par conséquent, il y a 15 listes dans ce cas.

Supposons que la liste contienne trois 2 et considérons le 2 le plus à gauche et le 2 le plus à droite. Puisqu'il doit y avoir un espace entre deux 2, il doit y avoir au moins trois entiers entre eux (un 2 et au moins deux 1). Ainsi, les positions possibles pour le 2 le plus

à gauche et le 2 le plus à droite sont les suivantes :

1 et 5, 2 et 6, 3 et 7, 1 et 6, 2 et 7, 1 et 7

Pour ces 6 possibilités, il y a respectivement 1, 1, 1, 2, 2 et 3 façons de placer le troisième 2 entre eux. Ainsi, il y a $1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 10$ façons de placer les trois 2 de façon qu'aucun ne soit consécutif. Par conséquent, il y a 10 listes dans ce cas.

Il n'y a qu'une seule façon de placer quatre 2 de sorte qu'ils ne soient pas consécutifs. Il y a donc 1 liste dans ce cas.

Par conséquent, le nombre de listes de 1 et 2 de longueur 7 sans deux 2 consécutifs est $1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34$.

Pour les listes de longueur 9, on peut utiliser un raisonnement similaire. Cette fois, cependant, il peut y avoir jusqu'à cinq 2. Une partie du raisonnement sera omise ici puisqu'il répète essentiellement le raisonnement précédent.

S'il y a zéro 2, alors il y a 1 liste.

S'il y a un 2, alors il y a 9 listes.

S'il y a deux 2, alors il y a $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ listes.

S'il y a trois 2, alors il y a 5 façons de placer le 2 le plus à gauche et le 2 le plus à droite à trois positions d'écart. Il y a une façon de placer le 2 restant dans chaque cas. Cela donne 5 listes. Il y a 4 façons de placer le 2 le plus à gauche et le 2 le plus à droite à quatre positions d'écart, et il y a 2 listes dans chaque cas, pour un total de $4 \times 2 = 8$ listes. En continuant de cette façon, il y a $3 \times 3 = 9$ listes lorsque le 2 le plus à gauche et le 2 le plus à droite sont séparés de 5 positions, il y a $2 \times 4 = 8$ listes lorsqu'ils sont séparés de 6 positions, et il y a $1 \times 5 = 5$ listes lorsqu'ils sont séparés de 7 positions. Cela donne un total de $5 + 8 + 9 + 8 + 5 = 35$ listes dans ce cas.

Supposons qu'il y ait quatre 2. Considérons la liste 2,1,2,1,2,1,2. Il y a sept entiers dans cette liste, et on peut donc construire une liste en insérant les deux 1 restants n'importe où dans la liste (à gauche du 2 le plus à gauche, entre les deux premiers 2, etc.). Il y a 5 espaces possibles, donc il y a 5 façons de placer les deux 1 restants dans le même espace. Il y a 10 façons de choisir deux espaces parmi les 5, donc il y a 10 façons de les placer dans des espaces différents. Cela donne un total de 15 listes dans ce cas.

Enfin, s'il y a cinq 2, alors il n'y a qu'une seule liste possible.

Le nombre total de listes de 1 et 2 de longueur 9 sans deux 2 consécutifs est $1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1 = 89$.

Comme mentionné ci-dessus, la réponse à la question est $34 + 89 = 123$.

Approche 2 : Récurrence.

Pour chaque n de 1 à 9, soit a_n le nombre de listes de 1 et 2 de longueur n qui n'ont pas deux 2 consécutifs.

Par exemple, pour $n = 1$, il y a deux listes de 1 et 2 (les listes sont "1" et "2"), et aucune n'a deux 2 consécutifs, donc $a_1 = 2$.

Comme autre exemple, pour $n = 2$, il y a quatre listes de 1 et 2 de longueur 2 qui sont 1,1 et 1,2 et 2,1 et 2,2. La quatrième liste a deux 2 consécutifs mais les trois premières n'en ont pas, donc $a_2 = 3$.

Considérons maintenant une liste de longueur $n \geq 3$ ayant les propriétés désirées. Cette liste doit se terminer soit par 1 soit par 2. Si elle se termine par 1, alors les $n - 1$ premiers entiers forment une liste de 1 et 2 qui n'a pas deux 2 consécutifs. (Si la liste entière n'a pas deux 2 consécutifs, alors une "sous-liste" ne peut pas en avoir non plus.) Il y a donc a_{n-1}

listes de longueur n qui se terminent par 1. Si la liste se termine par 2, alors l'avant-dernier entier doit être 1 puisqu'il ne peut pas y avoir deux 2 consécutifs. Les $n - 2$ premiers entiers peuvent être n'importe quelle liste de longueur $n - 2$ ayant les propriétés données, donc il y a a_{n-2} listes de longueur n qui se terminent par 2.

