Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2025

(11$^{\text{e}}$ année – Secondaire V)

le mercredi 26 février 2025
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 27 février 2025
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. D'après la priorité des opérations, on obtient : $2 - 0 + 2 \times 5 = 2 - 0 + 10 = 12$.

RÉPONSE : (D)

2. D'après le graphique, 20 % des élèves participants au sondage ont choisi le vendredi.
Comme 3000 élèves au total ont participé au sondage, le nombre d'élèves qui ont choisi le vendredi comme jour préféré de la semaine est $\frac{20}{100} \times 3000 = 20 \times 30 = 600$.

RÉPONSE : (B)

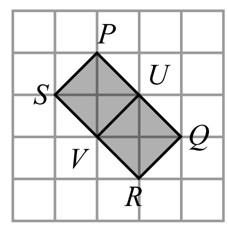
3. Les valeurs entières de x qui satisfont l'inégalité $2 < x < 14$ sont les entiers de 3 à 13 inclusivement. Il y a donc $13 - 3 + 1 = 11$ entiers au total.

RÉPONSE : (E)

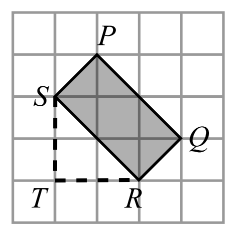
4. Alfonzo est payé 14 \$ sur les 50 \$. Donc, Rachel et Christophe sont payés ensemble 50 \$ − 14 \$ = 36 \$.
Rachel est payée le double de ce que Christophe est payé. Elle reçoit donc les $\frac{2}{3}$ de 36 \$, et Christophe reçoit $\frac{1}{3}$ de 36 \$.
Ainsi, Christophe est payé $\frac{1}{3} \times 36\,\$ = 12\,\$$.

RÉPONSE : (B)

5. *Solution 1*
Nous commençons par placer les points U et V à l'intersection des lignes du quadrillage indiquées.
(Vous devriez vérifier par vous-même pourquoi U et V sont situés sur PQ et RS, respectivement.)
Chacun des segments PU, UQ, QR, RV, VS, SP et UV est la diagonale d'un carré de 1×1, et divise donc ce carré en deux triangles de même aire.
Le rectangle $PQRS$ contient 8 de ces triangles, chacun ayant une aire de $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$, donc l'aire du rectangle $PQRS$ est $8 \times \frac{1}{2} = 4$.



Solution 2
Nous commençons par construire le triangle rectangle STR, comme dans la figure ci-contre.
Par le théorème de Pythagore, $SR^2 = ST^2 + TR^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, donc $SR = \sqrt{8}$ (puisque $ST > 0$).
De même, $QR^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, donc $QR = \sqrt{2}$ (puisque $QR > 0$).
L'aire du rectangle $PQRS$ est $SR \times QR = \sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$.



RÉPONSE : (C)

6. Puisque $\sqrt{2025} = 45$, le prochain carré parfait supérieur à 2025 est $46^2 = 2116$.
Donc, la plus petite valeur possible pour n est $2116 - 2025 = 91$.

RÉPONSE : (E)

7. La réponse correcte est 13. Pourquoi ?
Étant donné que les scores de 10 et de 5 sont des multiples de 5, toute combinaison de ces deux valeurs sera également un multiple de 5.
Le multiple de 5 le plus proche en dessous de 13 est 10. Donc, pour obtenir un score total de 13, un minimum de trois fléchettes doivent chacune marquer 1 point (puisque $13 - 10 = 3$).
Cependant, au moins une fléchette est nécessaire pour marquer les 10 points restants, et donc au moins quatre fléchettes sont nécessaires pour obtenir 13 points.

On vérifie que chacune des réponses restantes est possible. En effet, $16 = 10+5+1$, $11 = 5+5+1$, $7 = 5+1+1$ et $20 = 10+5+5$.

RÉPONSE : (C)

8. Puisque les 15 entiers ont une moyenne de 18, alors la somme de ces 15 entiers est $15 \times 18 = 270$. Puisque 5 de ces entiers ont une moyenne de 12, alors la somme de ces 5 entiers est $5 \times 12 = 60$. Ainsi, la somme des 10 autres entiers est $270 - 60 = 210$, et donc leur moyenne est $\frac{210}{10} = 21$.

