Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2025

le mercredi 2 avril 2025
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 3 avril 2025
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Puisque $4(x-2)=2(x-4)$, alors $4x-8=2x-8$ d'où $2x=0$, ou $x=0$.

   (b) *Solution 1*

   Puisque $2x=9$, alors $6x=3\cdot 2x=3\cdot 9=27$.
   Donc $2^{6x-23}=2^{27-23}=2^4=16$.

   Solution 2

   Puisque $2x=9$, alors $x=\frac{9}{2}$.
   Alors, $6x-23=6\cdot\frac{9}{2}-23=27-23=4$.
   Donc, $2^{6x-23}=2^4=16$.

   (c) En égalent les expressions de y, on obtient $3x+7=7x+3$, d'où $4=4x$ et donc $x=1$.
   Puisque $x=1$, alors $y=3x+7=3+7=10$, et donc, le point d'intersection a les coordonnées $(1,10)$.

2. (a) Puisque $3<\sqrt{k^2+4}<4$, alors $3^2<k^2+4<4^2$. (Puisque chaque membre est positif, on peut élever chaque membre au carré sans que la relation d'inégalité ne change.)
   Donc, $9<k^2+4<16$, et alors $5<k^2<12$.
   Puisque k est un entier positif dont le carré est compris entre 5 et 12, on a $k=3$.

   (b) Soit S la somme des 20 plus petits entiers positifs impairs.
   Donc $S=1+3+5+\cdots+35+37+39$.
   (Notez que le plus petit entier positif est 1, et que le 20$^{\text{e}}$ entier de cette liste doit être $19\cdot 2=38$ de plus que le premier terme.)
   Si on écrit les termes de S dans l'ordre inverse, on obtient $S=39+37+35+\cdots+5+3+1$.
   En additionnant les deux représentations, on obtient

   $$2S=40+40+40+\cdots+40+40+40$$

   Puisqu'il y a 20 termes dans chacune des sommes, cette dernière en contient également 20 termes. Chaque terme de cette somme vaut 40, car la première paire s'additionne à 40, et dans chaque paire suivante, on a un nombre qui augmente de 2 tandis que l'autre diminue de 2, donc leur somme ne change pas.
   Alors, $2S=20\cdot 40=800$ et la somme des 20 premiers entiers impairs est 400.

   (c) Puisque le $\triangle ABF$ est rectangle dans A, d'après le théorème de Pythagore, on a

   $$BF^2=AB^2+FA^2=16^2+13^2=256+169=425$$

   Puisque $\triangle BDF$ est équilatéral, alors $BD=DF=BF$ et $BD^2=DF^2=BF^2=425$.
   Puisque $\triangle BCD$ est rectangle en C, alors $BC^2+CD^2=BD^2=425$.
   Puisque $BC=8$, alors $8^2+CD^2=425$, d'où $CD^2=361$.
   Puisque $CD>0$, alors $CD=\sqrt{361}=19$.
   Puisque $\triangle DEF$ est rectangle en E, alors $DE^2+EF^2=DF^2=425$.
   Puisque $DE=5$, alors $5^2+EF^2=425$, d'où $EF^2=400$.
   Puisque $EF>0$, alors $EF=\sqrt{400}=20$.
   Donc, le périmètre du polygone $ABCDEF$ est $AB+BC+CD+DE+EF+FA$, soit $16+8+19+5+20+13$ ou 81.

3. (a) *Solution 1*

Puisque $p + q = 5$ et $q + r = 9$, alors $p + q + q + r = 5 + 9$ ou $p + 2q + r = 14$.
Puisque $p + 2q + r = 14$ et $p + q + r = 18$, en soustrayant les deux équations, on obtient :

$$(p + 2q + r) - (p + q + r) = 14 - 18$$

donc $q = -4$.

Solution 2

Puisque $p + q + r = 18$ et $p + q = 5$, alors $5 + r = 18$ et $r = 13$. Puisque $q + r = 9$ et $r = 13$, alors $q + 13 = 9$ et $q = -4$.

(b) Pour trouver l'abscisse à l'origine de la droite d'équation $6x + y = 24$, on pose $y = 0$ ce qui donne $6x = 24$ d'où $x = 4$.
Pour trouver l'ordonée à l'origine de la droite d'équation $6x + y = 24$, on pose $x = 0$ ce qui donne $y = 24$.
Puisque la parabole dont on cherche l'équation a une seule abscisse à l'origine (à savoir $x = 4$), on peut écrire son équation sous la forme $y = a(x - 4)^2$, où a est un nombre réel.
De plus, on sait que l'ordonnée à l'origine de la parabole est $y = 24$, donc son graphique passe par le point $(0, 24)$.
En substituant $(x,y) = (0, 24)$ dans l'equation $y = a(x - 4)^2$, on obtient $24 = a(0 - 4)^2$ ce qui donne $24 = 16a$, et donc $a = \frac{3}{2}$.
Par conséquent, l'équation de la parabole est $y = \frac{3}{2}(x - 4)^2$.

(c) Puisque $\dfrac{1}{2w} = \dfrac{1}{3y} = \dfrac{1}{4z}$ et que $\dfrac{1}{2w} + \dfrac{1}{3y} + \dfrac{1}{4z} = \dfrac{1}{24}$, alors chaque des expressions $\dfrac{1}{2w}$ et $\dfrac{1}{3y}$ et $\dfrac{1}{4z}$ est égale à un tiers du total, ce qui donne $\dfrac{1}{2w} = \dfrac{1}{3y} = \dfrac{1}{4z} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{24} = \dfrac{1}{72}$.
Par conséquent, $2w = 3y = 4z = 72$, d'où $w = 36$ et $y = 24$ et $z = 18$.
Donc, $w + y + z = 36 + 24 + 18 = 78$.

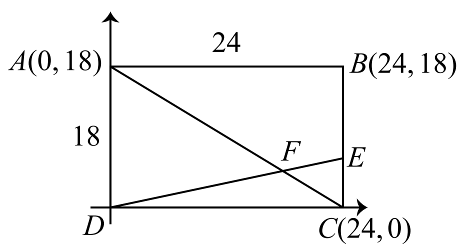
4. (a) Lorsque la roue de bicyclette effectue une révolution complète, la bicyclette avance d'une distance égale à la circonférence de la roue.
La roue avant de la bicyclette de Terry a un rayon de 15 cm ; donc, sa circonférence est égale à $2\pi \cdot (15 \text{ cm}) = 30\pi$ cm.
La roue arrière de la bicyclette de Terry a un rayon de 9 cm ; donc, sa circonférence est égale à $2\pi \cdot (9 \text{ cm}) = 18\pi$ cm.
Après une révolution complète de la roue avant, le nombre de révolutions de la roue arrière n'est pas un nombre entier, puisque 30π n'est pas un multiple entier de 18π.
Après deux révolutions complètes de la roue avant, le nombre de révolutions de la roue arrière n'est pas un nombre entier, puisque 60π n'est pas un multiple entier de 18π.
Après trois révolutions complètes de la roue avant, la roue arrière a fait 5 révolutions complètes, puisque $90\pi = 5 \cdot 18\pi$. (Notez que 90 est le plus petit commun multiple de 30 et 18.)
Par conséquent, après que Terry a avancé de 90π cm, chacune des deux roues a complété pour la première fois un nombre entier de révolutions.
Ainsi, la plus petite valeur de d est $d = 90\pi \approx 282.7$, d'où l'entier le plus proche de cette valeur minimale est 283.

