Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2025

(10^{e} année – Secondaire IV)

le mercredi 26 février 2025
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 27 février 2025
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a $\dfrac{20+25}{25+20} = \dfrac{45}{45} = 1$.

Réponse : (B)

2. La mère ourse donne un total de $4 \times 3 = 12$ poissons à ses oursons. Il lui reste donc $14 - 12 = 2$ poissons.

Réponse : (B)

3. Les 5 petits rectangles ombrés couvrent $5 \times 4 = 20$ unités sur la longueur du grand rectangle. Les 4 petits rectangles non ombrés couvrent $4 \times 8 = 32$ unités sur la longueur du grand rectangle. La longueur du grand rectangle est donc $w = 20 + 32 = 52$.

Réponse : (C)

4. Puisque la moyenne des quatre expressions est 17, leur somme est $4 \times 17 = 68$.
Ainsi, $(n-3) + (n-1) + (n+1) + (n+3) = 68$ ou encore $4n = 68$, d'où $n = \dfrac{68}{4} = 17$.
Peut-on expliquer pourquoi n est égal à la moyenne ?

Réponse : (C)

5. Comme 25 % des 600 places est $\dfrac{25}{100} \times 600 = 25 \times 6 = 150$, ce sont 150 personnes qui se déplacent vers le théâtre vide.
Le pourcentage des places maintenant occupées dans le deuxième théâtre est $\dfrac{150}{200} \times 100\,\% = \dfrac{150}{2}\,\% = 75\,\%$.

Réponse : (D)

6. L'aire du triangle DEC est égale à la somme des aires des triangles DEF et DFC. Ainsi, $t + 2t = 63$ ou encore $3t = 63$, c'est-à-dire $t = 21$. L'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles ADC, DBE, DEF et DFC. Elle vaut donc $4t + t + t + 2t = 8t = 8(21) = 168$.

Réponse : (A)

7. Nous isolons x de la sorte :

$$\begin{aligned} 50 - 2\sqrt{x} = 18 &\iff -2\sqrt{x} = 18 - 50 \\ &\iff -2\sqrt{x} = -32 \\ &\iff \sqrt{x} = 64 \\ &\iff x = 16^2 = 256. \end{aligned}$$

Réponse : (D)

8. Le triangle ABD est isocèle puisque $AB = AD$. En conséquence, $\angle ADB = \angle ABD = 80^\circ$.
Comme l'angle BDC est un angle plat, on a que $\angle ADC = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.
Le triangle ADC est lui aussi isocèle (car $AD = CD$), d'où $\angle CAD = \angle ACD$.
La somme des angles du triangle ADC est 180°, c'est-à-dire que $\angle ADC + \angle CAD + \angle ACD = 180^\circ$.
Autrement dit, $100^\circ + 2 \times \angle ACD = 180^\circ$ ou encore $2 \times \angle ACD = 80^\circ$.
Donc, la mesure de l'angle ACD est de 40°.

Réponse : (E)

9. Si Teddy était capable de construire une tour mesurant 21 cm de haut en utilisant exactement 4 blocs, alors la hauteur moyenne (la dimension verticale) de chaque bloc serait de $\frac{21 \text{ cm}}{4} = 5{,}25$ cm.
Cependant, aucun bloc ne peut être empilé de sorte qu'il occupe plus de 5 cm verticalement. Il est donc impossible de construire une tour mesurant 21 cm de haut en utilisant 4 blocs (ou moins).
D'un autre côté, Teddy peut construire une tour mesurant 21 cm de haut en utilisant exactement 5 blocs s'il procède de la façon suivante. Il commence par construire une tour en utilisant 4 blocs positionnés de manière que la dimension verticale de chacun soit 4 cm. Ensuite, il ajoute à la tour 1 bloc positionné de sorte que sa dimension verticale soit 5 cm. Au final, la tour a une hauteur de $4 \times 4 \text{ cm} + 1 \times 5 \text{ cm} = 21$ cm.
En conséquence, le plus petit nombre de blocs que Teddy peut utiliser pour réaliser une tour mesurant 21 cm de haut est 5.
Peut-on trouver deux autres façons qui permetteraient à Teddy de réaliser une tour mesurant 21 cm de haut en utilisant exactement 5 blocs ?