RÉPONSE : (B)

9. *Solution 1*
On factorise le membre gauche $x^2 - y^2 = 72$ pour obtenir $(x-y)(x+y) = 72$.
Lorsqu'on reporte $x - y = 12$ dans cette equation, on obtient $12(x+y) = 72$, et donc $x + y = \frac{72}{12} = 6$.
Solution 2
Pour résoudre le système d'équations, on reporte la deuxième équation $x = 12 + y$ dans la première équation $x^2 - y^2 = 72$ et on obtient $(12+y)^2 - y^2 = 72$.
En développant et simplifiant, on obtient $144 + 24y + y^2 - y^2 = 72$ ou $24y = -72$, ainsi $y = \frac{-72}{24} = -3$.
Puisque $x = 12 + y = 12 - 3 = 9$, alors $x + y = 9 - 3 = 6$.

RÉPONSE : (E)

10. Il y a 50 groupes, donc $m + n = 50$. Il y a 186 élèves, donc $3m + 4n = 186$.
Pour résoudre le système d'équations, on reporte $m = 50 - n$ dans la deuxième équation $3m + 4n = 186$ et on obtient $3(50 - n) + 4n = 186$.
En développant et simplifiant, on obtient $150 - 3n + 4n = 186$ ou $n = 186 - 150 = 36$.
Puisque $m = 50 - n = 50 - 36 = 14$, alors $m - n = 14 - 36 = -22$.

RÉPONSE : (A)

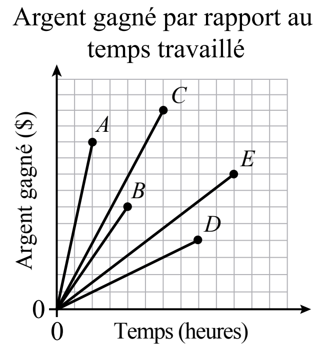
11. Dans le tableau ci-dessous, on numérote les ampoules de 1 à 12, et on marque celles qui sont allumées par un 1 et celles qui ne le sont pas par un 0.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Situation de départ (toutes les ampoules sont éteintes) :	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Après qu'Angie a appuyé sur chaque 2$^{\text{e}}$ interrupteur :	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Après que Bilal a appuyé sur chaque 3$^{\text{e}}$ interrupteur :	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
Après que Chenxhui a appuyé sur chaque 4$^{\text{e}}$ interrupteur :	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1

À la fin du processus, les ampoules numérotées 2, 3, 9, 10 et 12 sont allumées ; il y a donc 5 ampoules allumées.

RÉPONSE : (A)

12. L'axe des ordonnées représente l'argent gagné (en dollars), et l'axe des abscisses représente le temps (en heures).
Ainsi, l'argent gagné par heure par chaque employé est la pente du segment reliant l'origine (0,0) au point marqué par la lettre de l'employé.
L'employé ayant la plus grande rémunération horaire est celui dont le segment a la pente la plus élevée.
Le segment de droite ayant la pente la plus élevée est celui le plus incliné parmi les cinq, donc l'employé A a été payé le plus par heure.
Alternativement, on ajoute des nombres à chacun des axes, ensuite on les utilise pour déterminer la pente de chaque segment, et ainsi le montant gagné par heure pour chaque employé.



Réponse : (A)

13. Étant donné que l'équation est vraie pour tout nombre réel x, elle l'est en particulier pour $x = 0$.
Lorsque'on reporte $x = 0$, on obtient $(0 + 2)(0 + t) = 0^2 + b(0) + 12$, d'où, en simplifiant, on obtient $2t = 12$, et donc $t = 6$.
L'équation devient $(x + 2)(x + 6) = x^2 + bx + 12$, d'où en simplifiant, on obtient $x^2 + 8x + 12 = x^2 + bx + 12$, et donc $b = 8$.

Réponse : (B)

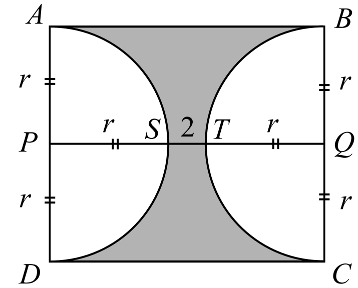
14. Chaque minute où le temps avance, le volume de la substance double, et ainsi, chaque minute où le temps recule, le volume est réduit de moitié.
Le récipient était plein à 9h 20, donc il était rempli à moitié à 9h 19, et au quart à 9h 18.