(b) *Solution 1*

Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $DC = AB = 24$ et $\angle ADC = 90^\circ$.
D'après le théorème de Pythagore, on a $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 18^2 + 24^2 = 324 + 576 = 900$.
Puisque $AC > 0$, alors $AC = \sqrt{900} = 30$.
Considérons $\triangle ADF$ et $\triangle CEF$.
Puisque AD est parallèle à BC, alors $\angle DAF = \angle ECF$ et $\angle ADF = \angle CEF$.
Donc, $\triangle ADF$ et $\triangle CEF$ sont semblables.
Puisque $AD = 18$ et $CE = 6$, alors $\dfrac{CF}{AF} = \dfrac{CE}{AD} = \dfrac{6}{18}$.
Donc, $CF : AF = 1 : 3$.
Puisque $AC = CF + AF = 30$, alors $CF = \frac{1}{4}AC = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$.

Solution 2

Considérons le diagramme dans un système de coordonnées avec D à l'origine (0,0), A sur l'axe des ordonnées positif et C sur l'axe des abscisses positif.
Puisque $AD = 18$, alors les coordonnées d'A sont $(0, 18)$.
Puisque $DC = AB = 24$, alors les coordonnées de C sont $(24, 0)$.



Puisque BC est dans position verticale et $EC = 6$, alors les coordonnées d'E sont $(24, 6)$.
Le segment DE passe par l'origine et par le point $(24, 6)$, donc il a une pente de $\frac{6}{24}$, d'où son équation est $y = \frac{1}{4}x$.
Le segment AC passe par les points $(0, 18)$ et $(24, 0)$.
Donc, sa pente este égale à $\frac{18-0}{0-24} = -\frac{3}{4}$, d'où son équation est $y = -\frac{3}{4}x + 18$.
Le point F est l'intersection des segments AC et DE.
En égalent les expressions pour y, on obtient $\frac{1}{4}x = -\frac{3}{4}x + 18$, d'où $x = 18$.
En substituant dans l'équation $y = \frac{1}{4}x$, on obtient $y = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$.
Donc, les coordonnées de F sont $\left(18, \frac{9}{2}\right)$.
Finalement,

$$CF = \sqrt{(24-18)^2 + \left(0 - \frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{225}{4}}$$

et donc $CF = \frac{15}{2}$.

5. (a) *Solution 1*

Puisque deux des nombres sont 20 et 30, que le troisième nombre est compris entre 1 et 40 inclusivement, et que les trois nombres sont différents, il y a alors, 38 valeurs possibles pour le troisième nombre. Nous appelons la valeur choisie n.
Puisque $b < a$ et $b < c$, alors b est le plus petit. On l'identifie donc au plus petit nombre parmi 20, 30 et n.
Ainsi, il y a 2 façons d'ordonner l'attribution des deux nombres restants à a et c.
Par conséquent, il y a $38 \cdot 2 = 76$ combinaisons possibles.

Solution 2

À partir des informations données, deux parmi a, b et c sont égaux à 20 et 30.

Supposons que a et b sont 20 et 30 dans un certain ordre.
Puisque $b < a$, alors $b = 20$ et $a = 30$.
De plus, on a $c > b = 20$, avec $c \leq 40$, et aussi $c \neq a = 30$.
Cela signifie qu'il y a 19 valeurs possibles pour c dans ce cas (les entiers de 21 à 40 inclus, à l'exception de 30).

Supposons que b et c sont 20 et 30 dans un certain ordre.
Puisque $b < c$, alors $b = 20$ et $c = 30$.
De plus, on a $a > b = 20$, avec $a \leq 40$, et aussi $a \neq c = 30$.
Cela signifie qu'il y a 19 valeurs possibles pour a dans ce cas.
Par conséquent, dans ce cas, il y a 19 combinaisons possibles.

Supposons que a et c sont 20 et 30 dans un certain ordre.
Si $a = 20$ et $c = 30$, alors on a $b < a = 20$ et $b < c = 30$ (ce qui donne $b < 20$) et $b \geq 1$.
Ici, le fait que les trois entiers sont différents n'impose pas de restrictions supplémentaires.
Dans ce cas, il y a 19 valeurs possibles pour b (les entiers de 1 à 19 inclus).
Si $a = 30$ et $c = 20$, il y aura encore 19 valeurs pour b.
Donc, dans ce cas, il y a $19 + 19 = 38$ combinaisons possibles.

En tout, il y a $19 + 19 + 38 = 76$ combinaisons possibles.

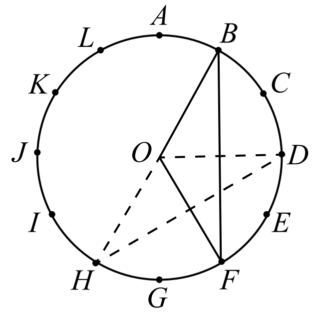
(b) En utilisant le fait que les valeurs de ces trois expressions forment une suite géométrique sans termes égaux à 0, les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sin\theta}{2-2\cos\theta} &= \frac{2+2\cos\theta}{1+\sin\theta} \\
(2-2\cos\theta)(2+2\cos\theta) &= (1+\sin\theta)^2 \\
4-4\cos^2\theta &= 1+2\sin\theta+\sin^2\theta \\
4(1-\cos^2\theta) &= 1+2\sin\theta+\sin^2\theta \\
4\sin^2\theta &= 1+2\sin\theta+\sin^2\theta \\
3\sin^2\theta-2\sin\theta-1 &= 0 \\
(3\sin\theta+1)(\sin\theta-1) &= 0
\end{aligned}$$

Donc, $\sin\theta = -\frac{1}{3}$ ou $\sin\theta = 1$.
Puisque $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$, alors $\cos^2\theta = 1-(-\frac{1}{3})^2 = \frac{8}{9}$ ou $\cos^2\theta = 0$.
Par conséquent, les valeurs possibles pour $\cos\theta$ sont $\sqrt{\frac{8}{9}}$, $-\sqrt{\frac{8}{9}}$, 0.
Celles-ci peuvent être réécrites sous la forme $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 0.
Notons que $\cos\theta = 0$ donne la suite géométrique constante 2, 2, 2.

6. (a) On étiquette les 12 points, dans l'ordre, par A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, et L. Soit

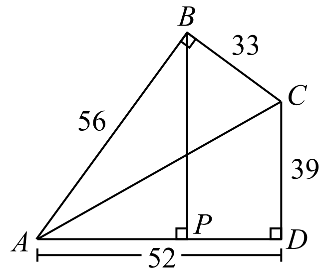
le centre du cercle O.
Puisque les 12 points sont également espacés, alors $\angle AOB = \angle BOC = \cdots = \angle KOL = \angle LOA$.
Il sera utile de considérer le nombre de ces 12 “intervalles” entre les paires de points. Par exemple, il y a 4 intervalles (en comptant dans le sens horaire) entre B et F.