Comme cela épuise toutes les possibilités, on conclut que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour tout $n \geq 3$. On peut maintenant calculer facilement $a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5$. Cela permet de calculer $a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8$. En continuant de cette façon, on obtient ce qui suit

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 3 \\ a_3 &= 5 \\ a_4 &= 8 \\ a_5 &= 8 + 5 = 13 \\ a_6 &= 13 + 8 = 21 \\ a_7 &= 21 + 13 = 34 \\ a_8 &= 34 + 21 = 55 \\ a_9 &= 55 + 34 = 89 \end{aligned}$$

La réponse à la question est donc $a_7 + a_9 = 123$.

3. (a) Les multiples de 8 entre 200 et 300 sont

$$208, 216, 224, 232, 240, 248, 256, 264, 272, 280, 288, 296$$

Parmi ceux-ci, 224, 248, 264 et 288 n'ont aucun chiffre égal à 0 et aucun chiffre impair. Puisque $200 = 8 \times 25$ est un multiple de 8, les entiers qu'on cherche entre 400 et 500 sont exactement ces quatre entiers auxquels on ajoute 200 (ou, en changeant le chiffre des centaines pour 4). De la même manière, on obtient des multiples de 8 en changeant le chiffre des centaines pour 6 ou pour 8, ce qui donne la liste finale

$$224, 248, 264, 288, 424, 448, 464, 488, 624, 648, 664, 688, 824, 848, 864, 888$$

- (b) Supposons que l'entier formé par les nouveaux m chiffres soit x et que le nouvel entier soit y . Alors y est égal à n plus l'entier obtenu en ajoutant 13 zéros à *droite* de x . En symboles, $y = 10^{13}x + n$.

On sait que n est un multiple de $17^2 = 289$, et on veut que y soit aussi un multiple de 289. Puisque $y - n = 10^{13}x$ et que la différence de deux multiples de 289 doit être un multiple de 289, il s'ensuit qu'il faut que $10^{13}x$ soit un multiple de 289. Comme les seuls facteurs premiers de 10^{13} sont 2 et 5, il faut que x lui-même soit un multiple de 289.

On veut aussi que x n'ait que des chiffres impairs, donc on cherche en fait le nombre de chiffres du plus petit entier positif qui est un multiple de 289 et qui n'a que des chiffres impairs.

Si k est un entier positif pair, alors $289k$ est aussi pair, donc son chiffre des unités est pair. Ainsi, le multiple de 289 qu'on cherche est 289 fois un entier positif impair. En

dressant la liste des quelques premiers entiers de ce type, on obtient

$$289 \times 1 = 289$$

$$289 \times 3 = 867$$

$$289 \times 5 = 1445$$

$$289 \times 7 = 2023$$

$$289 \times 9 = 2601$$

$$289 \times 11 = 3179$$

et on constate que le premier multiple de 289 dont tous les chiffres sont impairs est $289 \times 11 = 3179$. Par conséquent, le plus petit nombre de chiffres que Melaku aurait pu placer est $m = 4$, et une façon de le faire serait de placer les chiffres 3, 1, 7, 9 dans cet ordre de gauche à droite.

(c) On considère les factorisations d'entiers suivantes

$$5 = 5^1$$

$$75 = 5^2 \times 3$$

$$375 = 5^3 \times 3$$

$$9375 = 5^4 \times 15$$

$$59\,375 = 5^5 \times 19$$

Cela montre que pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$, il existe un entier à n chiffres, n'ayant que des chiffres impairs, qui est divisible par 5^n . On veut montrer que cela est vrai pour $n = 2025$. Une autre chose à remarquer dans la liste ci-dessus est que les entiers du côté gauche des équations ont tous le même chiffre des unités. De plus, ceux qui ont un chiffre des dizaines ont tous le même chiffre des dizaines, ceux qui ont un chiffre des centaines ont tous le même chiffre des centaines, et ainsi de suite.

Cela suggère que l'entier "suivant" peut être trouvé en ajoutant un nouveau chiffre impair à gauche du chiffre précédent. Par exemple, pour trouver un entier à 6 chiffres qui n'a que des chiffres impairs et qui est divisible par 5^6 , on imagine qu'on peut l'obtenir en ajoutant un nouveau chiffre impair à gauche de 59 375. Si on divise chacun des cinq entiers

$$159\,375, \quad 359\,375, \quad 559\,375, \quad 759\,375, \quad 959\,375$$

par $5^6 = 15625$, on obtient un résultat qui n'est pas un entier, sauf pour $\frac{359\,375}{15625} = 23$. Par conséquent, $359\,375 = 5^6 \times 23$ donc il existe donc bien un entier à 6 chiffres qui n'a que des chiffres impairs et qui est divisible par 5^6 . De plus, il est obtenu en prenant l'entier correspondant à $n = 5$ et en ajoutant un nouveau chiffre impair à gauche.