Réponse : (E)

15. Soit N le plus petit entier strictement positif divisible par 12, 13, 14 et 15.
Un nombre divisible par 12 a pour facteurs 3 et 4, puisque $3 \times 4 = 12$ et que 3 et 4 sont premiers entre eux.
De même, chaque nombre divisible par 14 a pour facteurs 2 et 7.
Cependant, N doit avoir un facteur 4 et, par conséquent, il a un facteur 2.
N est divisible par $15 = 3 \times 5$ et, par conséquent, 5 est également un facteur de N (le 3 ayant été précédemment inclus).
Le nombre premier 13 est également un facteur de N.
Les facteurs de N sont 3, 4, 7, 5, et 13, donc $N = 3 \times 4 \times 7 \times 5 \times 13 = 5460$ (ce nombre est le plus petit commun multiple de 12, 13, 14 et 15).
Le plus petit entier strictement positif à cinq chiffres divisible par 12, 13, 14 et 15 est le plus petit multiple entier de N supérieur ou égal à 10 000.
Le plus petit multiple entier de N supérieur ou égal à 10 000 est $2N = 2 \times 5460 = 10\,920$.
Le chiffre des centaines du plus petit entier strictement positif à cinq chiffres divisible par 12, 13, 14 et 15 est 9.

Réponse : (D)

16. Soient P et Q les milieux des segments AD et BC, respectivement. On relie P à Q, et l'on note les points d'intersection du segment PQ avec chaque cercle S et T, comme dans la figure ci-contre. Puisque $AD = BC$, les demi-cercles ont des diamètres égaux, et donc des rayons égaux, r. Ainsi, $AP = PD = PS = BQ = QC = TQ = r$.
La distance minimale entre les deux demi-cercles est $ST = 2$, donc le quadrilatère $ABCD$ a pour dimensions $AD = 2r$ et $AB = PQ = 2r + 2$.
L'aire du quadrilatère $ABCD$ est $AD \times AB = 2r(2r + 2) = 224$.
En résolvant cette équation, on obtient



$$\begin{aligned} 2r(2r+2) &= 224 \\ 4r^2 + 4r &= 224 \\ r^2 + r - 56 &= 0 \\ (r+8)(r-7) &= 0 \end{aligned}$$

et donc $r = 7$ (puisque $r > 0$). L'aire de la partie ombrée est la différence entre l'aire du quadrilatère $ABCD$ et l'aire combinée des deux demi-cercles, soit $224 - \left(2 \cdot \frac{1}{2}\pi 7^2\right) \approx 70$.

Réponse : (E)

17. La probabilité que Francesca gagne son premier match est égale à la probabilité qu'elle joue contre Dominique ou Estella et qu'elle gagne, ajoutée à la probabilité qu'elle joue contre l'un des cinq autres joueurs et qu'elle gagne.
Il est également probable que Francesca joue son premier match contre n'importe laquelle des sept autres joueuses, et donc la probabilité qu'elle joue contre Dominique ou Estella est de $\frac{2}{7}$.
La probabilité qu'elle gagne son premier match contre l'une de ces deux joueuses est de $\frac{2}{5}$, et donc la probabilité qu'elle joue son premier match contre Dominique ou Estella et qu'elle gagne est de $\frac{2}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$.
La probabilité que Francesca joue son premier match contre l'une des cinq autres joueuses est $\frac{5}{7}$.
La probabilité qu'elle gagne son premier match en jouant contre l'une des cinq autres joueuses est $\frac{3}{4}$, et donc la probabilité qu'elle joue son premier match contre l'une des cinq autres joueuses et qu'elle gagne est $\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{28}$.
Ainsi, la probabilité que Francesca gagne son premier match est $\frac{4}{35} + \frac{15}{28} = \frac{16}{140} + \frac{75}{140} = \frac{91}{140} = \frac{13}{20}$.

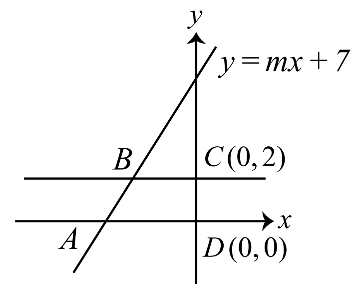
Réponse : (D)

18. Lorsque Arturo termine la course, il a 200 m d'avance sur Morgan et 290 m d'avance sur Henri. Donc, pendant la même durée, Morgan court 2000 m $-$ 200 m $=$ 1800 m tandis qu'Henri en court 2000 m $-$ 290 m $=$ 1710 m.
S'ils continuent à leurs vitesses respectives, Morgan courra les derniers $\frac{1800 \text{ m}}{9} = 200$ m de la course tandis qu'Henri en courra $\frac{1710 \text{ m}}{9} = 190$ m.

Par conséquent, Morgan termine la course de 1800 m + 200 m = 2000 m dans le même temps qu'Henri court 1710 m + 190 m = 1900 m. Morgan termine la course avec un avance de 100 m sur Henri.

Réponse : (B)

19. Soient A et B les points d'intersection de la droite d'équation $y = mx + 7$ avec les droites d'équation $y = 0$ et $y = 2$, respectivement. De plus, soit C le point avec les coordonnées (0,2) et D le point avec les coordonnées (0,0). Le trapèze $ABCD$ est donc celui décrit dans l'énoncé du problème, comme dans la figure ci-contre.



On cherche à exprimer les coordonnées des points A et B en fonction de m.
Pour déterminer les coordonnées de A, on trouve le point d'intersection de la droite d'équation $y = mx + 7$ avec la droite d'équation $y = 0$. On pose $0 = mx + 7$, d'où on obtient $x = -\frac{7}{m}$.
Le point A est situé sur la droite d'équation $y = 0$, donc son ordonnée est 0.
Donc, les coordonnées de A sont $\left(-\frac{7}{m}, 0\right)$. De même, les coordonnées de B sont $\left(-\frac{5}{m}, 2\right)$.
Le trapèze $ABCD$ a pour bases parallèles AD et BC, et pour hauteur CD.
Les deux bases sont horizontales et ont pour longueurs $AD = \frac{7}{m}$ et $BC = \frac{5}{m}$. La longueur de CD est 2.
Ainsi, l'aire du trapèze $ABCD$ s'exprime par $\frac{1}{2} \cdot CD \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{7}{m} + \frac{5}{m}\right) = \frac{12}{m}$.
D'après l'énoncé, l'aire du trapèze est égale à 3, et donc $\frac{12}{m} = 3$, d'où $m = 4$.

Réponse : (C)

20. Le produit des chiffres d'un entier à deux chiffres est au plus $9 \times 9 = 81 < 200$, donc il n'existe aucun entier à deux chiffres possédant la propriété spécifiée.
On remarque que $200 = 2^3 \times 5^2$. Donc, on cherche des produits de 3, 4, ou 5 chiffres tels que ce produit soit égal à 200.
Le seul chiffre qui soit un multiple de 5 est 5 lui-même, donc, peu importe le nombre de chiffres de m, exactement deux de ses chiffres doivent être le chiffre 5.
Le nombre d'entiers m à trois chiffres ayant la propriété spécifiée est trois, puisque si deux des chiffres sont des 5, le troisième doit être un 8. Il existe trois entiers à trois chiffres ayant un chiffre égal à 8 et deux chiffres égaux à 5 : 558, 585 et 855.
Si le nombre m a quatre chiffres, alors deux de ses chiffres sont des 5, et les deux autres doivent avoir un produit égal à huit.
Les seules façons d'exprimer 8 comme produit de deux entiers sont $8 = 2 \times 4$ et $8 = 1 \times 8$.
Dans les deux cas, il y a six façons de choisir où placer les deux chiffres de 5. Ce sont

55_ _ 5_5_ 5_ _5 _55_ _5_5 _ _55

Dans chacun de ces six cas, il y a deux façons de placer les chiffres restants. Il y a également deux choix possibles pour les deux chiffres restants (2 et 4 ou 1 et 8), donc le nombre de nombres à quatre chiffres ayant la propriété spécifiée est $6 \times 2 \times 2 = 24$.
Par une méthode de comptage similaire, on en conclut qu'il y a 10 façons de placer les deux chiffres 5 dans un nombre m à cinq chiffres..