Notons que si deux paires de points séparées par le même nombre d’intervalles sont connectées, les segments qui les unissent ont la même longueur. Par exemple, $BF = DH$ puisque B et F, et D et H sont séparés par 4 intervalles. En effet, par exemple, $\triangle BOF$ est isométrique au $\triangle DOH$ parce que $BO = FO = DO = HO$ (tous des rayons) et $\angle BOF = \angle DOH$.
Cela signifie qu’on peut caractériser le triangle formé avec 3 de ces 12 points par le nombre d’intervalles déterminé par chacun des côtés du triangle. Par exemple, $\triangle BDF$ est formé par $2+2+8$ intervalles, où le nombre d’intervalles est compté dans le sens horaire autour du cercle. En particulier, en comptant dans le sens horaire autour du cercle, le $\triangle BDF$ a 2 intervalles entre B et D, 2 intervalles entre D et F, et 8 intervalles entre F et B.
En considérant qu’il y a, en tout, 12 intervalles autour du cercle, les triangles ayant deux côtés isométriques sont d’une des formes suivantes : $1+1+10$ (par exemple, $\triangle ABC$), $2+2+8$ (par exemple, $\triangle ACE$), $3+3+6$ (par exemple, $\triangle ADG$), $4+4+4$ (par exemple, $\triangle AEI$), et $5+5+2$ (par exemple, $\triangle AFK$).
Il y a 12 positions distinctes pour chaque triangle caractérisé par $1+1+10$, $2+2+8$, $3+3+6$, et $5+5+2$. (Chacun des triangles donnés ci-dessus peut être tourné d’un intervalle à la fois.)
De plus, il y a 4 positions pour un triangle $4+4+4$, notamment $\triangle AEI$, $\triangle BFJ$, $\triangle CGK$, et $\triangle DHL$. Si l’on faisait tourner le triangle $\triangle DHL$ d’un intervalle supplémentaire, on reviendrait au triangle $\triangle AEI$.
En tout, il y a $12+12+12+12+4 = 52$ possibilités que 3 points parmi les 12 forment un triangle ayant au moins deux côtés isométriques.

(b) *Solution 1*

Reliez A au C.



D'après le théorème de Pythagore dans $\triangle ADC$, on obtient

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{52^2 + 39^2} = \sqrt{13^2(4^2 + 3^2)} = \sqrt{13^2}\sqrt{5^2} = 13 \cdot 5 = 65$$

Donc,

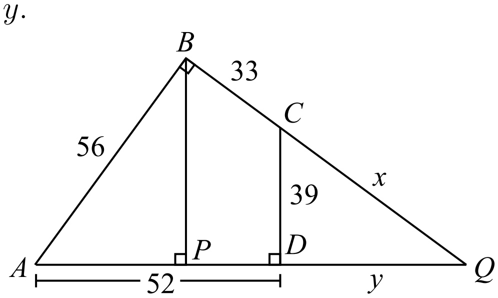
$$\begin{aligned}
\sin(\angle BAD) &= \sin(\angle BAC + \angle CAD) \\
&= \sin(\angle BAC)\cos(\angle CAD) + \cos(\angle BAC)\sin(\angle CAD) \\
&= \tfrac{33}{65} \cdot \tfrac{52}{65} + \tfrac{56}{65} \cdot \tfrac{39}{65} \\
&= \tfrac{33}{65} \cdot \tfrac{4}{5} + \tfrac{56}{65} \cdot \tfrac{3}{5} \\
&= \tfrac{300}{65 \cdot 5} \\
&= \tfrac{12}{13}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $BP = AB\sin(\angle BAD) = 56 \cdot \frac{12}{13} = \frac{672}{13}$.

Solution 2

Prolongez BC et AD jusqu'à leur intersection au point Q.

Notons $CQ = x$ et $DQ = y$.



Ainsi, le $\triangle CDQ$ est semblable au $\triangle ABQ$, parce que chaque triangle est rectangle et partagent l'angle Q.

Donc, $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{BQ}{DQ} = \dfrac{AQ}{CQ}$ et alors, $\dfrac{56}{39} = \dfrac{33 + x}{y} = \dfrac{52 + y}{x}$.

Ceci donne $56y = 39x + 39 \cdot 33$ et $56x = 39y + 39 \cdot 52$.

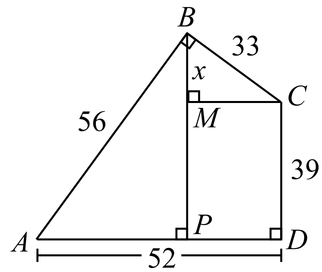
Alors, $-39x + 56y = 1287$ et $56x - 39y = 2028$. En ajoutant 39 fois la première de ces équations à 56 fois la seconde, on obtient

$$\begin{aligned}
39(-39x + 56y) + 56(56x - 39y) &= 39 \cdot 1287 + 56 \cdot 2028 \\
-39^2x + 39 \cdot 56y + 56^2x - 56 \cdot 39y &= 163761 \\
1615x &= 163761 \\
x &= \frac{163761}{1615} = \frac{507}{5}
\end{aligned}$$

Le $\triangle CDQ$ est sembable au $\triangle BPQ$, d'où $\dfrac{BP}{CD} = \dfrac{BQ}{CQ}$, ce qui donne

$$BP = \frac{CD \cdot BQ}{CQ} = \frac{39(33+x)}{x} = \frac{39 \cdot (33 + \frac{507}{5})}{\frac{507}{5}} = \frac{5 \cdot (33 + \frac{507}{5})}{13} = \frac{165 + 507}{13} = \frac{672}{13}$$

Solution 3
Soit M un point sur BP tel que CM est perpendiculaire à BP.
Notons $BM = x$.



Puisque $CMPD$ est un quadrilatère avec trois angles droits, alors il a quatre angles droits, et donc, c'est un rectangle.
Ainsi, $MP = CD = 39$ et $PD = MC$.
D'après le théorème de Pythagore dans le $\triangle BMC$, $MC = \sqrt{33^2 - x^2}$.
Cela signifie que $AP = 52 - PD = 52 - \sqrt{33^2 - x^2}$.
D'après le théorème de Pythagore dans le $\triangle BPA$,

$$\begin{aligned}
AB^2 &= AP^2 + BP^2 \\
56^2 &= (52 - \sqrt{33^2 - x^2})^2 + (x+39)^2 \\
56^2 &= 52^2 - 104\sqrt{33^2 - x^2} + 33^2 - x^2 + x^2 + 78x + 39^2 \\
104\sqrt{33^2 - x^2} &= 78x + 33^2 + 39^2 + 52^2 - 56^2 \\
104\sqrt{33^2 - x^2} &= 78x + 2178 \\
52\sqrt{33^2 - x^2} &= 39x + 1089 \\
52^2(33^2 - x^2) &= 1521x^2 + 84942x + 1185921 \\
0 &= 4225x^2 + 84942x - 1758735
\end{aligned}$$

En utilisant la formule quadratique,

$$x = \frac{-84942 \pm \sqrt{84942^2 - 4(4225)(-1758735)}}{2 \cdot 4225} = \frac{-84892 \pm 192192}{8450}$$

Puisque $x > 0$, alors $x = \dfrac{-84942 + 192192}{8450} = \dfrac{107250}{8450} = \dfrac{2145}{169} = \dfrac{165}{13}$.

Par conséquent, $BP = x + 39 = \dfrac{165}{13} + 39 = \dfrac{672}{13}$.

7. (a) Soit $b = g^{-1}(a)$. Puisque $f^{-1}(b) = 3$, alors $b = f(3) = 4$.
Puisque $g^{-1}(a) = b = 4$, alors $a = g(4) = 5$.

(b) *Solution 1*
La première équation peut être réécrite comme suit : $(x - 4y)^2 = 0$, d'où on obtient $x - 4y = 0$ ou $x = 4y$.
La deuxième équation peut être réécrite comme suit : $(\log_{10} x + \log_{10} y)^2 = 4$, d'où on obtient $\log_{10} x + \log_{10} y = \pm 2$.
En utilisant les lois des logarithmes, $\log_{10}(xy) = \pm 2$ et donc, $xy = 10^2 = 100$ ou $xy = 10^{-2} = \frac{1}{100}$.
Puisque $x = 4y$, alors $4y^2 = 100$ or $4y^2 = \frac{1}{100}$, ce qui donne $y^2 = 25$ or $y^2 = \frac{1}{400}$.
Puisque $y > 0$ (en raison du domaine de définition d'un logarithme), alors $y = 5$ or $y = \frac{1}{20}$.
Puisque $x = 4y$, alors $x = 20$ ou $x = \frac{1}{5}$.
Par conséquent, $(x,y) = (20, 5)$ ou $(\frac{1}{5}, \frac{1}{20})$.

Solution 2
La première équation peut être réécrite comme suit : $(x - 4y)^2 = 0$, d'où on obtient $x - 4y = 0$ ou $x = 4y$.
La deuxième équation peut être réécrite de façon successive comme suit :

$$\begin{aligned}
(\log_{10} x)^2 + 2(\log_{10} x)(\log_{10} y) + (\log_{10} y)^2 &= 4\\
(\log_{10} 4y)^2 + 2(\log_{10} 4y)(\log_{10} y) + (\log_{10} y)^2 &= 4\\
(\log_{10} 4 + \log_{10} y)^2 + 2(\log_{10} 4 + \log_{10} y)(\log_{10} y) + (\log_{10} y)^2 &= 4\\
(\log_{10} 4)^2 + 2(\log_{10} y)(\log_{10} 4) + (\log_{10} y)^2 + 2(\log_{10} y)^2 + 2(\log_{10} y)(\log_{10} 4) + (\log_{10} y)^2 &= 4\\
4(\log_{10} y)^2 + 4(\log_{10} y)(\log_{10} 4) + (\log_{10} 4)^2 - 4 &= 0
\end{aligned}$$

Notons $a = \log_{10} y$ et $b = \log_{10} 2$. Alors, $2b = 2\log_{10} 2 = \log_{10} 2^2 = \log_{10} 4$.
On peut réécrire la dernière équation comme suit :

$$\begin{aligned}
4a^2 + 8ab + 4b^2 - 4 &= 0\\
a^2 + 2ab + b^2 &= 1\\
(a + b)^2 &= 1
\end{aligned}$$

et donc, $a + b = -1$ or $a + b = 1$
Ainsi, $\log_{10} y + \log_{10} 2 = -1$ or $\log_{10} y + \log_{10} 2 = 1$, ce qui se simplifie pour donner $\log_{10} 2y = -1$ or $\log_{10} 2y = 1$.
Cela signifie que $2y = \frac{1}{10}$ or $2y = 10$, et donc $y = \frac{1}{20}$ or $y = 5$.
Puisque $x = 4y$, alors $(x,y) = (20, 5)$ ou $(\frac{1}{5}, \frac{1}{20})$.

Solution 3

La première équation peut être réécrite comme suit : $(x - 4y)^2 = 0$, d'où on obtient $x - 4y = 0$ ou $x = 4y$.

La deuxième équation peut être réécrite de façon successive comme suit :

$$\begin{aligned}
(\log_{10} x)^2 + 2(\log_{10} x)(\log_{10} y) + (\log_{10} y)^2 &= 4 \\
(\log_{10} 4y)^2 + 2(\log_{10} 4y)(\log_{10} y) + (\log_{10} y)^2 &= 4 \\
(\log_{10} 4 + \log_{10} y)^2 + 2(\log_{10} 4 + \log_{10} y)(\log_{10} y) + (\log_{10} y)^2 &= 4 \\
(\log_{10} 4)^2 + 2(\log_{10} y)(\log_{10} 4) + (\log_{10} y)^2 + 2(\log_{10} y)^2 + 2(\log_{10} y)(\log_{10} 4) + (\log_{10} y)^2 &= 4 \\
4(\log_{10} y)^2 + 4(\log_{10} y)(\log_{10} 4) + (\log_{10} 4)^2 - 4 &= 0
\end{aligned}$$

Notons $c = \log_{10} y$ et $d = \log_{10} 4$. On peut réécrire la dernière équation comme suit :

$$\begin{aligned}
4c^2 + 4cd + d^2 - 4 &= 0 \\
4c^2 + 4cd + d^2 &= 4 \\
(2c + d)^2 &= 4
\end{aligned}$$

et donc $2c + d = -2$ or $2c + d = 2$

Ainsi, $2\log_{10} y + \log_{10} 4 = -2$ ou $2\log_{10} y + \log_{10} 4 = 2$.

Ceci se simplifie pour donner $\log_{10}(4y^2) = -2$ or $\log_{10}(4y^2) = 2$.

Cela signifie que $4y^2 = \frac{1}{100}$ ou $4y^2 = 100$ et donc, $y = \pm\frac{1}{20}$ or $y = \pm 5$.

Puisque $y > 0$ et $x = 4y$, alors $(x,y) = (20, 5)$ ou $(\frac{1}{5}, \frac{1}{20})$.

8. (a) Soit a la probabilité que Leilei réussisse le test. Alors, $1-a$ est la probabilité que Leilei ne réussisse pas le test.
Soit b la probabilité que Jerome réussisse le test. Alors, $1-b$ est la probabilité que Jerome ne réussisse pas le test.
Soit c la probabilité que Farzad réussisse le test. Alors, $1-c$ est la probabilité que Farzad ne réussisse pas le test.
Donc, la probabilité que les trois réussissent le test est abc, et la probabilité qu'au moins l'un d'eux ne réussisse pas le test est $1-abc$. Nous déterminons la valeur de abc.
Puisque la probabilité que Leilei réussisse le test et que Jerome ne le réussisse pas est $\frac{3}{20}$, alors $a(1-b)=\frac{3}{20}$.
De même, $b(1-c)=\frac{1}{4}$ et $ac=\frac{2}{5}$.
À partir de la première équation, $a=\frac{3}{20(1-b)}$.
À partir de la deuxième équation, $1-c=\frac{1}{4b}$ et alors, $c=1-\frac{1}{4b}$.
En substituant dans la troisième équation, on obtient

$$\frac{3}{20(1-b)}\left(1-\frac{1}{4b}\right)=\frac{2}{5}$$

Puisque $1-b\neq 0$ (parce que $a(1-b)\neq 0$), en multipliant par $20(1-b)$, on obtient

$$3\left(1-\frac{1}{4b}\right)=8(1-b)$$

Puisque $b\neq 0$ (parce que $b(1-c)\neq 0$), en multipliant par $4b$, on obtient

$$3(4b-1)=32b(1-b)$$

En développant puis en simplifiant, on obtient successivement

$$\begin{aligned}12b-3&=32b-32b^2\\32b^2-20b-3&=0\\(8b+1)(4b-3)&=0\end{aligned}$$

Par conséquent, $b=-\frac{1}{8}$ ou $b=\frac{3}{4}$. Puisque $b>0$, alors $b=\frac{3}{4}$.
Puisque $c=1-\frac{1}{4b}$, alors $c=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.
Puisque $a=\frac{3}{20(1-b)}$, alors $a=\frac{3}{20(1/4)}=\frac{3}{5}$.
La probabilité que les trois réussissent le test est $abc=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{10}$.
Donc, la probabilité qu'au moins l'un d'eux ne réussisse pas le test est $1-abc=\frac{7}{10}$.