Réponse : (B)

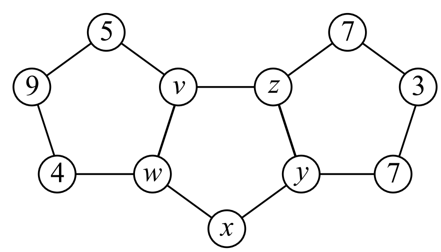
10. Si $x = \frac{1}{4}$, alors $-x = -\frac{1}{4}$, $x^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$, $3x = 3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$ et $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.
Le plus grand parmi ces nombres est $3x = \frac{3}{4}$.

Réponse : (D)

11. Puisque $\sqrt{2025} = 45$, le carré parfait suivant 2025 est $46^2 = 2116$.
Ainsi, la plus petite valeur de n est $2116 - 2025 = 91$.

Réponse : (E)

12. On commence par étiquetter les nombres manquants par v, w, y et z, comme figuré ci-contre.
D'après le pentagone à gauche, on a $4 + 9 + 5 + v + w = 25$ ou autrement dit $18 + v + w = 25$, d'où on trouve $v + w = 7$.
D'après le pentagone à droite, on a $7 + 3 + 7 + y + z = 25$ ou autrement dit $17 + y + z = 25$, d'où on trouve $y + z = 8$.
D'après le pentagone du milieu, on a $(v+w)+x+(y+z) = 25$ ou encore $7 + x + 8 = 25$, donc $x = 25 - 7 - 8 = 10$.

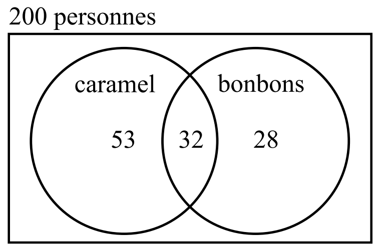


Réponse : (E)

13. La probabilité que le chapeau et le foulard choisis par Farhan soient de la même couleur est égale à la probabilité qu'il choisisse le chapeau noir et le foulard noir, ajoutée à la probabilité qu'il choisisse le chapeau bleu et le foulard bleu.
Comme il y a 2 chapeaux, la probabilité qu'il choisisse le chapeau bleu est $\frac{1}{2}$.
Comme il y a 3 foulards, la probabilité qu'il choisisse le foulard bleu est $\frac{1}{3}$.
La probabilité que Farhan choisisse à la fois le chapeau bleu et le foulard bleu est donc $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
De même, la probabilité que Farhan choisisse à la fois le chapeau noir et le foulard noir est $\frac{1}{6}$.
En conséquence, la probabilité que le chapeau et le foulard choisis par Farhan soient de la même couleur est égale à $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Réponse : (A)

14. Parmi les 85 personnes qui ont commandé du caramel, il y en a 32 qui ont aussi commandé des bonbons. C'est donc $85 - 32 = 53$ personnes qui ont commandé du caramel sans bonbons.
Parmi les 60 personnes qui ont commandé des bonbons, il y en a 32 qui ont aussi commandé du caramel. On compte donc $60 - 32 = 28$ personnes qui ont commandé des bonbons sans caramel.
En conséquence, 53 personnes ont commandé du caramel uniquement, 28 ont commandé des bonbons uniquement, et 32 ont commandé du caramel et des bonbons.
Ainsi, des 200 personnes qui ont acheté des glaces, le nombre de personnes qui n'ont commandé ni caramel ni bonbons est $200 - 53 - 28 - 32 = 87$.
On peut représenter ces informations dans un diagramme de Venn, tel que figuré ci-bas.



Réponse : (C)

15. Le triangle ABC est rectangle en B. En conséquence, le théorème de Pythagore nous permet de conclure que $BC^2 = AC^2 - AB^2$ ou encore $BC^2 = 40^2 - 20^2 = 1600 - 400 = 1200$. De là, on trouve que $BC = \sqrt{1200}$ (puisque $BC > 0$).
Le demi-cercle a un rayon de $\frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{1200}}{2}$, ainsi son aire est $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{1200}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1200}{4}\right)$, ce qui se simplifie en $\frac{1}{2}\pi(300) = 150\pi$.

Réponse : (D)

16. On écrit $7n$ pour le nombre de billes rouges, $3n$ pour le nombre de billes jaunes, et $5n$ pour le nombre de billes vertes.
Ainsi, le rapport entre le nombre de billes rouges, de billes jaunes et de billes vertes est de $7n : 3n : 5n = 7 : 3 : 5$, tel que donné.
Puisqu'il y a un total de 600 billes, on a $7n + 3n + 5n = 600$ ou encore $15n = 600$. On en tire que $n = \frac{600}{15} = 40$.
En conséquence, le nombre de billes rouges est $7n = 7(40) = 280$, le nombre de billes jaunes est $3n = 3(40) = 120$, et le nombre de billes vertes est $5n = 5(40) = 200$.
Si 20 billes de chaque couleur sont retirées, alors le nombre de billes rouges devient $280 - 20 = 260$, le nombre de billes jaunes devient $120 - 20 = 100$, et le nombre de billes vertes devient $200 - 20 = 180$. Le rapport entre le nombre de billes rouges, de billes jaunes et de billes vertes est maintenant de $260 : 100 : 180 = 26 : 10 : 18 = 13 : 5 : 9$.

Réponse : (C)

17. De la formule générale $a^* = \frac{5}{a}$ on tire en particulier que $100^* = \frac{5}{100}$. On trouve donc en remplaçant que $(100^*)^* = \left(\frac{5}{100}\right)^*$.
Encore une fois de la formule générale on tire que $\left(\frac{5}{100}\right)^* = \frac{5}{\left(\frac{5}{100}\right)} = 5 \times \frac{100}{5} = 100$. Ainsi $(100^*)^* = 100$.

Réponse : (A)

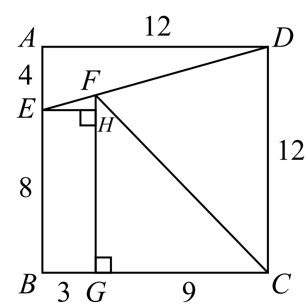
18. À l'étape (i), Lavinia remplit complètement la bouteille de 6 L avec de l'eau. À l'étape (ii), elle déverse la bouteille de 5 L dans celle de 6 L, ce qui laisse la bouteille de 6 L avec 6 L − 5 L = 1 L d'eau. À l'étape (iii), elle vide la bouteille de 5 L. La bouteille de 5 L ne contient plus d'eau et celle de 6 L contient 1 L. À l'étape (iv), elle déverse le 1 L d'eau de la bouteille de 6 L dans la bouteille de 5 L.
Après avoir complété la séquence de quatre étapes une première fois, la bouteille de 6 L est vide tandis que la bouteille de 5 L contient 1 L d'eau.
Dans le tableau, on suit l'évolution des volumes d'eau dans chacune des bouteilles, après chaque étape. Le volume d'eau est mesuré en litres.

Étape :	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
Bouteille de 6 L	6	$6-5=1$	1	0	6	$6-4=2$	2	0	6	$6-3=3$	3	0
Bouteille de 5 L	0	5	0	1	1	5	0	2	2	5	0	3

On voit qu'une fois que Lavinia a répété les quatre étapes trois fois, le volume d'eau dans la bouteille de 5 L est de 3 L.

Réponse : (D)

19. On cherche à exprimer l'aire du triangle FGC comme une fraction de l'aire du carré $ABCD$. Pour ce faire, on commence par fixer à 12 unités la mesure du côté du carré $ABCD$. Son aire est donc $k = 12^2 = 144$.
Puisque $BG = \frac{1}{4}BC = \frac{1}{4}(12) = 3$, on trouve $GC = 12 - 3 = 9$.
Ensuite, on place le point H sur FG de manière que EH soit perpendiculaire à FG. On relie ces points en un rectangle $EBGH$ avec $GH = EB = 8$ et $EH = BG = 3$.
La pente de ED est $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$, donc la pente de EF est aussi $\dfrac{1}{3}$.

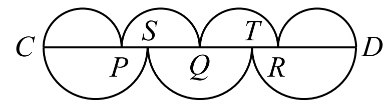


La pente de EF est $\dfrac{FH}{EH}$ ou encore $\dfrac{1}{3} = \dfrac{FH}{3}$, d'où $FH = 3 \times \dfrac{1}{3} = 1$. Puisque $GH = 8$ et que $FH = 1$, alors $FG = 8 + 1 = 9$.
L'aire du triangle FGC est $\dfrac{1}{2}(GC)(FG) = \dfrac{1}{2}(9)(9) = \dfrac{81}{2}$.

À présent, on peut remplacer k par 144 dans chacune des réponses possibles afin de déterminer laquelle équivaut à $\dfrac{81}{2}$. Ce faisant, on trouve $\dfrac{9}{32}k = \dfrac{9}{32}(144) = \dfrac{9}{2}(9) = \dfrac{81}{2}$; en conséquence la réponse est (A).
On pourrait tout aussi bien écrire $\dfrac{81}{2}$ en termes de k puisque $\dfrac{81}{2} = \dfrac{81}{2} \times \dfrac{k}{k} = \dfrac{81}{2} \times \dfrac{k}{144} = \dfrac{81}{2 \times 144}k = \dfrac{9}{2 \times 16}k = \dfrac{9}{32}k$.

Réponse : (A)

20. Violette marche le long de quatre demi-cercles isométriques de diamètres $CP = PQ = QR = RD = \dfrac{48 \text{ cm}}{4} = 12$ cm.



Ainsi, la distance totale parcourue par Violette est $4 \times \dfrac{1}{2}\pi(12 \text{ cm}) = 24\pi$ cm.

Pétunia marche le long de trois demi-cercles isométriques de diamètres $CS = ST = TD = \dfrac{48 \text{ cm}}{3} = 16$ cm.

Ainsi, la distance totale parcourue par Pétunia est $3 \times \dfrac{1}{2}\pi(16 \text{ cm}) = 24\pi$ cm. On suppose que Violette marche de C à D en t secondes. Il faut $t - 12$ secondes à Pétunia pour marcher de C à D. On suppose de plus que Violette voyage à une vitesse constante de v cm/s. Alors, Pétunia voyage à une vitesse constante de $3v$ cm/s. Ces informations sont résumées dans le tableau suivant.

	Distance (cm)	Temps (s)	Vitesse (cm/s)
Violette	24π	t	v
Pétunia	24π	$t - 12$	$3v$

Comme la distance est le produit de la vitesse et du temps, et que chaque fourmi parcourt la même distance, on a que $vt = 3v(t - 12)$.

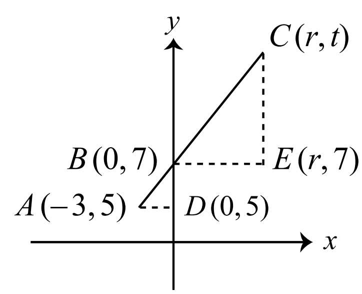
Puisque $v > 0$, on peut diviser les deux côtés de l'équation par v. En résolvant pour t, on obtient $t = 3(t - 12)$ ou encore $t = 3t - 36$ ou bien $36 = 2t$, d'où $t = 18$.