Les trois chiffres restants doivent avoir un produit égal à 8, donc ils doivent être : 1, 1 et 8 ; 1, 2 et 4 ; 2, 2 et 2.
Si les chiffres restants sont 1, 1, et 8, alors il y a trois choix pour placer ces chiffres. Une fois que le chiffre 8 est placé, les deux autres doivent être des 1 (il n'y a donc aucun autre choix à faire).
Si les chiffres restants sont 1, 2 et 4, alors il y a six façons de les placer, puisqu'il y a six façons d'ordonner les chiffres 1, 2 et 4.
Finalement, si tous les chiffres restants sont égaux à 2, alors il n'y a qu'une seule façon de placer les chiffres.
Ainsi, il y a $3 \times 10 + 6 \times 10 + 10 = 100$ nombres à cinq chiffres ayant la propriété spécifiée.

Le nombre total d'entiers m avec $1 < m < 100\,000$, ayant la propriété que le produit de chiffres de m est égal à 200 est $3 + 24 + 100 = 127$. L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de N est 27.

Réponse : (B)

21. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est toujours le côté le plus long. Donc, l'hypoténuse a une longueur de c cm.
Les deux autres longueurs, a cm et b cm, sont les longueurs des cathètes. Donc, l'aire du triangle est de $\frac{1}{2}ab$ cm^2.
D'après l'énoncé, l'aire du triangle est 54 cm^2, et donc $\frac{1}{2}ab = 54$ ou $ab = 108$.
Puisque a et b sont des entiers, a et b doivent former une paire de facteurs de 108. Il est également donné que $a < b$, donc les seules possibilités pour la paire (a,b) sont (1,108), (2,54), (3,36), (4,27), (6,18) et (9,12).
D'après le théorème de Pythagore, on obtient $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
On remarque que

$$\begin{aligned}\sqrt{1^2 + 108^2} &\approx 108.00463 \\ \sqrt{2^2 + 54^2} &\approx 54.037 \\ \sqrt{3^2 + 36^2} &\approx 36.1248 \\ \sqrt{4^2 + 27^2} &\approx 27.2947 \\ \sqrt{6^2 + 18^2} &\approx 18.9737 \\ \sqrt{9^2 + 12^2} &= 15\end{aligned}$$

et donc, l'unique paire (a,b) qui conduit à une valeur entière de c est pour $a = 9$ et $b = 12$. On en déduit que $c = 15$.

Réponse : 15

22. On effectue d'abord les substitutions suivantes : $A = 2^x$, $B = 2^y$ et $C = 3^z$.
Avec ces substitutions, les trois équations deviennent

$$\begin{aligned}A + B + \frac{1}{3}C &= 2259 \quad (1) \\ AB + C &= 7073 \quad (2) \\ A + B + C &= 6633 \quad (3)\end{aligned}$$

On soustrait l'équation (1) de l'équation (3) et on obtient $\frac{2}{3}C = 6633 - 2259 = 4374$.
Ainsi, $C = \frac{3}{2} \cdot 4374 = 6561$.

Lorsqu'on reporte $C = 6561$ dans l'équation (2), on obtient $AB + 6561 = 7073$ ou $AB = 512$.
Lorsqu'on reporte $C = 6561$ dans l'équation (3), on obtient $A+B+6561 = 6633$ ou $A+B = 72$.
On multiplie chaque membre de l'équation $A + B = 72$ par A (puisque $A \neq 0$) ce qui donne $A^2 + AB = 72A$. Lorsqu'on reporte $AB = 512$, on obtient $A^2 + 512 = 72A$.
On réécrit l'équation donnée sous la forme $A^2 - 72A + 512 = 0$, que l'on peut factoriser en $(A - 64)(A - 8) = 0$.
Si $A = 64$, alors on peut utiliser soit $AB = 512$, soit $A + B = 72$ pour en déduire que $B = 8$, et si $A = 8$, on peut de la même manière en déduire que $B = 64$.
Ainsi, on a que A et B sont 8 et 64, mais on ne peut pas déterminer leur ordre. Puisque $64 = 2^6$ et $8 = 2^3$, on en déduit que x et y sont 6 et 3, sans toutefois pouvoir déterminer avec certitude lequel correspond à quelle valeur.
À partir de $C = 6561$, on obtient $3^z = 6561 = 3^8$ et donc, $z = 8$.
Quelle que soit la correspondance entre x et y avec 8 et 64, on obtient $xyz = 3 \times 6 \times 8 = 144$.
Le nombre formé par les deux derniers chiffres de 144 est 44.