(b) Soit m le palindrome à quatre chiffres compris entre 1001 et 9999, de la forme $abba$, et n le palindrome de la forme $cddc$.
Ainsi, $m = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b$ et, de même, $n = 1001c + 110d$.
Puisque $m > n$, alors $a \geq c$.
Donc, $m - n = 1001a + 110b - 1001c - 110d = 1001(a - c) + 110(b - d)$.
Notez que $m - n$ est un multiple de 35 si et seulement si $m - n$ est un multiple de 5 et également un multiple de 7.
Puisque $(m - n) - 1001(a - c) = 110(b - d)$ et $110(b - d)$ est un multiple de 5, alors $m - n$ est un multiple de 5 si et seulement si $1001(a - c)$ est un multiple de 5.
Puisque 5 est un nombre premier et que 1001 n'est pas multiple de 5, alors $1001(a - c)$ est un multiple de 5 si et seulement si $a - c$ est un multiple de 5.
Autrement dit, $m - n$ est un multiple de 5 si et seulement si $a - c$ est un multiple de 5.
De même, puisque $(m - n) - 110(b - d) = 1001(a - c)$ et que $1001(a - c)$ est un multiple de 7 (parce que $1001 = 7 \cdot 143$), alors $m - n$ est un multiple de 7 si et seulement si $110(b - d)$ est un multiple de 7.
Puisque 7 est un nombre premier et 110 n'est pas un multiple de 7, alors $110(b - d)$ est un multiple de 7 si et seulement si $b - d$ est un multiple de 7.
Autrement dit, $m - n$ est un multiple de 7 si et seulement si $b - d$ est un multiple de 7.
En considérant tous les arguments ci-dessus, $m - n$ est un multiple de 35 si et seulement si $a - c$ est un multiple de 5 et $b - d$ est un multiple de 7.
Rappelons que a, b, c, et d sont des chiffres $a \neq 0$ et $c \neq 0$.
De même, $m > n$, ce qui signifie que l'on a soit, $a > c$, soit $a = c$ et $b > d$.
Puisque a et c sont des chiffres non nuls et que $a - c$ est un multiple de 5, alors $a - c = 5$ ou $a - c = 0$.
Si $a - c = 5$, alors $(a, c) = (6, 1), (7, 2), (8, 3), (9, 4)$. Il existe 4 telles paires.
Si $a - c = 0$, alors $(a, c) = (1, 1), (2, 2), \ldots, (9, 9)$. Il existe 9 telles paires.
Puisque b et d sont des chiffres et que $b - d$ est un multiple de 7, alors $b - d = 7$ ou $b - d = 0$ ou $b - d = -7$.
Si $b - d = 7$, alors $(b, d) = (7, 0), (8, 1), (9, 2)$. Il existe 3 telles paires.
Si $b - d = 0$, alors $(b, d) = (0, 0), (1, 1), \ldots, (9, 9)$. Il existe 10 telles paires.
Si $b - d = -7$, alors $(b, d) = (0, 7), (1, 8), (2, 9)$. Il existe 3 telles paires.
Si $a - c = 5$, alors $m > n$ et donc, (b, d) peut être n'importe laquelle des 16 paires énumérées.
Donc, dans ce cas, il existe $4 \cdot 16 = 64$ possibilités pour la paire (m, n).
Si $a - c = 0$, alors pour $m > n$ on a besoin que $b > d$ et alors $b - d = 7$.
Donc, dans ce cas, il existe $9 \cdot 3 = 27$ possibilités pour la paire (m, n).
Par conséquent, il existe en tout $64 + 27 = 91$ paires (m, n) pour lesquelles $m - n$ est un multiple de 35.

9. (a) Puisque $q < r < s < t$ forment une suite arithmétique, alors $r = q + d$, $s = q + 2d$, $t = q + 3d$ pour un certain nombre réel $d > 0$, où d est la différence commune de la suite.
Rappelons que $x = 1$ est une racine du polynôme $p(x)$ si et seulement si $p(1) = 0$.
Dans ce cas,

$$p(1) = q - r - s + t = q - (q + d) - (q + 2d) + (q + 3d) = 0$$

et alors $x = 1$ est une racine de $p(x)$.

(b) *Solution 1*

Puisque q, r, s, t forment une suite arithmétique avec un nombre pair de termes $q < r < s < t$, alors la moyenne de la suite est la même que la moyenne de r et s. (Nous pouvons utiliser la représentation q, $q + d$, $q + 2d$, $q + 3d$ pour le démontrer formellement.)
Cela signifie que la moyenne, 19, est « au milieu » entre r et s.
Donc, on peut exprimer r et s comme $r = 19 - h$ et $s = 19 + h$ pour un certain entier $h > 0$. (Puisque r et s sont des entiers, alors h est aussi un entier.)
Notons que cela implique que $s - r = (19 + h) - (19 - h) = 2h$.
Donc, $q = r - 2h = 19 - 3h$ et $t = s + 2h = 19 + 3h$.
Par conséquent, on peut écrire

$$p(x) = (19 - 3h)x^3 - (19 - h)x^2 - (19 + h)x + (19 + 3h)$$

Puisque $19 - 3h > 0$ et que h est un entier positif, alors $h \leq 6$ et donc, $1 \leq h \leq 6$.
À partir de (a), nous avons que $x = 1$ est une racine de $p(x)$, ce qui signifie qu'on peut factoriser $p(x)$ comme $p(x) = (x - 1)(Ax^2 + Bx + C)$ pour certains coefficients A, B et C.
Puisque le coefficient de x^3 dans $p(x)$ est $19-3h$, on a $1 \cdot A = 19-3h$ et donc, $A = 19-3h$.
Puisque le terme constant dans $p(x)$ est $19 + 3h$, on a $(-1) \cdot C = 19 + 3h$ et donc, $C = -(19 + 3h)$.
Jusqu'ici, on a

$$p(x) = (19-3h)x^3-(19-h)x^2-(19+h)x+(19+3h) = (x-1)((19-3h)x^2+Bx-(19+3h))$$

En comparant les coefficients de x^2, on obtient $-(19-h) = B-(19-3h)$ et donc, $B = -2h$.
Par conséquent,

$$p(x) = (19-3h)x^3-(19-h)x^2-(19+h)x+(19+3h) = (x-1)((19-3h)x^2-(2h)x-(19+3h))$$

Pour que le polynôme $p(x)$ ait trois racines rationnelles, le polynôme quadratique

$$(19 - 3h)x^2 - (2h)x - (19 + 3h)$$

doit avoir deux racines rationnelles.
Puisque les coefficients de ce polynôme quadratique sont entiers, pour que ses racines soient rationnelles, son discriminant doit être un carré parfait.
Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-2h)^2 - 4(19 - 3h)(-(19 + 3h)) \\
&= 4(h^2 + (19 - 3h)(19 + 3h)) \\
&= 4(h^2 + 361 - 9h^2) \\
&= 4(361 - 8h^2)
\end{aligned}$$

Pour $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, les valeurs correspondantes de Δ sont $1412, 1316, 1156, 932, 644, 292$.
Le seul de ces entiers qui soit un carré parfait est 1156.

Donc, il faut que $h = 3$.
Dans ce cas,

$$p(x) = (x - 1)(10x^2 - 6x - 28) = (x - 1)(2x - 4)(5x + 7)$$

et alors, les racines de $p(x)$ sont $x = 1$, $x = 2$, et $x = -\frac{7}{5}$.
Solution 2
Notons la différence commune de la suite arithmétique par d. Ainsi, le polynôme est $qx^3 - (q + d)x^2 - (q + 2d)x + (q + 3d)$.
La moyenne de q, r, s, et t est 19 alors

$$19 = \frac{q + r + s + t}{4} = \frac{q + (q + d) + (q + 2d) + (q + 3d)}{4} = \frac{4q + 6d}{4}$$

ce qui se simplifie en $2q + 3d = 38$.
Les seules paires d'entiers positifs (q,d) satisfaisant cette équation (1,12), (4,10), (7,8), (10,6), (13,4), et (16,2).
Cela signifie qu'il n'y a que 6 polynômes possibles, chacun ayant $x - 1$ comme facteur, selon la partie (a). Le tableau ci-dessous présente les six polynômes, le polynôme quadratique résultant après avoir retiré le facteur $x - 1$ (en utilisant la division polynomiale ou la division synthétique), ainsi que le discriminant Δ de ce polynôme quadratique.

