Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur 2024

le mercredi 13 novembre 2024
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 14 novembre 2024
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

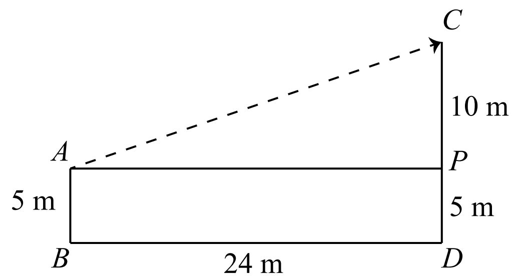
1. *Solution 1*
En évaluant, $\sqrt{10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 11 + 11^2} = \sqrt{100 + 220 + 121} = \sqrt{441} = 21$.

Solution 2
Puisque $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, nous avons que

$$\sqrt{10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 11 + 11^2} = \sqrt{(10 + 11)^2} = \sqrt{21^2} = 21.$$

Réponse : 21

2. Marquons le plus petit des deux arbres par AB et le plus grand par CD, comme figuré.
Tirons une ligne horizontale passant par A et notons par P son intersection avec CD.



Puisque AB et PD sont verticaux et que AP et BD sont horizontaux, $ABDP$ est un rectangle, ce qui signifie que $PD = 5$ m et que $AP = 24$ m.
Comme $CD = 15$ m et $PD = 5$ m, nous avons $CP = CD - PD = 10$ m.
Par le théorème de Pythagore,

$$AC = \sqrt{AP^2 + CP^2} = \sqrt{(24 \text{ m})^2 + (10 \text{ m})^2} = \sqrt{676 \text{ m}^2} = 26 \text{ m}$$

puisque $AC > 0$.
Vu que l'oiseau parcourt 26 m à une vitesse constante de 4 m/s, le temps qu'il mettera pour effectuer son vol est de $\dfrac{26 \text{ m}}{4 \text{ m/s}} = 6.5$ s.

Réponse : 6.5 s

3. Comme l'équipe Igrec avait marqué 3 buts à la fin du match, nous avons $y \leq 3$.
Comme l'équipe Zed avait marqué 2 buts à la fin du match, nous avons $z \leq 2$.
Par conséquent, $0 \leq y \leq 3$ et $0 \leq z \leq 2$.
La seule restriction supplémentaire est que y et z soient tous les deux des entiers.
De là, ils n'y a que 4 valeurs possibles pour y, et 3 valeurs possibles pour z. Cela signifie qu'il y a un total de $4 \cdot 3 = 12$ paires (y,z) possibles.
Ces paires sont

$$(y,z) = (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1), (3,2).$$

Ces paires correspondent aux scores possibles à la mi-temps.

Réponse : 12

4. Il nous est donné que a, b, c, d sont des entiers strictement positifs vérifiant $abc = d$ et $d \leq 8$.
Nous allons déterminer le nombre de quadruplets (a,b,c,d) admissibles en fixant chaque valeur

possible de d.

Si $d = 1$, alors $abc = 1$. Puisque a, b, c sont des entiers strictement positifs, nous devons avoir que $a = b = c = 1$. Ainsi, il n'y a qu'un seul quadruplet dans ce cas, c'est-à-dire (1,1,1,1).

Si $d = 2$, alors $abc = 2$. Vu que 2 est un nombre premier, il ne peut y avoir qu'un seul nombre parmi a, b et c qui soit égal à 2 ; les deux autres valent alors 1.
De cette contrainte résultent 3 quadruplets : $(a,b,c,d) = (2,1,1,2), (1,2,1,2), (1,1,2,2)$.
De même, il y a 3 quadruplets admissibles pour $d = 3$, $d = 5$ et $d = 7$ (les autres valeurs pour lesquelles d est un nombre premier).

Si $d = 4$, alors $abc = 4$. Nous devons déterminer toutes les façons possibles par lesquelles 4 peut s'écrire comme le produit de trois entiers strictement positifs.
Les voici : $1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$ et $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$.
Dans chaque cas, il y a 3 manières d'arranger les facteurs du côté droit, qui sont les valeurs possibles de a, b et c :

$$1 \cdot 1 \cdot 4 = 1 \cdot 4 \cdot 1 = 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

$$1 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$$

Il y a donc dans ce cas 6 quadruplets admissibles.