Ainsi, il faut 18 secondes à Violette pour marcher de C à D.

Réponse : (B)

21. *Solution 1*

On trace les points A, B et C, ainsi que $D(0{,}5)$ et $E(r{,}7)$, afin que les triangles ABD et BCE soient rectangles en D et E respectivement.



Ces deux triangles rectangles possèdent chacun un côté horizontal et un côté vertical, comme on peut le voir sur l'illustration.

Puisque A, B et C sont colinéaires, que le segment AD est parallèle à BE, et que BD est parallèle à CE, on doit avoir $\angle DAB = \angle EBC$ et $\angle DBA = \angle ECB$.

En conséquence, le triangle ABD est similaire au triangle BCE.

En considérant leur rapports communs, on obtient $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{EC}{DB} = \dfrac{BE}{AD}$.

Les segments EC et DB étant verticaux, leur longueurs s'obtiennent comme la différence entre les ordonnées de leurs extrémités.

Ainsi, $EC = t - 7$ et $DB = 7 - 5 = 2$.

De même, la longueur des segments BE et AD se trouve en prenant la différence entre les abscisses de leurs extrémités, d'où $BE = r$ et $AD = 3$.

Par hypothèse, $BC = 4AB$, donc $\dfrac{BC}{AB} = 4$. Ainsi, $4 = \dfrac{EC}{DB} = \dfrac{t-7}{2}$ et $4 = \dfrac{BE}{AD} = \dfrac{r}{3}$.

En réorganisant ces deux équations, on trouve $8 = t - 7$ ou $t = 15$, et $12 = r$, donc $r + t = 27$.

Solution 2

On utilise la formule pour la distance entre deux points,

$$AB = \sqrt{(7-5)^2 + (0-(-3))^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

et

$$BC = \sqrt{(t-7)^2 + (r-0)^2} = \sqrt{(t-7)^2 + r^2}.$$

Par hypothèse, $BC = 4AB$, donc $4\sqrt{13} = \sqrt{(t-7)^2 + r^2}$. En élevant les deux côtés de l'équation au carré, on obtient $16 \times 13 = (t-7)^2 + r^2$.

On sait aussi que A, B et C sont colinéaires. Cela implique que la pente du segment AB est la même que celle du segment BC.

Ces pentes sont respectivement $\dfrac{7-5}{0-(-3)} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{t-7}{r-0} = \dfrac{t-7}{r}$.

En comparant ces deux pentes qu'on sait être égales, on trouve $\dfrac{t-7}{r} = \dfrac{2}{3}$, c'est-à-dire $t-7 = \dfrac{2}{3}r$.

En substituant dans $16 \times 13 = (t-7)^2 + r^2$, on obtient les équations suivantes, toutes équivalentes.

$$\begin{aligned}
16 \times 13 &= \left(\frac{2}{3}r\right)^2 + r^2 \\
16 \times 13 &= \frac{4}{9}r^2 + r^2 \\
16 \times 13 &= \frac{13}{9}r^2 \\
16 \times 9 &= r^2 \\
\sqrt{16}\sqrt{9} &= \sqrt{r^2} \\
12 &= r.
\end{aligned}$$

La dernière égalité tient du fait que, par hypothèse, r est supposé strictement positif.

En conséquence, on a $r = 12$, d'où on peut tirer $t - 7 = \dfrac{2}{3} \times 12 = 8$, c'est-à-dire $t = 15$.

La réponse à la question est $r + t = 12 + 15 = 27$.