Réponse : 44

23. Soit x le nombre de minutes qu'il faudrait à la plus grande fourmi pour construire une fourmilière toute seule, et soit y le nombre de minutes qu'il faudrait à la plus petite fourmi pour construire une fourmilière toute seule.
Puisque la plus grande fourmi peut construire une fourmilière en x minutes, elle construit $\frac{1}{x}$ de fourmilière par minute.
De même, la plus petite fourmi construit $\frac{1}{y}$ de fourmilière par minute.
Donc, en travaillant ensemble, les deux fourmis construisent $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ de fourmilière par minute.
D'après l'énoncé, il faut 24 minutes aux deux fourmis pour construire une fourmilière ensemble; elles construisent donc $\frac{1}{24}$ de fourmilière par minute en travaillant ensemble.
Donc, on obtient l'équation : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24}$.
On multiplie chaque membre de l'équation par $24xy$, et on obtient $24y + 24x = xy$.
D'après l'autre condition donnée, nous avons $x = y - 14$, donc on peut remplacer x par $y - 14$ pour obtenir
$24y + 24(y - 14) = (y - 14)y$.
On développe et réécrit l'équation sous la forme $y^2 - 62y + 336 = 0$, que l'on peut factoriser en $(y - 56)(y - 6) = 0$.
Si $y = 6$, alors $x = -8$, valeur rejetée puisque x doit être positive. Donc, $y = 56$.

Réponse : 56

24. Considérons la fonction $g(x) = 59x$. Remarquons que $g(1) = 59$, $g(2) = 118$ et $g(3) = 177$, d'où on obtient $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$ et $f(3) = g(3)$.
Soit $h(x) = f(x) - g(x)$ un polynôme. On observe que, par construction, $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$ son racines de $h(x)$.
À l'aide de manipulations algébriques, on obtient

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s - 59x = x^4 + px^3 + qx^2 + (r - 59)x + s$$

Remarquons que $h(x)$ est un polynôme de degré quatre ayant le coefficient dominant égal à 1.
Puisque $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$ sont racines de $h(x)$, le polynôme peut être écrit comme suit :

$$h(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)k(x)$$

pour un certain polynôme $k(x)$. Cependant, puisque $h(x)$ est de degré quatre et que son coefficient dominant est égal à 1, il s'ensuit que le polynôme $k(x)$ est de degré un et a lui aussi un coefficient dominant égal à 1.
Ainsi, $h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-a)$ pour certain nombre réel a.
Lorsqu'on pose $x = 9$ et $x = -5$ dans $h(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} h(9) &= (9-1)(9-2)(9-3)(9-a) = 336(9-a) \\ h(-5) &= (-5-1)(-5-2)(-5-3)(-5-a) = 336(5+a) \end{aligned}$$

D'après la relation $h(x) = f(x) - g(x)$ ou $f(x) = h(x) + g(x)$, on peut déterminer la valeur de $f(9) + f(-5)$ comme suit :

$$\begin{aligned} f(9) + f(-5) &= h(9) + g(9) + h(-5) + g(-5) \\ &= 336(9-a) + 9(59) + 336(5+a) - 5(59) \\ &= 336(9) - 336a + 9(59) + 336(5) + 336a - 5(59) \\ &= 336(9+5) + 59(9-5) \\ &= 336(14) + 59(4) \\ &= 4940 \end{aligned}$$

On obtient, $T = 4940$, donc la réponse est $4 + 9 + 4 + 0 = 17$.