Si $d = 6$, alors $abc = 6$. Les décompositions possibles de 6 en trois facteurs positifs sont $1 \cdot 1 \cdot 6 = 6$ et $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.
Dans le premier cas, il y a encore une fois 3 quadruplets.
Dans le second cas, nous pouvons arranger les facteurs de 6 manières différentes :

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

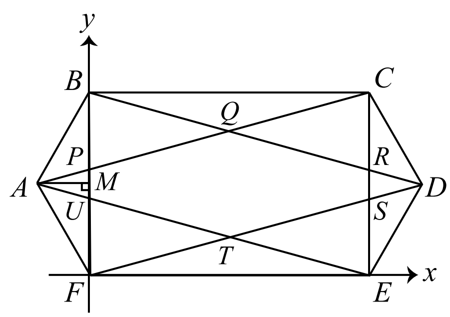
Il y a donc 9 quadruplets admissibles lorsque $d = 6$.

Si $d = 8$, alors $abc = 8$. Les décompositions possibles de 8 en trois facteurs positifs sont $1 \cdot 1 \cdot 8 = 8$, $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$ et $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.
Ces trois décompositions fournissent 3, 6 et 1 quadruplets admissibles, pour un total de 10.

En combinant tous les cas, nous trouvons qu'il y a un total de $1+3+3+3+3+6+9+10 = 38$ quadruplets.

Réponse : 38

5. Nous faisons appel à la géométrie analytique.
Supposons que F est à l'origine et que E se trouve sur la partie positive de l'axe des abscisses.
Les coordonnées de F sont (0,0). Puisque $FE = 6$, les coordonnées de E sont (6,0).
Nous tâchons à présent de trouver les coordonnées de B.
Nous remarquons que $FA = AB = 2$.
Comme les six angles internes de l'hexagone $ABCDEF$ sont égaux entre eux, chacun mesure $\frac{1}{6} \cdot 720° = 120°$. (Les angles internes d'un hexagone se partagent toujours 720°.)
Cela signifie que $\triangle FAB$ est un triangle isocèle, avec $FA = AB = 2$ et $\angle FAB = 120°$.
Puisque $\angle FAB = 120°$, nous avons $\angle AFB = \angle ABF = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$.
Comme $\angle AFE = 120°$ et $\angle AFB = 30°$, nous obtenons $\angle BFE = \angle AFE - \angle AFB = 90°$, ce qui nous permet de déduire que BF est un segment vertical et donc que B se trouve sur la partie positive de l'axe des ordonnées.
Tirons une droite perpendiculaire à BF passant par A et notons par M son point d'intersection avec BF. Comme $\triangle FAB$ est isocèle, M est le point milieu de BF et AM bissecte $\angle FAB$.



Cela signifie que $\triangle BAM$ est un triangle 30°-60°-90°.
En conséquence, $BM = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \sqrt{3}$ et donc $BF = 2\sqrt{3}$, ce qui signifie que les coordonnées de B sont $(0, 2\sqrt{3})$.
(Nous aurions pu déterminer la longueur de BF en appliquant la loi des cosinus à $\triangle BAF$.)
De plus, $AM = \frac{1}{2}AB = 1$, d'où nous trouvons que les coordonnées de A sont $(-1,\sqrt{3})$.
Par un argument similaire, les coordonnées de C sont $(6,2\sqrt{3})$ et celles de D sont $(7,\sqrt{3})$.
Nous pouvons déterminer l'aire de l'hexagone $PQRSTU$ en soustrayant de l'aire du rectangle $BCEF$ (qui est $6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$) les aires de $\triangle UFT$, $\triangle BPQ$, $\triangle CRQ$, $\triangle SET$, $\triangle BCQ$, et $\triangle FET$.
Par symétrie, les aires de $\triangle UFT$, $\triangle BPQ$, $\triangle CRQ$, $\triangle SET$ sont égales entre elles.
Encore par symétrie, les aires de $\triangle BCQ$ et $\triangle FET$ sont égales.
Ainsi, il suffit de déterminer l'aire de $\triangle UFT$ et celle de $\triangle FET$.
Pour ce faire, nous déterminons les coordonnées de U et de T.
Le segment de droite FD passe par $F(0,0)$ et $D(7,\sqrt{3})$.
Donc, sa droite est de pente $\frac{\sqrt{3}}{7}$ et d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{7}x$.
Le segment de droite AE passe par $A(-1,\sqrt{3})$ et $E(6,0)$.
Donc, sa droite est de pente $\frac{\sqrt{3}}{-7}$ et d'équation $y = -\frac{\sqrt{3}}{7}(x-6)$ ou $y = -\frac{\sqrt{3}}{7}x + \frac{6\sqrt{3}}{7}$.
Ainsi, les coordonnées de U (c.-à-d., l'ordonnée à l'origine de la droite précédente) sont $(0, \frac{6\sqrt{3}}{7})$.
Afin de trouver les coordonnées de T, nous cherchons le point d'intersection entre AE et FD.
Réconcilliant les deux expressions pour y, nous obtenons $\frac{\sqrt{3}}{7}x = -\frac{\sqrt{3}}{7}x + \frac{6\sqrt{3}}{7}$, ce qui donne $\frac{2\sqrt{3}}{7}x = \frac{6\sqrt{3}}{7}$ ou $x = 3$. (Il ne devrait pas être surprenant que l'abscisse de T vale 3.)
Quand $x = 3$, nous obtenons $y = \frac{3\sqrt{3}}{7}$, donc les coordonnées de T sont $(3, \frac{3\sqrt{3}}{7})$.
En conséquence, $\triangle FET$ est de base $FE = 6$ et sa hauteur est égale à la distance entre T et FE (qui est $\frac{3\sqrt{3}}{7}$). Ainsi, l'aire de $\triangle FET$ est $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{7} = \frac{9\sqrt{3}}{7}$.