Réponse : 27

22. On commence par compter les nombres de Katende qui sont au moins 2401 et au plus 2499, puis on compte ensuite ceux qui sont au moins 2500 et au plus 2599.
On suppose que $24AB$ est un nombre de Katende, A et B étant les chiffres des dizaines et des unités du nombre.
Par définition, il doit y avoir deux entiers n et m tels que $nm = 24$ et $n(m + 1) = AB$.
Comme (n,m) est une paire de diviseurs de 24, on sait que (n,m) se trouve parmi (1,24), (2,12), (3,8), (4,6), (6,4), (8,3), (12,2), (24,1).
Si $n = 1$ et $m = 24$, alors $n(m + 1) = 25$, ce qui donne le nombre de Katende 2425.
On peut continuer de la sorte avec les sept autres paires de 24. Ce faisant, on obtient les nombres de Katende 2426, 2427, 2428, 2430, 2432, 2436, 2448.
On voit qu'il y a un total de 8 nombres de Katente ayant 24 comme deux premiers chiffres.
On suppose maintenant que $25AB$ est un nombre de Katende et on procède par un raisonnement similaire.
Il doit y avoir deux entiers n et m tels que $25 = nm$ et $AB = n(m + 1)$.
Les paires de diviseurs (n,m) de 25 sont (1,25), (5,5), (25,1).
Ces paires produisent les nombres de Katende 2526, 2530 et 2550, un total de 3.
En ajoutant cela au 8 nombres de Katende déjà énumérés au paragraphe précédent, on trouve qu'il y a $8 + 3 = 11$ nombres de Katende qui sont supérieurs à 2400 mais inférieurs à 2600.

Réponse : 11

23. Soient A, B, C et D les quantités de pièces reçues respectivement par Amr, Bai, Cindy et Derek. Alors $A + B + C + D = N$. Les trois conditions sous lesquelles les pièces ont été distribuées correspondent aux équations

$$A = \frac{1}{3}(B + C + D)$$
$$B = \frac{1}{5}(A + C + D)$$
$$C = \frac{1}{7}(A + B + D)$$

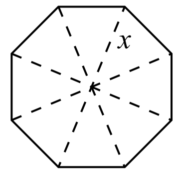
En multipliant ces équations par un facteur de 3, 5 et 7 respectivement, on obtient

$$3A = B + C + D \quad (1)$$
$$5B = A + C + D \quad (2)$$
$$7C = A + B + D \quad (3)$$

En soustrayant l'Équation (1) de l'Équation (2), on obtient $5B - 3A = (A + C + D) - (B + C + D)$, ce qui peut être simplifié en $6B = 4A$ ou encore $B = \frac{2}{3}A$.
En soustrayant l'Équation (1) de l'Équation (3), on obtient $7C - 3A = (A + B + D) - (B + C + D)$, ce qui peut être simplifié en $8C = 4A$ ou encore $C = \frac{1}{2}A$.
Substituer $B = \frac{2}{3}A$ et $C = \frac{1}{2}A$ dans l'Équation (1) donne $3A = \frac{2}{3}A + \frac{1}{2}A + D$, ou encore $D = \frac{11}{6}A$.
On a maintenant exprimé B, C et D en termes de A, donc on substitue ces expressions dans l'équation $A + B + C + D = N$ pour obtenir $A + \frac{2}{3}A + \frac{1}{2}A + \frac{11}{6}A = N$.
En simplifiant le côté gauche, on trouve $4A = N$. Puisque A et N sont des entiers, cela nous dit que N doit être un multiple de 4.
Le plus grand multiple de 4 inférieur à 100 est $N = 96$; on suppose que c'est la réponse.
Si $N = 96$, alors la relation $4A = n$ implique que $A = 24$. En utilisant les équations pour les trois autres variables en termes de A, on obtient $B = 16$, $C = 12$ et $D = 44$. On peut vérifier que ces quatre entiers satisfont aux conditions données dans l'énoncé du problème.

Réponse : 96

24. Si la longueur de deux côtés d'un triangle ainsi que la mesure de l'angle entre eux sont connues, alors l'aire du triangle peut être calculée. Plus précisément, si a et b sont les longueurs de deux côtés d'un triangle, et θ est l'angle entre ces côtés, alors l'aire du triangle est donnée par $\frac{1}{2}ab\sin\theta$.
On peut utiliser ce fait afin de calculer les aires de l'octogone et du dodécagone.
On relie le centre de l'octagone à chacun de ses 8 sommets, comme illustré.



Cela partionne l'octogone en 8 triangles. Chaque triangle a deux côtés de longueur x et un côté égal au côté de l'octogone.
Ces huit triangles sont isométriques car ils respectent la condition minimale d'isométrie CCC. On suppose que θ est l'angle formé, dans chacun de ces triangles, par les deux côtés de longueur x. Alors $8\theta = 360^\circ$ et donc $\theta = 45^\circ$.
L'aire de l'octogone est égale à la somme des aires des huit triangles isométriques. Ainsi, l'aire de l'octogone est

$$8 \times \frac{1}{2}x^2 \sin 45^\circ = 4x^2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 4x^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}x^2$$

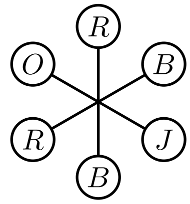
Par une construction similaire, on trouve que l'aire du dodécagone est

$$12 \times \frac{1}{2}y^2 \sin 30^\circ = 12 \times \frac{1}{2}y^2 \times \frac{1}{2} = 3y^2$$

Comme le rayon du cercle est 3000, sont aire est $A = \pi(3000)^2$.
Les aires de l'octogone et du dodécagone sont chacunes $\frac{1}{2}A$, c'est-à-dire $2\pi(1500)^2$.
On peut utiliser cette quantité afin de résoudre pour x et y.
Pour trouver x, on a $2\pi(1500)^2 = 2\sqrt{2}x^2$, et donc $x^2 = \dfrac{\pi(1500)^2}{\sqrt{2}}$.
En prenant la racine carré des deux côtés, on obtient $x = 1500\sqrt{\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}} \approx 2235.6752$.
Pour trouver y, on a $3y^2 = 2\pi(1500)^2$, et donc $y^2 = \dfrac{2\pi(1500)^2}{3}$, c'est-à-dire $y = 1500\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}} \approx 2170.8038$.
En conséquence, $x - y \approx 2235.6752 - 2170.8038 = 64.87$. Arrondissant à l'entier le plus près, la réponse est 65.

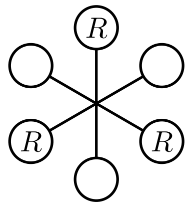
Réponse : 65

25. Tout au long de la solution, on fera usage de diagrammes similaires à celui ci-bas afin de représenter une manière possible de colorier les pétales de la fleur. Chaque cercle correspond à un pétale et chaque lettre majuscule R, O, J et B représente une couleur, respectivement le rouge, le orange, le jaune et le bleu. Par exemple, le diagramme représentant le coloriage rouge, bleu, jaune, bleu, rouge, orange, et qui commence du dessus dans le sens horaire, est

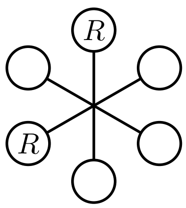


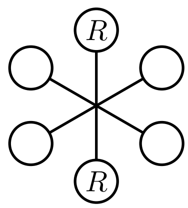
Pour l'instant, on va compter le nombre de manières de colorier les pétales selon les règles données, mais en supposant en outre que le pétale du haut est rouge. Considérant cela, on sépare l'analyse en

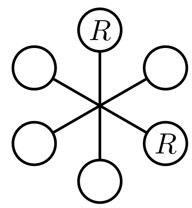
trois cas, selon le nombre de fois que la couleur rouge apparaît.
Avant de continuer, la lectrice ou le lecteur devrait se convaincre qu'il est impossible de colorier en rouge quatre pétales ou plus sans qu'il y en ait au moins deux qui se touchent.
Cas 1 : Le rouge est utilisé trois fois.
Puisque deux pétales voisins ne peuvent pas avoir la même couleur, il n'y a qu'une seule configuration possible pour la couleur rouge



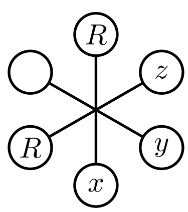
Le reste des pétales peut être colorié de façon arbitraire. En conséquence, il y a $3 \times 3 \times 3 = 27$ façons de colorier les pétales dans ce cas.
Cas 2 : Le rouge est utilisé deux fois.
Il y a trois configurations dans lesquelles deux des pétales sont rouges.

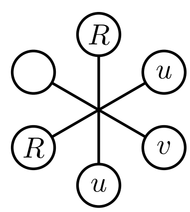






On considère la seconde de ces configurations.
Les deux pétales qui avoisinent le pétale rouge du dessus peuvent chacune être coloriées de n'importe quelle des trois couleurs restantes.
Après avoir fait ces deux choix (indépendants), les deux pétales restants peuvent être à leur tour indépendamment coloriés en utilisant une parmi exactement deux couleurs possibles.
En conséquence, on peut colorier la configuration du milieu peut être faite de $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ façons différentes.
Dans la première configuration, le pétale entre les deux pétales rouges peut être colorié de trois manières différentes, et le choix de couleurs est indépendant de la manière dont les trois autres pétales sont coloriés.
Les trois autres pétales peuvent être soit coloriés de trois couleurs différentes (x, y et z), ou soit coloriés en utilisant deux couleurs différentes (u et v), comme figuré ci-bas :





Si on utilise trois couleurs, alors il y a 6 façons de les choisir puisqu'on peut choisir x de 3 façons différentes, puis choisir y de deux façons différentes, et puis on n'a pas le choix pour z.
Si on utilise deux couleurs, alors il y a 3 façons de choisir u, et puis 2 façons de choisir v, pour un total de 6 façons.
Ainsi, il y a $6 + 6 = 12$ façons de colorier les trois pétales (autrement que celui entre les deux pétales rouges).
Puisqu'il y a 3 façons de colorier le pétale entre les deux pétales rouges, il y a $3 \times 12 = 36$ façons de compléter le coloriage pour cette configuration.
La troisième configuration peut être coloriée elle aussi de 36 façons ; il y a donc $36 + 36 + 36 = 108$ façons de colorier les pétales dans ce cas.

Cas 3 : Le rouge est utilisé une fois.
On peut s'imaginer colorier les pétales un à la fois dans le sens horaire en commençant par le pétale rouge.
Il y aura 3 choix pour le premier pétale puisque la seule restriction est qu'on ne peut pas utiliser la couleur rouge.
On pourra choisir parmi 2 options pour le prochain pétale, puisqu'il ne peut pas être de la même couleur que le pétale précédent et que de plus il ne peut pas être rouge.
En continuant de la sorte, il y a 2 options pour le quatrième pétale, et 2 options pour le cinquième pétale.
On a aussi deux options pour le pétale final car ses deux voisins ont deux couleurs différentes. C'est parce qu'on a pas utilisé la couleur rouge autrement que pour colorier le pétale du dessus.
En conséquence, il y a $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ façons de colorier les pétales dans ce cas.

Des trois cas, on obtient un total de $27 + 108 + 48 = 183$ manières de colorier les pétales de sorte que le pétale du dessus soit rouge.
Il y a 4 choix pour la couleur du pétale du dessus, et chaque choix mènera à un décompte de 183.
En conséquence, le nombre de manières de colorier les pétales selon les règles données est $4 \times 183 = 732$.
Les deux derniers chiffres de 732 font l'entier 32, ce qui est donc la réponse à la question.

Réponse : 32