



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mardi 2 avril 2025

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 3 avril 2025

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 2 heures et demie

©2025 University of Waterloo

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10

Chaque question vaut 10 points.

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

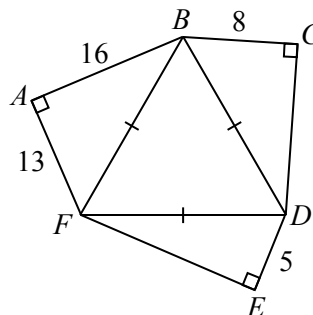
NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de  , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de  , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son lieu de résidence.

1.  (a) Supposons que $4(x - 2) = 2(x - 4)$. Quelle est la valeur de x ?
 (b) Supposons que $2x = 9$. Quelle est la valeur de 2^{6x-23} ?
 (c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $y = 3x + 7$ et $y = 7x + 3$.
2.  (a) Il existe un entier strictement positif pour lequel $3 < \sqrt{k^2 + 4} < 4$. Quelle est la valeur de l'entier positif k ?
 (b) Quelle est la somme des 20 plus petits entiers strictement positifs impairs ?
 (c) Dans la figure ci-contre, le triangle BDF est équilatéral et $\angle FAB = \angle BCD = \angle DEF = 90^\circ$. De plus, $AB = 16$, $BC = 8$, $DE = 5$, et $FA = 13$. Déterminer le périmètre de l'hexagone $ABCDEF$.

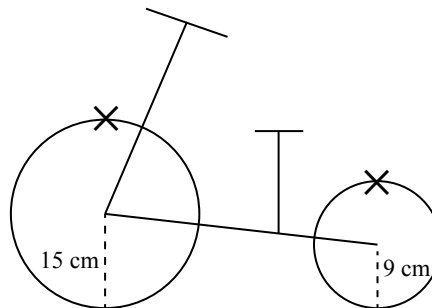


3.  (a) Supposons que $p + q + r = 18$ et $p + q = 5$ et $q + r = 9$. Quelle est la valeur de q ?

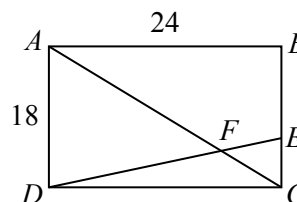
-  (b) La droite d'équation $6x + y = 24$ croise l'axe des abscisses au point P et l'axe des ordonnées au point Q . Quelle est l'équation de la parabole qui croise l'axe des ordonnées au point Q et ne croise l'axe des abscisses qu'au point P ?

-  (c) Supposons que $\frac{1}{2w} = \frac{1}{3y} = \frac{1}{4z}$ et $\frac{1}{2w} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{4z} = \frac{1}{24}$. Déterminer la valeur de $w + y + z$.

4.  (a) La bicyclette de Terry a une roue avant plus grande avec un rayon de 15 cm et une roue arrière plus petite avec un rayon de 9 cm, comme dans la figure ci-contre. Terry attache un ruban au point le plus élevé de chaque roue, puis commence à pédaler. Terry avance de d cm avant de s'arrêter. Les deux rubans se trouvent à nouveau au point le plus élevé des roues. Quel est l'entier le plus proche de la plus petite valeur possible de d avec $d > 0$?



-  (b) Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un rectangle, où $AB = 24$ and $AD = 18$. De plus, E se trouve sur BC , et $EC = 6$. Sachant que les segments DE et AC se coupent en F , déterminer la longueur de CF .



5.  (a) Alice possède un cadenas dont la combinaison consiste en trois entiers a, b, c qui doivent être entrés dans cet ordre. Les trois entiers satisfont les conditions suivantes :
- Chacun des nombres a, b et c est compris entre 1 et 40, inclusivement ;
 - Les nombres a, b et c sont tous différents ;
 - Le nombre b est inférieur à a et est inférieur à c ;
 - L'un des entiers est 20 et l'autre est 30.

Combien de combinaisons possibles remplissent ces conditions ?

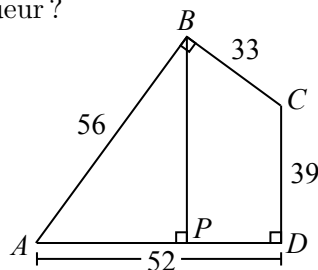
-  (b) Pour certains angles θ , les trois nombres $2 - 2 \cos \theta$, $1 + \sin \theta$, $2 + 2 \cos \theta$ forment une suite géométrique dans cet ordre. Déterminer toutes les valeurs exactes possibles de $\cos \theta$.

(Une suite géométrique est une suite dans laquelle chaque terme après le premier est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante non nulle. Par exemple, 3, 6 et 12 sont les trois premiers termes d'une suite géométrique.)

6.  (a) Douze points sont également répartis sur toute la circonférence d'un cercle. De combien de façons peut-on choisir trois de ces points pour que le triangle qu'ils forment ait au moins deux côtés de même longueur ?



- (b) Dans le quadrilatère $ABCD$ ci-contre, $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$, $AB = 56$, $BC = 33$, $CD = 39$, et $DA = 52$. Le point P est situé sur AD de sorte que BP est perpendiculaire à AD . Déterminer la longueur exacte de BP .