De plus, le triangle UFT a une base verticale UF (qui est de longueur $\frac{6\sqrt{3}}{7}$) et une hauteur horizontale égale à la distance entre T et UF (c'est-à-dire 3). Donc, l'aire de $\triangle UFT$ est $\frac{1}{2} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{7} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{7}$. (Pouvez-vous trouver une raison pour laquelle ce nombre devrait être égal à l'aire de $\triangle FET$?)
Finalement, l'aire de $PQRSTU$ est égale à $12\sqrt{3} - 6 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{7}$ ou $\frac{84\sqrt{3}}{7} - \frac{54\sqrt{3}}{7}$, ce qui équivaut à $\frac{30\sqrt{3}}{7} = \frac{\sqrt{2700}}{7}$.
Ainsi, $(n,t) = (2700,7)$.

Réponse : (2700,7)

6. La somme des éléments d'une liste contenant m entiers strictement positifs distincts est d'au moins $1 + 2 + \cdots + (m-1) + m$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}m(m+1)$.
Nous remarquons que $\frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 64 = 2016$ et que $\frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 65 = 2080$.
En d'autres termes, la somme $1 + 2 + \cdots + 63 + 64$ est supérieure à 2024, et toute somme ayant plus de 64 entiers strictement positifs distincts est plus grande encore.
En conséquence, une liste Gleeson contient tout au plus 63 entiers.
Nous remarquons que $1+2+\cdots+62+63 = \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 64 = 2016$, d'où $1+2+\cdots+62+63+8 = 2024$, et donc que $1 + 2 + \cdots + 61 + 62 + 71 = 2024$.
Cela signifie qu'il existe au moins une liste Gleeson de longueur 63. Comme il ne peut y avoir de liste Gleeson plus longue que cela, nous déduisons que la longueur maximale possible d'une liste Gleeson est de 63.
Nous devons déterminer le nombre de listes Gleeson de longueur $M = 63$.
Supposons que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{62}, a_{63}$ est une liste Gleeson.
Autrement dit, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{62}, a_{63}$ sont des entiers strictement positifs avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_{62} < a_{63}$ et

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{62} + a_{63} = 2024.$$

Pour chaque j avec $1 \leq j \leq 63$, nous posons $b_j = a_j - j$, d'où $a_j = j + b_j$.
Nous écrivons alors une liste Gleeson générique comme

$$1 + b_1, 2 + b_2, \ldots, 62 + b_{62}, 63 + b_{63},$$

où chaque b_j représente le "surplus" en chaque terme.
Pour chaque j avec $1 \leq j \leq 62$, nous avons $a_{j+1} \geq a_j + 1$ puisque a_j et a_{j+1} sont des entiers vérifiant $a_{j+1} > a_j$.
Cela signifie que $j + 1 + b_{j+1} \geq j + b_j + 1$, et donc que $b_{j+1} \geq b_j$.
Ansi, $b_1, b_2, \ldots, b_{62}, b_{63}$ est une liste d'entiers avec $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{62} \leq b_{63}$.
Puisque $a_1 = 1 + b_1 \geq 1$, alors $b_1 \geq 0$ et donc $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{62} \leq b_{63}$.
De plus, comme $a_1 + a_2 + \cdots + a_{62} + a_{63} = 2024$, nous avons

$$(1 + b_1) + (2 + b_2) + \cdots + (62 + b_{62}) + (63 + b_{63}) = 2024.$$

Mais comme $1 + 2 + \cdots + 62 + 63 = 2016$, nous devons avoir

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{62} + b_{63} = 8.$$

Autrement dit, afin de compter le nombre de listes Gleeson de longueur 63, nous devons dénombrer les listes non décroissantes d'entiers positifs ou nuls $b_1, b_2, \ldots, b_{62}, b_{63}$ dont la somme est de 8.
Nous déterminons ces listes en les catégorisant par le nombre de termes non nuls qu'elles contiennent, en gardant en tête que dans notre écriture les termes laissés implicites sont tous zéro.

- 1 terme non nul : 8
- 2 termes non nuls : 1, 7 ; 2, 6 ; 3, 5 ; 4, 4
- 3 termes non nuls : 1, 1, 6 ; 1, 2, 5 ; 1, 3, 4 ; 2, 2, 4 ; 2, 3, 3
- 4 termes non nuls : 1, 1, 1, 5 ; 1, 1, 2, 4 ; 1, 1, 3, 3 ; 1, 2, 2, 3 ; 2, 2, 2, 2
- 5 termes non nuls : 1, 1, 1, 1, 4 ; 1, 1, 1, 2, 3 ; 1, 1, 2, 2, 2
- 6 termes non nuls : 1, 1, 1, 1, 1, 3 ; 1, 1, 1, 1, 2, 2
- 7 termes non nuls : 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2
- 8 termes non nuls : 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1

Dans chaque cas, nous trouvons les listes en débutant avec le plus grand élément à droite, puis en remplissant vers la gauche de façon systématique.
Nous voyons qu'il y a 22 telles listes, et donc 22 listes Gleeson de longueur 63.

Réponse : 22

Partie B

1. (a) Comme $64 = 2^6$, il vient que $2^{x+1} = 2^6$ et donc $x + 1 = 6$, d'où $x = 5$.

   (b) En comparant les exposants des deux équations, nous obtenons $t + u = 8$ et $u - 3 = 2$.
   De la seconde équation, nous déduisons que $u = 5$.
   En substituant $u = 5$ dans $t + u = 8$, nous trouvons que $t = 3$.
   Donc, $t = 3$ et $u = 5$.

   (c) Puisque m et r sont des entiers, nous pouvons comparer les exposants afin d'obtenir $2m + r = 7$ et $3m - r = 3$.
   (Il est possible de faire cette comparaison car tout entier plus grand que 1 peut être décomposé de manière unique en ses facteurs premiers.)
   En additionnant ensemble ces deux équations, nous obtenons $(2m + r) + (3m - r) = 7 + 3$ ou $5m = 10$, ce qui donne $m = 2$.
   En substituant ceci dans la première équation, nous trouvons $2 \cdot 2 + r = 7$ et donc $r = 3$.
   Par conséquent, $m = 2$ et $r = 3$.

   (d) *Solution 1*
   Tout d'abord, nous remarquons que $80 = 16 \cdot 5 = 2^4 5^1$.
   Puisque $2^{p+q}5^{p-q} = 2^4 5^1$ et que p et q sont des nombres entiers, en comparant les exposants nous obtenons $p + q = 4$ et $p - q = 1$.
   En additionnant ces équations, nous trouvons $2p = 5$, d'où $p = 2{,}5$.
   Ainsi, il ne peut y avoir aucun nombres entiers p et q qui vérifient cette équation.

   Solution 2
   Tout d'abord, nous remarquons que $80 = 16 \cdot 5 = 2^4 5^1$.
   Cela signifie que 80 n'admet qu'un seul facteur de 5.
   Comme $2^{p+q}5^{p-q} = 80$, le côté gauche n'admet lui aussi qu'un seul facteur de 5.
   Ainsi $p - q = 1$, ce qui nous indique que p et q sont de parités opposées.
   De là, nous voyons que $p + q$ est un nombre impair, en tant que somme d'un nombre pair et d'un nombre impair. Ainsi, le côté gauche admet un nombre impair de facteurs de 2.
   Cependant, 80 admet un nombre pair de facteurs de 2.
   Ceci est une contradiction, donc il ne peut y avoir aucun nombres entiers p et q qui vérifient cette équation.

2. (a) *Solution 1*
   Par la formule quadratique, les solutions de l'équation quadratique $x^2 - 2x - 1 = 0$ sont

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

   Soient $r = 1 + \sqrt{2}$ et $s = 1 - \sqrt{2}$.
   Alors $2r + s = 2(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 3 + \sqrt{2}$ et $r + 2s = (1 + \sqrt{2}) + 2(1 - \sqrt{2}) = 3 - \sqrt{2}$.
   Par conséquent, une équation quadratique ayant comme solutions $x = 3 + \sqrt{2}$ et $x = 3 - \sqrt{2}$ est

$$(x - (3 + \sqrt{2}))(x - (3 - \sqrt{2})) = 0$$

   ou bien encore

$$x^2 - ((3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}))x + (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 0.$$

   Comme $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$, cette équation équivaut à $x^2 - 6x + 7 = 0$.
   Ainsi, $b = -6$ et $c = 7$.

Solution 2
Si l'équation quadratique $x^2 + Bx + C = 0$ admet $x = r$ et $x = s$ comme solutions, alors les expressions quadratiques $x^2 + Bx + C$ et $(x - r)(x - s)$ doivent être identiques car elles ont toutes les deux un coefficient dominant de 1. En conséquence,

$$x^2 + Bx + C = x^2 - rx - sx + rs = x^2 - (r + s)x + rs,$$

d'où $r + s = -B$ et $rs = C$.

Dans notre cas, l'équation quadratique $x^2 - 2x - 1 = 0$ a comme solutions $x = r$ et $x = s$, ce qui signifie que $r + s = 2$ et que $rs = -1$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}(2r + s) + (r + 2s) &= 3r + 3s = 3(r + s) = 3 \cdot 2 = 6 \\ (2r + s)(r + 2s) &= 2r^2 + 5rs + 2s^2 \\ &= 2r^2 + 4rs + 2s^2 + rs \\ &= 2(r^2 + 2rs + s^2) + rs \\ &= 2(r + s)^2 + rs \\ &= 2 \cdot 2^2 + (-1) = 7\end{aligned}$$

Par conséquent, une équation quadratique ayant comme solutions $x = 2r + s$ et $x = r + 2s$ est $x^2 - 6x + 7 = 0$.
Donc, $b = -6$ et $c = 7$.

(b) *Solution 1*
Supposons que le polynôme $f(x) = x^2 + mx + p$ admet deux racines réelles positives et distinctes $x = r$ et $x = s$.
Cela signifie que $r + s = -m$ et $rs = p$, tel que démontré dans la Solution 2, partie (a).
Dans ce cas, $m^2 - 2p = (-m)^2 - 2p = (r + s)^2 - 2rs = r^2 + 2rs + s^2 - 2rs = r^2 + s^2$ et $p^2 = (rs)^2 = r^2s^2$.
Ainsi, nous pouvons réécrire $g(x)$ comme $g(x) = x^2 - (r^2 + s^2)x + r^2s^2$, qui se factorise comme $g(x) = (x - r^2)(x - s^2)$. (Voyez-vous comment ceci peut être démontré en considérant la somme et le produit des racines ?)
Puisque $g(x) = (x - r^2)(x - s^2)$, le polynôme $g(x)$ admet r^2 et s^2 comme racines.
Nous rappelons que les nombres r et s sont positifs et distincts.
Comme aucun des deux n'est égal à 0, chacun de r^2 et s^2 sont positifs.
Puisque $r \neq \pm s$, il vient que r^2 et s^2 sont distincts.
Par conséquent, le polynôme $g(x)$ admet deux racines réelles positives et distinctes.

Solution 2
Nous procédons en utilisant la somme et le produit des racines tel que démontré dans la Solution 2, partie (a).
Supposons que les racines de $f(x) = x^2 + mx + p$ sont $x = r$ et $x = s$.
Puisque r et s sont positifs, alors $r + s > 0$ et $rs > 0$.
Comme $r + s = -m$, alors $m < 0$. Comme $rs = p$, alors $p > 0$.
Comme $f(x)$ admet deux racines réelles positives et distinctes, son discriminant est positif.
En particulier, $m^2 - 4p > 0$.

De son côté, le discriminant de $g(x) = x^2 - (m^2 - 2p)x + p^2$ est

$$\begin{aligned}\Delta &= (m^2 - 2p)^2 - 4(1)(p^2)\\ &= m^4 - 4m^2p + 4p^2 - 4p^2\\ &= m^4 - 4m^2p\\ &= m^2(m^2 - 4p).\end{aligned}$$

Vu que $m^2 > 0$ (car $m < 0$) et que $m^2 - 4p > 0$, nous avons $\Delta = m^2(m^2 - 4p) > 0$.
Ceci signifie que $g(x)$ admet deux racines réelles distinctes.
Ensuite, la somme des deux racines (réelles) de $g(x)$ est $m^2 - 2p$ et leur produit est p^2.
Nous notons que $m^2 - 2p = (m^2 - 4p) + 2p$ est positif, en tant que la somme de deux nombres réels positifs.
En outre, p^2 est (strictement) positif puisque $p > 0$.
Comme le produit des racines de $g(x)$ est positif, ses racines sont soit toutes les deux positives, ou toutes les deux négatives.
Cependant, la somme des racines de $g(x)$ étant positive, ses racines ne peuvent pas être toutes les deux négatives ; nous concluons alors qu'elles sont toutes les deux positives.
Au final, $g(x)$ admet deux racines réelles positives et distinctes, tel que demandé.

(c) *Solution 1*

Supposons qu'une équation cubique $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ admet trois racines $x = r$, $x = s$ et $x = t$.
Comme nous l'avons vu en (a), cela signifie que

$$\begin{aligned}x^3 + Ax^2 + Bx + C &= (x - r)(x - s)(x - t)\\ &= (x^2 - (r + s)x + rs)(x - t)\\ &= x^3 - (r + s)x^2 + rsx - tx^2 + (rt + st)x - rst\\ &= x^3 - (r + s + t)x^2 + (rs + rt + st)x - rst\end{aligned}$$

d'où $A = -(r + s + t)$, $B = rs + rt + st$ et $C = -rst$.
Réciproquement, si $A = -(r+s+t)$, $B = rs+rt+st$ et $C = -rst$, alors $x^3+Ax+Bx+C = 0$ est une équation cubique ayant comme racines r, s et t.

Considérons le polynôme $f_1(x) = x^3 + A_1x^2 + B_1x + C_1 = x^3 - 6x^2 + 10x - 5$.
Alors $f_1(1) = 1 - 6 + 10 - 5 = 0$, d'où $x = 1$ est une racine.
En factorisant, nous obtenons

$$f_1(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 5).$$

Par la formule quadratique, les racines de $x^2 - 5x + 5 = 0$ sont

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(5)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Nous remarquons que $\dfrac{5 + \sqrt{5}}{2} \approx 3.62$ et que $\dfrac{5 - \sqrt{5}}{2} \approx 1.38$.
Ainsi, le polynôme $f_1(x)$ admet trois racines réelles distinctes et positives.

Supposons que pour un entier positif $n \geq 2$ nous ayons

$$\begin{aligned}A_{n-1} &= -(r + s + t)\\ B_{n-1} &= rs + rt + st\\ C_{n-1} &= -rst\end{aligned}$$

où r, s et t sont trois nombres réels distincts et positifs.
Alors,

$$\begin{aligned}
A_n &= 2B_{n-1} - (A_{n-1})^2 \\
&= 2(rs + rt + st) - (-(r + s + t))^2 \\
&= 2(rs + rt + st) - (r + s + t)^2 \\
&= 2rs + 2rt + 2st - (r^2 + s^2 + t^2 + 2rs + 2rt + 2st) \\
&= -(r^2 + s^2 + t^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n &= (B_{n-1})^2 - 2A_{n-1}C_{n-1} \\
&= (rs + rt + st)^2 - 2(-(r + s + t))(-rst) \\
&= r^2s^2 + r^2t^2 + s^2t^2 + 2r^2st + 2rs^2t + 2rst^2 - (2r^2st + 2rs^2t + 2rst^2) \\
&= r^2s^2 + r^2t^2 + s^2t^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_n &= -(C_{n-1})^2 \\
&= -(-rst)^2 \\
&= -r^2s^2t^2
\end{aligned}$$