(q,d)	Cubique	Quadratique	Δ
(1,12)	$x^2 - 13x^2 - 25x + 37$	$x^2 - 12x - 37$	292
(4,10)	$4x^2 - 14x^2 - 24x + 34$	$4x^2 - 10x - 34$	644
(7,8)	$7x^2 - 15x^2 - 23x + 31$	$7x^2 - 8x - 31$	932
(10,6)	$10x^2 - 16x^2 - 22x + 28$	$10x^2 - 6x - 28$	1156
(13,4)	$13x^2 - 17x^2 - 21x + 25$	$13x^2 - 4x - 25$	1316
(16,2)	$16x^2 - 18x^2 - 20x + 22$	$16x^2 - 2x - 22$	1412

Parmi ces quatre discriminants, le seul qui est un carré parfait est $1156 = 34^2$. Par conséquent, la seule possibilité pour que le polynôme cubique ait trois racines rationnelles est pour $(q,d) = (10,6)$ et donc, le polynôme cubique se factorise en $(x-1)(10x^2-6x-28)$.
Donc, les racines du polynôme cubique sont $x = 1$ et $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{1156}}{20} = \dfrac{6 \pm 34}{20}$ ou $x = 1$, $x = 2$ et $x = -\dfrac{7}{5}$.
Au lieu de calculer et de factoriser les six polynômes cubiques, on peut directement mettre $(x - 1)$ en facteur dans l'expression $qx^3 - (q + d)x^2 - (q + 2d)x + (q + 3d)$, ce qui donne

$$qx^3 - (q + d)x^2 - (q + 2d)x + (q + 3d) = (x - 1)\big(qx^2 - dx - (q + 3d)\big)$$

pour tous (q,d).
Le discriminant de ce polynôme quadratique est $(-d)^2 + 4q(q + 3d) = d^2 + 4q^2 + 12qd$. Pour que ce polynôme quadratique ait des racines rationnelles, il doit exister un entier k tel que $d^2 + 4q^2 + 12qd = k^2$.
En élevant au carré l'équation $2q + 3d = 38$, on obtient $4q^2 + 12qd + 9d^2 = 38^2$.
En substituant k^2 à $d^2 + 4q^2 + 12qd$, on obtient $k^2 + 8d^2 = 38^2$.
On peut regrouper les termes pour obtenir $k^2 = 38^2 - 8d^2 = 2^2(19^2 - 2d^2)$, d'où il s'ensuit que $361 - 2d^2$ doit être un carré parfait.
D'après un résultat obtenu antérieurement, les seules valeurs possibles pour d sont 12, 10, 8, 6, 4, et 2.
En substituant ces 6 valeurs de d dans l'expression $361 - 2d^2$, on obtient 73, 161, 133, 289,

329,et 363, respectivement. Parmi ces valeurs, seul $289 = 17^2$ est un carré parfait.
On en conclut que $d = 6$, et, par conséquent, $q = 10$. Le polynôme est $10x^3-16x^2-22x+28$, et il se factorise comme $2(x-1)(x-2)(5x+7)$ avec les racines $x = 1$, $x = 2$, et $x = -\frac{7}{5}$.

(c) Considérons que la suite arithmétique q, r, s, t a pour moyenne m et une différence commune égale à $2n$.
Comme dans la partie (b), $q = m-3n$, $r = m-n$, $s = m+n$ et $t = m+3n$.
Puisque q, r, s, t, et n sont des entiers, m est aussi un entier.
Comme dans la partie (b),

$$p(x) = (x-1)((m-3n)x^2 - (2n)x - (m+3n))$$

et le polynôme $p(x)$ a trois racines rationnelles si et seulement si le discriminant Δ de son facteur quadratique est un carré parfait.
Dans ce cas,

$$\Delta = (-2n)^2 - 4(m-3n)(-(m+3n)) = 4n^2 + 4m^2 - 36n^2 = 4(m^2 - 8n^2)$$

Notons que Δ est toujours un nombre entier (parce que n et m sont des entiers) et multiple de 4. Donc, si c'est un carré parfait, c'est nécessairement un carré parfait pair.
Pour montrer qu'il existe au moins deux suites arithmétiques d'entiers positifs $q < r < s < t$ de différence commune $2n$ pour lesquelles le polynôme $p(x)$ a trois racines rationnelles, nous allons montrer qu'il existe toujours deux valeurs entières positives pour m telles que q, r, s et t soient des entiers positifs, et pour lesquelles le discriminant $\Delta = 4(m^2 - 8n^2)$ est un carré parfait.
Puisque Δ est un entier multiple de 4, Δ est un carré parfait si et seulement si $\Delta = (2k)^2$ pour une certaine entier k.
Ceci est vrai si et seulement si $4k^2 = 4(m^2 - 8n^2)$ ou $k^2 = m^2 - 8n^2$ ou $m^2 - k^2 = 8n^2$.
Par conséquent, notre objective est maintenant de montrer que, pour tout entier positif $n > 3$, il existe toujours au moins deux paires (m, k) d'entiers positifs telles que $m^2-k^2 = 8n^2$ et pour lesquelles chacun des nombres q, r, s et t est un entier positif. Puisque $q < r < s < t$, cette dernière condition est équivalente à $q = m-3n > 0$ ou $m > 3n$.
Les expressions $m^2 - k^2 = (m+k)(m-k)$ et $8n^2$ ont toujours les factorisations suivantes :

$$8n^2 = 8n^2 \cdot 1 = 4n^2 \cdot 2 = 2n^2 \cdot 4 = n^2 \cdot 8 = 8n \cdot n = 4n \cdot 2n$$

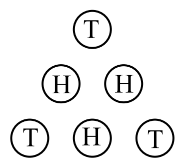
Puisque $n > 3$, ce sont presque toujours des factorisations distinctes. (Pour quelles valeurs de n cela ne sera-t-il pas le cas ?)
Puisque m et k sont des entiers positifs, on a $m+k > m-k$. De plus, puisque $n > 3$, les six factorisations de $8n^2$ sont énumérées en plaçant le plus grand facteur en premier.
Ainsi, on peut associer les facteurs pour obtenir les six cas suivants :

$m+k$	$m-k$	$2m = (m+k)+(m-k)$	m	$k = (m+k)-m$
$8n^2$	1	$8n^2+1$	$\frac{8n^2+1}{2}$	$\frac{8n^2-1}{2}$
$4n^2$	2	$4n^2+2$	$2n^2+1$	$2n^2-1$
$2n^2$	4	$2n^2+4$	n^2+2	n^2-2
n^2	8	n^2+8	$\frac{n^2+8}{2}$	$\frac{n^2-8}{2}$
$8n$	n	$9n$	$\frac{9n}{2}$	$\frac{7n}{2}$
$4n$	$2n$	$6n$	$3n$	n

Dans la deuxième et la troisième ligne du tableau, les valeurs de m et k sont toujours des entiers. De plus, pour $n > 3$, on a $m = 2n^2 + 1 > 3n$ et $m = n^2 + 2 > 3n$. (Est-il clair pourquoi ?) De plus, on a aussi $2n^2 + 1 \neq n^2 + 2$.
Par conséquent, pour tout entier $n > 3$, il existe au moins deux entiers m pour lesquels le Δ est un carré parfait, ce qui signifie que $p(x)$ a trois racines rationnelles.

Par souci de complétude, nous notons que $\Delta > 0$ dans les deux cas, donc le facteur quadratique n'a pas de racines doubles. De plus, lorsque $x = 1$, la valeur de l'expression quadratique $(m - 3n)x^2 - (2n)x - (m + 3n)$ est $-8n \neq 0$, donc $x = 1$ n'est pas une racine multiple du polynôme cubique. Autrement dit, les trois racines rationnelles du polynôme cubique sont distinctes pour chacune de ces valeurs de n et les valeurs correspondantes de m.

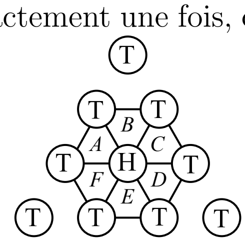
10. (a) En utilisant la notation donnée, la séquence $T(1{,}1)$, $T(2{,}1)$, $T(2{,}3)$, $T(2{,}2)$ permet gagner le jeu.
Comme justification, il suffit d'observer qu'après $T(1{,}1)$, $T(2{,}1)$, $T(2{,}3)$, chaque jeton aux coins a été retourné une fois (donc il montre F) et chaque jeton sur les côtés a été retourné deux fois (donc il montre P), ce qui donne :



Le tour $T(2{,}2)$ retourne encore une fois chaque jeton sur les côtés, donc tous les jetons montrent F.

(b) Nous allons raisonner par l'absurde pour montrer qu'il n'existe aucune séquence de tours qui permet à gagner le jeu.
Notons que dans toute séquence de tours, on peut supposer que chaque ensemble particulier de trois jetons adjacents est retourné 0 ou 1 fois. En effet, dans une telle séquence, on peut réarranger les tours composants sans modifier l'orientation finale des jetons, puisqu'effectuer un même tour un nombre pair de fois équivaut à ne pas l'avoir effectué, tandis que l'effectuer un nombre impair de fois revient à l'avoir effectué exactement une fois.

Supposons qu'il existe une séquence de tours qui permet à gagner.
Puisque chacun des jetons aux coins doit être retourné, les tours $T(1{,}1)$, $T(3{,}1)$, $T(3{,}5)$ ont chacun été utilisés une fois. Chacun de ces trois tours doit être utilisé au moins une fois, donc chacun doit l'être exactement une fois.
En utilisant chacun de ces tours exactement une fois, on obtient la configuration suivante :



Le résultat net des tours restants doit être le retournement du jeton central (actuellement avec P) ainsi qu'un nombre pair de retournements des autres jetons.
Parmi les tours étiquetés A, B, C, D, E, F, dans chaque paire voisine de tours, il faut soit utiliser les deux, soit aucune, afin de s'assurer que chacun des six F autour de l'hexagone reste un F.
Puisque l'état donné ne comporte pas uniquement des F, nous devons utiliser au moins un de ces tours.

Sans perte de généralité, supposons qu'A est utilisé. Alors, B et F sont utilisés, ce qui implique que C et E sont utilisés, ce qui entraîne que D est utilisé.

Donc, les six tours ont été utilisés et, par conséquent, le jeton au milieu a été retourné un nombre pair de fois, ce qui fait qu'il montre encore P.

Cela signifie qu'il n'existe aucune séquence de tours qui conduise à ce que tous les jetons montrent F, et donc qu'il n'existe aucune séquence de tours qui permet à gagner.

(c) Dans la partie (a), nous avons montré que le jeu commençant avec $n = 3$ rangées est gagnable.

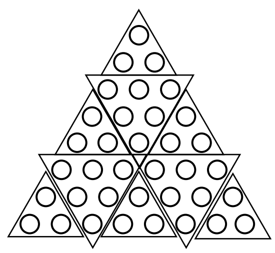
Aussi, c'est possibe de gagner le jeu commençant avec $n = 2$ rangées (il suffit de retourner tous les jetons pour gagner en un seul coup.).

Il est impossible de gagner avec $n = 1$ rangée (il n'y a pas des jetons à retourner) et, comme démontré dans la partie (b), il n'est pas possible de gagner le jeu commençant avec $n = 4$ rangées.

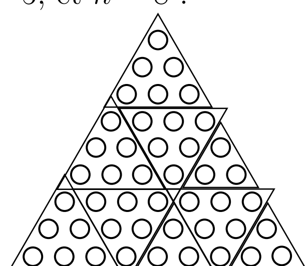
Nous allons montrer que le jeu peut être gagné pour $n = 3k$ ou $n = 3k - 1$, avec k un entier positif et qu'il est impossible de gagner pour $n = 3k + 1$ avec k un entier positif.

Nous commençons par montrer que le jeu peut toujours être gagné lorsque $n = 3k$ ou $n = 3k - 1$ pour un certain entier positif k.

Pour commencer à comprendre pourquoi cela est vrai, nous dessinons des schémas montrant que le jeu peut être gagné pour $n = 6$, $n = 9$, $n = 5$, et $n = 8$:



$n = 5$ and $n = 8$



$n = 6$ and $n = 9$

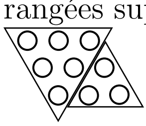
Chaque diagramme montre comment les jetons sont divisés en sections, chacune de ces sections étant soit un triangle à 2 rangées, soit un triangle à 3 rangées, orienté vers le haut ou vers le bas. Puisque le jeu est gagnable en commençant avec chacun de ces petits triangles isolément (indépendamment de leur orientation), et qu'on peut diviser le grand triangle en ces plus petites parties disjointes, alors le jeu est gagnable en se concentrant sur chaque petit triangle individuellement et en les abordant de façon systématique.

Le diagramme de gauche montre comment le jeu peut être gagné lorsque $n = 8$, mais il montre également que le jeu peut être gagné lorsque $n = 5$ puisque les triangles couvrant les jetons dans les 5 rangées du haut sont disjointes de celles couvrant les 3 rangées du bas, et peuvent donc être traitées indépendamment. De même, le diagramme de droite montre pourquoi le jeu peut être gagné lorsque $n = 9$ et lorsque $n = 6$.

Le diagramme de gauche montre que le jeu peut être gagné pour $n = 3k - 1$ lorsque $k = 2$ ou $k = 3$. Le diagramme de droite montre que le jeu peut être gagné pour $n = 3k$ lorsque $k = 2$ ou $k = 3$.

Ensuite, nous expliquons comment étendre ces diagrammes pour montrer pourquoi le jeu est gagnable pour $n = 3k - 1$ et $n = 3k$ pour tout entier positif k.

Chacun de ces diagrammes peut être étendu en ajoutant répétitivement des groupes de 3 rangées supplémentaires en bas, ces rangées étant construites à l'aide de blocs de la forme



ajoutés sur le côté droit du triangle à 2 rangées ou du triangle à 3 rangées.