7.  (a) Les fonctions f et g sont définies par les tableaux de valeurs ci-dessous :

x	$f(x)$	x	$g(x)$
1	5	1	3
2	3	2	1
3	4	3	4
4	1	4	5
5	2	5	2

Les fonctions f^{-1} et g^{-1} sont les fonctions inverses de f et g , respectivement. Supposons que $f^{-1}(g^{-1}(a)) = 3$. Quelle est la valeur de a ?



- (b) Déterminer toutes les paires (x, y) de nombres réels qui vérifient le système d'équations suivant :

$$x^2 - 8xy + 16y^2 = 0$$

$$(\log_{10} x)^2 + 2(\log_{10} x)(\log_{10} y) + (\log_{10} y)^2 = 4$$

8.  (a) Leilei, Jérôme et Farzad répondent à un test indépendamment l'un de l'autre. La probabilité que Leilei réussisse le test et que Jérôme échoue est de $\frac{3}{20}$. La probabilité que Jérôme réussisse et que Farzad échoue est de $\frac{1}{4}$. La probabilité que Leilei et Farzad réussissent tous les deux est de $\frac{2}{5}$. Déterminer la probabilité qu'au moins une personne parmi Leilei, Jérôme et Farzad échoue au test.



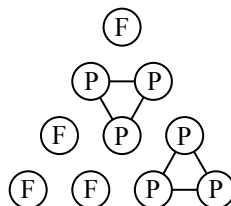
- (b) L'entier 7447 est un palindrome, car il se lit de la même manière à l'endroit et à l'envers. Supposons que les entiers strictement positifs m et n sont des palindromes se trouvant entre 1001 et 9999 inclusivement, et que $m > n$. Déterminer le nombre de paires (m, n) pour lesquelles le résultat de la différence $m - n$ est un multiple de 35.

9.  Supposons que $p(x) = qx^3 - rx^2 - sx + t$ pour certains entiers strictement positifs $q < r < s < t$ formant une suite arithmétique.

- (a) Montrer que $x = 1$ est une racine de $p(x)$.
- (b) Supposons que la moyenne de q , r , s et t est 19 et que $p(x)$ a trois racines rationnelles. Déterminer les racines de $p(x)$.
- (c) Prouver que, pour tout entier positif $n > 3$, il existe au moins deux suites arithmétiques d'entiers strictement positifs $q < r < s < t$ ayant une raison de $2n$ pour lesquelles $p(x)$ a trois racines rationnelles.
(Une suite arithmétique est une suite dans laquelle chaque terme après le premier est obtenu en additionnant le terme précédent à une constante appelée raison. Par exemple, 3, 5, 7 et 9 sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.)

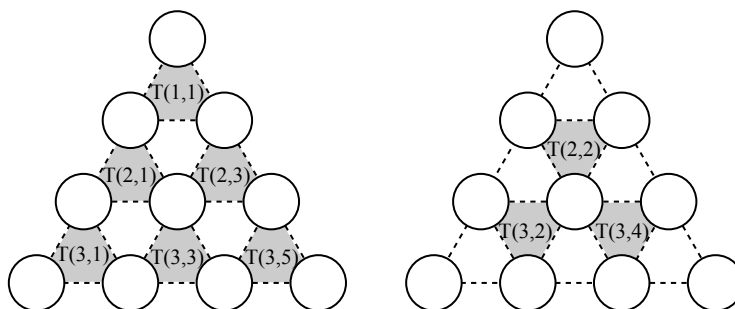
10.  Un triangle équilatéral est formé à l'aide de n rangées de pièces. Il y a 1 pièce dans la première rangée, 2 pièces dans la deuxième rangée, 3 pièces dans la troisième rangée, et ainsi de suite, jusqu'à n pièces dans la n ème rangée. Au départ, toutes les pièces sont du côté face (F). Carlie joue à un jeu dans lequel, à chaque tour, elle choisit 3 pièces mutuellement adjacentes et les retourne. Pour gagner le jeu, toutes les pièces doivent être tournées du côté pile (P) après une séquence de tours. La figure ci-contre montre un jeu avec 4 rangées de pièces après une séquence de 2 tours.

Des instructions sur les termes à utiliser dans les solutions se trouvent sous les points (a), (b) et (c).



- Supposons qu'il y a 3 rangées de pièces. Donner une séquence de 4 tours qui permet de gagner.
- Supposons qu'il y a 4 rangées de pièces. Déterminer s'il existe ou non une séquence de tours qui permet de gagner.
- Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles il est possible de gagner le jeu en commençant avec n rangées de pièces.

Remarque : Pour un triangle avec 4 rangées de pièces, il y a 9 possibilités pour les 3 pièces que Carlie peut retourner à un tour donné. Ces 9 possibilités sont représentées par les triangles ombrés dans les figures ci-dessous :



Les participants et les participantes doivent utiliser les noms indiqués à l'intérieur des 9 triangles gris pour répondre au point (b). Ils doivent aussi adapter cette désignation de manière appropriée pour répondre aux points (a) et (c).



**Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE**
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2025! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2025.

Visitez notre site Web au ***cemc.uwaterloo.ca*** pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au ***cemc.uwaterloo.ca*** pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2025/2026
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
- utiliser notre générateur de séries de problèmes gratuit pour créer des séries de problèmes afin de soutenir et d'enrichir le programme scolaire; veuillez noter que cette ressource n'est disponible qu'en anglais
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours