Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

le mercredi 12 novembre 2025
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)
le jeudi 13 novembre 2025
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

Remarques :

1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Lundi en fin de journée, Wenfei a 7 biscuits. Pendant chacun des quatre jours suivants (de mardi à vendredi), Wenfei mange 2 biscuits à l'heure du dîner, puis après l'école, il en achète suffisamment pour doubler le nombre total de biscuits qu'il a. Combien de biscuits Wenfei a-t-il le vendredi après l'achat ?
2. L'équation $10(4x - 3) - k(4x - 3) = 16x - 12$ est vérifiée par tous les nombres réels x. Quelle est la valeur du nombre réel k ?
3. Un dé standard à six faces sera lancé deux fois. Quelle est la probabilité que le résultat du deuxième lancer soit supérieur à celui du premier lancer ?
4. Les entiers x et y sont des carrés parfaits tel que $x - y = 35$. Quelles sont les valeurs possibles de $x + y$?
5. On découpe un secteur d'angle θ, tel que $0^\circ < \theta < 180^\circ$, dans un morceau de papier circulaire de rayon 1. Les deux côtés droits de ce secteur sont joints pour former un cône. On découpe un secteur d'angle 2θ dans un autre morceau de papier circulaire de rayon 1, puis on forme un cône en joignant ses deux côtés droits. Si les deux cônes ainsi formés ont le même volume, quelle est la valeur de θ ?
   Le volume d'un cône de rayon r et de hauteur h est $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.
6. On liste tous les entiers strictement positifs à 8 chiffres, puis chaque chiffre 0 est effacé. En conséquence, certains entiers de la liste sont remplacés par un ou plusieurs entiers. Par exemple, l'entier 89 160 000 est remplacé par 8916, l'entier 34 041 034 est remplacé par les trois entiers 34, 41, et 34, tandis que l'entier 49 671 349 ne change pas. Combien d'entiers y a-t-il dans la liste après que tous les 0 ont été effacés ?

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. (a) Une droite a pour équation $y = px + p^2$, p étant un nombre réel. La droite passe par le point $(x, y) = (6, -9)$. Déterminer la valeur de p.

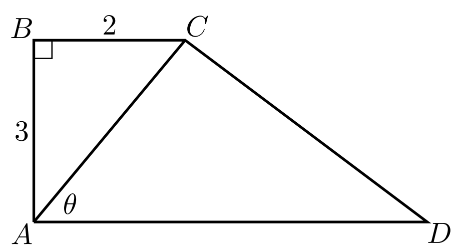
   (b) Le tableau ci-dessous donne trois points (x, y) situés sur la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

x	y
-1	5
0	4
1	11

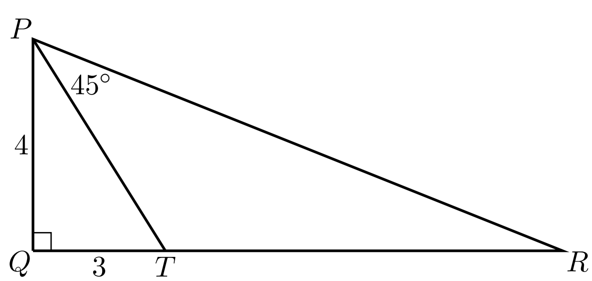
   Déterminer les valeurs de a, b et c.

   (c) La parabole d'équation $y = (x-1)^2 + q$ passe par les points $(d, 5)$ et $(d+6, 5)$, d étant un nombre réel. Déterminer la valeur de q.

2. (a) Dans la figure ci-dessous, le trapèze $ABCD$ a les côtés AD et BC parallèles, $AB = 3$, $BC = 2$, $\angle ABC = 90°$, et $\angle CAD = \theta$. Déterminer la valeur exacte de $\sin\theta$.



   (b) Dans la figure ci-dessous, le triangle PQR est rectangle en Q, $PQ = 4$, et T est un point sur QR tel que $QT = 3$ et $\angle TPR = 45°$. Déterminer la longueur de TR.



   (c) Les points X, Y, et Z ont pour coordonnées $X(0,0)$, $Y(7,24)$, et $Z(15,0)$. Le point W est situé sur le segment YZ tel que $\angle WXZ = 3\angle WXY$. Déterminer les coordonnées de W.

3. Soit une suite S de nombres réels $b_1, b_2, b_3, \ldots$, le *complément* de S est la suite $c_1, c_2, c_3, \ldots$, tel que $c_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 2$, c_n vérifie

$$c_n = b_1 c_{n-1} + b_2 c_{n-2} + \cdots + b_{n-1} c_1$$

C'est-à-dire, c_n est la somme de tous les termes $b_k c_{n-k}$ tel que k varie de 1 à $n-1$.

(a) La suite S définie par $b_n = 2^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$ a les termes $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$. Déterminer les termes c_2, c_3, et c_4 du complément de S.

(b) Démontrer que si S est une suite géométrique avec le complément $c_1, c_2, c_3, \ldots$, alors il existe une constante t tel que $c_n = t c_{n-1}$ pour tout $n \geq 3$.

(c) Supposons que $b_1, b_2, b_3, \ldots$ est une suite arithmétique et que son complément vérifie

$$c_{2025} = 3, \quad c_{2026} = 0, \quad c_{2027} = -3, \quad c_{2028} = 3$$

Déterminer la valeur de b_{2025}.

Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante non nulle appelée raison. Par exemple, $3, 6, 12, 24$ sont les quatre premiers termes d'une suite géométrique de raison 2.

Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant au terme précèdent une constante appelée raison. Par exemple, $2, 5, 8, 11$ sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique de raison 3.