Considérons le polynôme

$$f_n(x) = x^3 + A_nx^2 + B_nx + C_n = x^3 - (r^2 + s^2 + t^2)x^2 + (r^2s^2 + r^2t^2 + s^2t^2)x - r^2s^2t^2.$$

Ce polynôme admet comme racines $x = r^2$, $x = s^2$ et $x = t^2$ puisque ses coefficients correspondent aux combinaisons appropriées de ces racines.
Par conséquent, les racines de $f_n(x)$ sont les carrés des racines de $f_{n-1}(x)$.
Nous rappelons que $f_1(x)$ possède trois racines réelles positives et distinctes.
Comme les racines de $f_2(x)$ sont les carrés des racines de $f_1(x)$, elles sont toutes réelles, positives et distinctes.
En continuant de la sorte, nous voyons que les racines de $f_3(x)$, $f_4(x)$, ..., $f_{100}(x)$ vont toutes être les carrés des racines du polynôme précédent, et donc seront toutes réelles, positives et distinctes.
En particulier, le polynôme $f_{100}(x)$ admet trois racines réelles positives et distinctes.

Solution 2
De par la Solution 1, nous savons que le polynôme $f_1(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 5$ possède trois racines réelles distinctes et positives, et que l'une d'entre elles est égale à 1.
Supposons que A, B et C sont des nombres entiers, et que le polynôme $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ est tel qu'il admet trois racines réelles distinctes et positives dont une est égale à 1.
Soit le polynôme $h(x) = x^3 + (2B - A^2)x^2 + (B^2 - 2AC)x - C^2$.
Remarquons que les coefficients de $h(x)$ sont des nombres entiers car A, B et C le sont.
Nous montrons que $h(x)$ admet trois racines réelles distinctes et positives, et que l'une d'entre elles est égale à 1.

Puisque $f(x)$ admet $x = 1$ comme racine, il vient que $f(1) = 1 + A + B + C = 0$, d'où nous tirons $B = -1 - A - C$.
Après avoir factorisé $x - 1$ de $f(x)$, nous obtenons

$$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C = (x - 1)(x^2 + (A + 1)x - C).$$

Pour déterminer le facteur quadratique dans l'équation précédente, nous avons écrit $f(x) = (x-1)(x^2+px+q)$, puis nous avons distribué les termes afin d'obtenir $x^3+Ax^2+Bx+C = x^3+(p-1)x^2+(q-p)x-q$. Nous avons ensuite comparé les coefficients et trouvé $C = -q$ (donnant $q = -C$) et $p - 1 = A$ (donnant $p = A + 1$).
Nous remarquons qu'en comparant les coefficients de x nous trouvons $q - p = B$ ou $-C - A - 1 = B$, ce qui est cohérent avec la relation ci-haut.
Puisque $f(x)$ admet trois racines réelles distinctes et positives dont une est égale à 1, l'expression quadratique $x^2+(A+1)x-C$ possède deux racines réelles distinctes et positives toutes deux différentes de 1.
Cela signifie que $1 + (A + 1) - C \neq 0$ et donc $C \neq A + 2$, un fait dont nous ferons usage plus tard.
En outre, nous pouvons déduire les faits suivants au sujet de cette expression quadratique :

- Le produit de ses racines est positif, c'est-à-dire que $-C > 0$ ou $C < 0$.
- La somme de ses racines est positive, c'est-à-dire que $-A - 1 > 0$ ou $A < -1$.
- Son discriminant est positif, c'est-à-dire que $(A + 1)^2 + 4C > 0$.

Pour résumer, nous savons jusqu'à présent que $B = -1 - A - C$, que $C < 0$, que $A < -1$, et que $(A + 1)^2 + 4C > 0$.