RÉPONSE : 17

25. On admet le résultat suivant : pour des entiers a et b, b^2 est divisible par a^2 si et seulement si b est divisible par a.
Puisque $2025 = 45^2$, et d'après ce qui précède, on en déduit que $(a_k)^2$ est divisible par 2025 si et seulement si a_k est divisible par 45.
Ainsi, le problème est équivalent à celui de déterminer le nombre de k où $1 \le k \le 2025$ tel que a_k soit divisible par 45.
Puisque $45 = 5 \times 9$ et que 5 et 9 sont premiers entre eux, on conclut que a_k est divisible par 45 si et seulement s'il est divisible par 5 et 9.
On considère les trois affirmations suivantes concernant les entiers de la suite.
Affirmation 1 : a_k est divisible par 5 si et seulement si k est égal à 4 de plus qu'un multiple de 5.
Affirmation 2 : a_k est divisible par 9 si et seulement si k est égal à 10 de plus qu'un multiple de 12.
Affirmation 3 : a_k est divisible par 45 si et seulement si k est égal à 34 de plus qu'un multiple de 60.
Par la suite, la solution sera structurée comme suit :
—Démonstration de l'affirmation 3 à partir des affirmations 1 et 2.
—Réponse à la question en s'appuyant sur l'affirmation 3.
—Démonstration des affirmations 1 et 2.
Démonstration de l'affirmation 3 à partir des affirmations 1 et 2
On peut vérifier que 34 est le plus petit entier strictement positif qui soit à la fois 4 de plus qu'un multiple de 5 et 10 de plus qu'un multiple de 12. D'après les affirmations 1 et 2, a_{34} est divisible par 45.
L'affirmation 1 implique que les multiples de 5 apparaissent dans la suite tous les 5 termes après a_{34} ; ce sont donc les a_k pour $k = 39$, $k = 44$, et ainsi de suite.
L'affirmation 1 implique que les multiples de 9 apparaissent dans la suite tous les 12 termes après a_{34} ; ce sont donc les a_k pour $k = 46$, $k = 58$, et ainsi de suite.
Le plus petit commun multiple de 5 et 12 est 60 ; ainsi, les entiers de la suite qui sont à la fois

multiples de 5 et de 9 apparaissent tous les 60 termes à partir de a_{34}.
Par conséquent, les termes de la suite qui sont multiples de 45 sont exactement les a_k où k est égal à 34 de plus qu'un multiple de 60.

Pour répondre à la question, on compte les entiers m tels que $1 \leq 60m + 34 \leq 2025$. En réécrivant, $-33 \leq 60m \leq 1991$, et en divisant chaque membre par
by 34, on obtient $-\frac{33}{60} \leq m \leq \frac{1991}{60}$.

Puisque m est non négatif et que $\frac{1991}{60} \approx 33.18$, on conclut que m peut prendre les valeurs entières de 0 à 33 inclus, soit 34 valeurs au total.
La réponse à la question est 34.

Finalement, on démontre les affirmations 1 et 2.
Démonstration de l'affirmation 1 : a_k est divisible par 5 si et seulement si k est égal à 4 de plus qu'un multiple de 5
Supposons que deux termes consécutifs de la suite, a_n et a_{n+1}, soient tous les deux des multiples de 5. C'est-à-dire, supposons que $a_n = 5x$ et $a_{n+1} = 5y$, pour certains entiers x et y.
Ainsi, $a_{n+2} = a_n - a_{n+1} = 5x - 5y = 5(x - y)$ est également multiple de 5.
De même, on peut réécrire $a_{n+1} = a_{n-1} - a_n$ sous la forme $a_{n-1} = a_n + a_{n+1} = 5x + 5y = 5(x + y)$ qui est donc aussi un multiple de 5.
On a démontré que si deux termes consécutifs de la suite sont des multiples de 5, alors le terme qui les précède ainsi que celui qui les suit le sont aussi.
Ce raisonnement peut être repris pour conclure que *chaque* terme de la suite doit être un multiple de 5.
Toutefois, comme tous les termes de la suite ne sont pas multiples de 5 (par exemple, $a_1 = 1$ ne l'est pas) , on en conclut qu'il ne peut pas y avoir deux termes consécutifs qui soient tous deux multiples de 5.
Par un raisonnement similaire, on peut démontrer que si a_n et a_{n+2} sont tous deux des multiples de 5 (deux termes distants de deux dans la suite), alors tous les termes de la suite doivent l'être aussi.
Par conséquent, on en conclut que deux multiples de 5 dans la suite doivent être séparés par au moins deux termes strictement entre eux.
Maintenant, on considère deux termes consécutifs a_n et a_{n+1}. En appliquant la définition récursive, on peut exprimer les termes suivants de la suite en fonction de a_n et a_{n+1} comme suit :