Chacun de ces blocs a la forme d'un parallélogramme de 3 jetons de large sur 3 jetons de haut. Ces blocs peuvent être assemblés bout à bout pour former un parallélogramme plus grand de largeur $3k$ jetons et de hauteur 3 jetons, pour tout entier positif k.
Dans le cas de côté gauche ($n = 3k - 1$)), nous créons les trois rangées suivantes en commençant par un triangle à 2 rangées suivi d'un parallélogramme de largeur $3k$ jetons et de hauteur 3 jetons. Cela forme 3 rangées de longueurs $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$, ce qui transforme un triangle à $3k - 1$ rangées dans un triangle à $3k + 2$ rangées.
Puisque le triangle pour $n = 3k-1$ est toujours divisé en plus petits triangles gagnables, et que les 3 rangées additionnelles sont également divisées en triangles plus petits gagnables, le jeu peut être gagné pour $n = 3k + 2$. Notons que $3k + 2 = 3(k + 1) - 1$.
Cela montre que, dès que l'on sait que le jeu peut être gagné pour $n = 3k - 1$, alors on sait aussi qu'il peut être gagné pour $n = 3(k + 1) - 1 = 3k + 2$. Cela implique que le jeu peut être gagné pour $n = 3k - 1$, pour tout entier positif k, car on peut avancer terme par terme dans la suite des entiers de la forme $3k - 1$. (Cet argument pourrait être formulé de façon plus rigoureuse à l'aide d'une technique appelée induction mathématique.)
En d'autres termes, cet argument nous permet de voir que le jeu peut être gagné pour $n = 2, 5, 8, 11, 14, \ldots$ et pour tout entier positif qui est égal à un de moins qu'un multiple de 3.

Dans le cas de côté droite ($n = 3k$), nous créons les trois rangées suivantes en commençant par un triangle à 3 rangées suivi d'un parallélogramme de largeur $3k$ jetons et de hauteur 3 jetons. Cela forme 3 rangées de longueurs $3k + 1$, $3k + 2$, $3k + 3$, ce qui transforme un triangle à $3k$ rangées en un triangle à $3k + 3$ rangées.
Puisque le triangle pour $n = 3k$ est toujours divisé en plus petits triangles gagnables, et que les 3 rangées additionnelles sont également divisées en triangles plus petits gagnables, le jeu peut être gagné pour $n = 3k + 3$. Notons que $3k + 3 = 3(k + 1)$.
Cela montre que dès que l'on sait que le jeu peut être gagné lorsque $n = 3k$, on sait aussi qu'il peut être gagné pour $n = 3(k + 1) = 3k + 3$. Cela implique que le jeu peut être gagné pour $n = 3k$, avec k un entier positif.
En d'autres termes, cet argument nous permet de voir que le jeu peut être gagné lorsque $n = 3, 6, 9, 12, 15, \ldots$ et pour tout entier positif qui est un multiple de 3.

Donc, nous avons démontré que le jeu est gagnable pour $n = 3k$ ou $n = 3k - 1$ pour tout entier positif k.

Considérons maintenant le cas de $n = 3k + 1$.

1
2 3
3 1 2
1 2 3 1
2 3 1 2 3
3 1 2 3 1 2
1 2 3 1 2 3 1

Dans ce diagramme, en partant d'un triangle à 7 rangées, nous avons numéroté chaque jeton par 1, 2 ou 3 en étiquetant le jeton le plus à gauche de chaque rangée par 1, 2, 3, 1, 2, 3, et ainsi de suite, les jetons de chaque rangée étant ensuite numérotés cycliquement 1, 2, 3.
Avec un tel étiquetage, chaque groupe de trois jetons mutuellement adjacents inclut les étiquettes 1, 2 et 3. Cela s'explique par le fait que (i) les deux jetons parmi les trois qui se trouvent sur la même rangée portent des étiquettes différentes, et (ii) si le troisième jeton

est situé sur la rangée au-dessus, il se trouve juste avant le jeton le plus à gauche dans le cycle 1/2/3 ; ou, s'il est sur la rangée en dessous, il se trouve juste après le jeton le plus à droite dans le cycle 1/2/3.

Un triangle ayant $n = 3k + 1$ rangées contiendra toujours un jeton de plus étiqueté 1 que de jetons étiquetés 2 ou 3. Cela est évident pour $n = 1$. Ensuite, pour $n = 4$ et $n = 7$ et ainsi de suite, chaque fois que l'on ajoute un ensemble supplémentaire de trois rangées, on ajoute un nombre égal de 1, de 2 et de 3. En effet, chaque groupe de trois rangées supplémentaires peut être décomposé en un triangle avec deux rangées en bas à gauche, suivi de lignes diagonales « sud-est » contenant respectivement un 1, un 2 et un 3.

Lorsque $n = 3k + 1$, le nombre total de jetons est

$$C = \frac{(3k+1)(3k+2)}{2} = \frac{9k^2+9k+2}{2} = 9\left(\frac{k^2+k}{2}\right) + 1$$

Soit $t = \dfrac{k^2+k}{2}$. Puisque $k^2 + k = k(k + 1)$ est toujours pair (car l'un de ses facteurs est pair), alors t est un entier.

Notez que $C = 9t + 1$ est 1 de plus qu'un multiple de 9.

Cela signifie que le nombre de 1 est $3t + 1$, le nombre de 2 est $3t$, et le nombre de 3 est $3t$.

Cela signifie aussi que la somme des étiquettes sur les $C = 9t + 1$ jetons est

$$(1 + 2 + 3) \cdot 3t + 1 \cdot 1 = 18t + 1$$

Ensuite, on associe un signe + à l'étiquette de chaque jeton portant un P, et un signe − à l'étiquette de chaque jeton portant un F.

Avant tout tour, le total est de $18t + 1$ puisque tous les jetons montrent P.

Dans une position où tous les jetons montrent F, le total sera $-18t - 1$.

La différence entre les deux totaux est $(18t+1)-(-18t-1) = 36t+2$ ce qui est un nombre pair qui n'est pas multiple de 4. Nous verrons bientôt pourquoi cela est important.

Maintenant, nous allons déterminer de combien le total des étiquettes visibles change pour les 8 combinaisons possibles de signes + et − sur un ensemble de trois jetons mutuellement adjacents qui sont retournés :

- Jetons étiquetés $+1 + 2 + 3$ deviennent $-1 - 2 - 3$: variation de $-6 - 6 = -12$
- Jetons étiquetés $+1 + 2 - 3$ deviennent $-1 - 2 + 3$: variation de $0 - 0 = 0$
- Jetons étiquetés $+1 - 2 + 3$ deviennent $-1 + 2 - 3$: variation de $-2 - 2 = -4$
- Jetons étiquetés $+1 - 2 - 3$ deviennent $-1 + 2 + 3$: variation de $4 - (-4) = 8$
- Jetons étiquetés $-1 + 2 + 3$ deviennent $+1 - 2 - 3$: variation de $(-4) - 4 = -8$
- Jetons étiquetés $-1 + 2 - 3$ deviennent $+1 - 2 + 3$: variation de $2 - (-2) = 4$
- Jetons étiquetés $-1 - 2 + 3$ deviennent $+1 + 2 - 3$: variation de $0 - 0 = 0$
- Jetons étiquetés $-1 - 2 - 3$ deviennent $+1 + 2 + 3$: variation de $6 - (-6) = 12$

Dans chaque cas, la variation est un multiple de 4.

Cela signifie que nous ne pouvons pas atteindre une variation totale de $36t + 2$, ce qui implique également que nous ne pouvons pas arriver à une situation où tous les jetons montrent F, et donc, le jeu n'est pas gagnable pour $n = 3k + 1$.

En résumé, le jeu peut être gagné lorsque $n = 3k$ ou $n = 3k - 1$ pour tout entier positif k, et ne peut pas être gagné lorsque $n = 3k + 1$, avec k entier positif.