Pour démontrer le résultat, on va montrer que ce procédé peut être réalisé en général. Plus précisément, on montre ce qui suit :

Supposons que n soit un entier positif et que $x = d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1$ soit un entier à n chiffres, dont les chiffres d_1 , d_2 , et ainsi de suite jusqu'à d_n , sont tous impairs. Si x est un multiple de 5^n , alors il existe un chiffre impair d tel que l'entier $y = dd_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1$ (ayant $n + 1$ chiffres) soit un multiple de 5^{n+1} .

Avec les notations de l'énoncé ci-dessus, on a $y = d \times 10^n + x$. Les seules possibilités pour d sont $d = 1$, $d = 3$, $d = 5$, $d = 7$ ou $d = 9$. En supposant que x soit un multiple de 5^n , on veut montrer que $d \times 10^n + x$ est un multiple de 5^{n+1} pour l'une de ces valeurs de d .

Supposons que z soit l'entier tel que $x = 5^n \times z$. Alors on a

$$\begin{aligned} y &= d \times 10^n + x \\ &= d \times 2^n 5^n + 5^n z \\ &= 5^n (d \times 2^n + z) \end{aligned}$$

et donc y a déjà un facteur de 5^n . Cela signifie que pour montrer qu'il a un facteur de 5^{n+1} , il faut montrer qu'on peut choisir d de sorte que $d \times 2^n + z$ ait un facteur de 5. On note que x n'a que des chiffres impairs, donc x est impair, ce qui implique que z est impair.

On examine les possibilités pour le chiffre des unités de $d \times 2^n$. Le chiffre des unités de 2^n est l'un des nombres 2, 4, 6 ou 8, et d est l'un des nombres 1, 3, 5, 7 ou 9. Dans le tableau ci-dessous, les colonnes correspondent aux valeurs possibles du chiffre des unités de 2^n et les lignes correspondent aux valeurs de d . Les cellules contiennent le chiffre des unités de $d \times 2^n$. Par exemple, si $d = 3$ et si 2^n a un chiffre des unités égal à 8, alors $d \times 2^n$ a le même chiffre des unités que $3 \times 8 = 24$, donc il y a un 4 dans la cellule correspondant à $d = 3$ et au cas où 2^n a un chiffre des unités égal à 8.

	2	4	6	8
1	2	4	6	8
3	6	2	8	4
5	0	0	0	0
7	4	8	2	6
9	8	6	4	2

On remarque que dans chaque colonne de ce tableau, chacun des cinq chiffres pairs apparaît exactement une fois. Cela signifie que, peu importe l'entier n , on peut choisir d de sorte que $d \times 2^n$ ait n'importe quel chiffre des unités pair désiré. On peut maintenant procéder ainsi :

- Si le chiffre des unités de z est 1, alors on choisit d de sorte que le chiffre des unités de $d \times 2^n$ soit 4.
- Si le chiffre des unités de z est 3, alors on choisit d de sorte que le chiffre des unités de $d \times 2^n$ soit 2.
- Si le chiffre des unités de z est 5, alors on choisit d de sorte que le chiffre des unités de $d \times 2^n$ soit 0.
- Si le chiffre des unités de z est 7, alors on choisit d de sorte que le chiffre des unités de $d \times 2^n$ soit 8.
- Si le chiffre des unités de z est 9, alors on choisit d de sorte que le chiffre des unités de $d \times 2^n$ soit 6.

Cela donne un entier $d \times 2^n + z$ ayant un chiffre des unités égal à 5 dans tous les cas. Ainsi, peu importe les valeurs de z et de n , il existe une manière de choisir d tel que $d \times 2^n + z$ ait un chiffre des unités égal à 5. Cela garantit que $d \times 2^n + z$ est un multiple de 5, ce qui garantit à son tour que $y = 5^n (d \times 2^n + z)$ est un multiple de 5^{n+1} . Le nouveau chiffre d est impair et tous les chiffres de x sont impairs, donc y n'a aussi que des chiffres impairs.

On a montré que s'il existe un entier à n chiffres qui n'a que des chiffres impairs et qui est un multiple de 5^n , alors il doit exister un entier à $n + 1$ chiffres qui n'a que des chiffres impairs et qui est un multiple de 5^{n+1} . Au début de la solution, on a montré que cela est vrai pour $n = 1$, $n = 2$, et ainsi de suite jusqu'à $n = 6$. Ce raisonnement *inductif* implique qu'il existe un entier à 7 chiffres qui n'a que des chiffres impairs et qui est divisible par 5^7 , et donc qu'il existe un entier à 8 chiffres qui n'a que des chiffres impairs et qui est divisible par 5^8 , et ainsi de suite. En construisant les entiers désirés un chiffre à la fois, on

doit éventuellement atteindre un entier à 2025 chiffres qui n'a que des chiffres impairs et qui est divisible par 5^{2025} .