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= -a_{n+1} + a_n \\
a_{n+3} &= -a_{n+2} + a_{n+1} \\
&= -(-a_{n+1} + a_n) + a_{n+1} \\
&= 2a_{n+1} - a_n \\
a_{n+4} &= -a_{n+3} + a_{n+2} \\
&= -(2a_{n+1} - a_n) - a_{n+1} + a_n \\
&= -3a_{n+1} + 2a_n \\
a_{n+5} &= -a_{n+4} + a_{n+3} \\
&= -(-3a_{n+1} + 2a_n) + 2a_{n+1} - a_n \\
&= 5a_{n+1} - 3a_n
\end{aligned}$$

Si l'on suppose que a_n est un multiple de 5, alors $a_{n+5} = 5a_{n+1} - 3a_n$ l'est également. De plus, il ne peut pas y avoir d'autres multiples de 5 dans la suite entre ces deux-là, car sinon, il y aurait

deux multiples de 5 à une distance d'un seul terme, ce qui est impossible.
En calculant les premiers termes de la suite, on obtient $a_1 = 1$ et $a_2 = 3$, $a_3 = -3 + 1 = -2$ et $a_4 = -a_3 + a_2 = 2 + 3 = 5$, donc a_4 est divisible par 5.
On en déduit que a_{4+5m} est divisible par 5 pour tout entier strictement positif m, et qu'il n'y a aucun autre k pour lequel a_k soit divisible par 5.

<u>*Démonstration de l'affirmation 2*</u> : a_k est divisible par 9 si et seulement si k est égal à 10 de plus qu'un multiple de 12.
Par un raisonnement presque identique à celui de la démonstration de l'affirmation 1, on peut démontrer que les termes de la suite qui sont des multiples de 3 apparaissent tous les 4 termes. On admet ce fait dans cette démonstration.
En continuant à calculer les premiers termes de la suite, on obtient

$$1{,}3, -2{,}5, -7{,}12, -19{,}31, -50{,}81,$$

et l'on trouve que $81 = a_{10}$ est le premier multiple de 9.
En reprenant l'idée de la démonstration de l'affirmation 1 et en supposant que a_n et a_{n+1} sont des termes consécutifs de la suite, on peut exprimer les termes a_{n+2} à a_{n+12} en fonction de a_n et a_{n+1} comme suit :

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= -a_{n+1} + a_n \\
a_{n+3} &= 2a_{n+1} - a_n \\
a_{n+4} &= -3a_{n+1} + 2a_n \\
a_{n+5} &= 5a_{n+1} - 3a_n \\
a_{n+6} &= -8a_{n+1} + 5a_n \\
a_{n+7} &= 13a_{n+1} - 8a_n \\
a_{n+8} &= -21a_{n+1} + 13a_n \\
a_{n+9} &= 34a_{n+1} - 21a_n \\
a_{n+10} &= -55a_{n+1} + 34a_n \\
a_{n+11} &= 89a_{n+1} - 55a_n \\
a_{n+12} &= -144a_{n+1} + 89a_n
\end{aligned}$$

Maintenant, si a_n est un multiple de 9, alors $a_{n+12} = -144a_{n+1} + 89a_n$ l'est aussi, puisque 144 est un multiple de 9.
Comme a_{10} est un multiple de 9, cela montre que a_{10+12m} est également un multiple de 9 pour tout entier positif m. Il reste à vérifier qu'il n'y a pas d'autres multiples de 9 dans la suite.
Supposons qu'il existe un autre multiple de 9. Alors, il existe un entier n tel que a_n est un multiple de 9, et un certain k où $0 < k < 12$ tel que a_{n+k} l'est aussi.
Un multiple de 9 est aussi un multiple de 3, donc, d'après les affirmations du début de la démonstration, on doit avoir soit a_{n+4}, soit a_{n+8} également multiple de 9.
Si a_{n+4} est un multiple de 9, alors $-3a_{n+1} + 2a_n$ est un multiple de 9. Si a_n et $-3a_{n+1} + 2a_n$ sont tous les deux des multiples de 9, alors $-3a_{n+1}$ l'est aussi, ce qui signifie que a_{n+1} est un multiple de 3.
Ainsi, a_n et a_{n+1} doivent être tous les deux des multiples de 3. D'après le raisonnement utilisé précédemment, cela impliquerait que chaque terme de la suite est un multiple de 3, ce qui est faux.
Par conséquent, a_{n+4} n'est pas un multiple de 9. Un raisonnement similaire montre que a_{n+8} ne l'est pas non plus.

Réponse : 34