Examinons maintenant $h(x) = x^3 + (2B - A^2)x^2 + (B^2 - 2AC)x - C^2$.
Nous commençons par montrer que $x = 1$ est une racine de $h(x)$ en montrant que $h(1) = 0$.
Nous avons que

$$\begin{aligned}
h(1) &= 1 + (2B - A^2) + (B^2 - 2AC) - C^2 \\
&= B^2 + 2B + 1 - (A^2 + 2AC + C^2) \\
&= (B + 1)^2 - (A + C)^2 \\
&= (B + 1 + A + C)(B + 1 - A - C).
\end{aligned}$$

Nous rappelons que $B = -1 - A - C$ ou $1 + A + B + C = 0$ et donc $h(1) = 0$, d'où $x = 1$ est une racine de $h(x)$.
En factorisant $h(x)$ de façon similaire à comment nous avions traité $f(x)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
h(x) &= x^3 + (2B - A^2)x^2 + (B^2 - 2AC)x - C^2 \\
&= (x - 1)(x^2 + (2B - A^2 + 1)x + C^2) \\
&= (x - 1)(x^2 + (-2 - 2A - 2C - A^2 + 1)x + C^2) \\
&= (x - 1)(x^2 - (A^2 + 2A + 2C + 1)x + C^2).
\end{aligned}$$

Nous devons à présent montrer que le polynôme quadratique $q(x) = x^2 - (A^2 + 2A + 2C + 1)x + C^2$ admet deux racines réelles distinctes et positives, et qu'aucune d'entre elles n'est égale à 1.
Nous commençons par montrer que les racines de $q(x)$ sont réelles et distinctes en examinant le discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= (A^2 + 2A + 2C + 1)^2 - 4C^2 \\
&= (A^2 + 2A + 2C + 1 + 2C)(A^2 + 2A + 2C + 1 - 2C) \\
&= ((A + 1)^2 + 4C)(A + 1)^2.
\end{aligned}$$

Le premier facteur est positif car $(A+1)^2+4C$ est positif ; le second facteur est positif car $(A + 1)^2$ est positif étant donné que $A \neq -1$.
Par conséquent, $\Delta > 0$, ce qui signifie que $q(x)$ possède deux racines réelles distinctes.

Afin de montrer que $q(x)$ n'admet pas 1 comme racine, nous supposons que $q(1) = 0$ et nous obtenons une contradiction :

$$\begin{aligned} q(1) &= 0 \\ 1 - A^2 - 2A - 2C - 1 + C^2 &= 0 \\ C^2 - 2C + 1 - A^2 - 2A - 1 + &= 0 \\ (C-1)^2 - (A+1)^2 &= 0 \\ (C - 1 + A + 1)(C - 1 - A - 1) &= 0 \\ (C + A)(C - A - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Parce que $C < 0$ et $A < 0$, il vient que $C + A \neq 0$. De plus, nous avons vu plus haut que $C \neq A + 2$. Mis ensemble, cela signifie que $q(1) \neq 0$.
De cela, nous trouvons que $h(x)$ a trois racines réelles distinctes.
Pour terminer, nous devons montrer que les racines de $q(x)$ sont positives.
Comme $q(x) = x^2 - (A^2 + 2A + 2C + 1)x + C^2$, le produit des deux racines réelles de $q(x)$ est C^2, et la somme des deux racines est $A^2 + 2A + 2C + 1$.
Puisque le produit est C^2 et que $C < 0$, nous avons que le produit est positif. Cela signifie que les racines sont ou bien toutes les deux positives, ou bien toutes les deux négatives.
Comme la somme des racines est

$$A^2 + 2A + 2C + 1 = ((A + 1)^2 + 4C) + (-2C)$$

et que chacun de ces termes est positif, la somme des racines est positive. En conséquence, les racines ne peuvent pas être toutes les deux négatives. Donc, elles sont toutes les deux positives.
Pour ces raisons, $h(x)$ possède trois racines réelles distinctes et positives, et l'une d'entre elles vaut 1.

Nous venons de montrer que si $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ admet trois racines réelles distinctes et positives dont une est égale à 1, alors $h(x) = x^3 + (2B - A^2)x^2 + (B^2 - 2AC)x - C^2$ admet aussi trois racines réelles distinctes et positives dont une est égale à 1.
Passer de $f(x)$ à $h(x)$ correspont précisément à la manière par laquelle nous pouvons passer de $f_{n-1}(x)$ à $f_n(x)$ pour tout entier positif $n \geq 2$.
Par conséquent, comme $f_1(x)$ a trois racines réelles distinctes et positives dont une est égale à 1, il vient que $f_2(x)$ possède aussi cette propriété, d'où nous tirons que $f_3(x)$ possède cette propriété, et ainsi de suite.
En continuant ainsi, nous voyons que $f_{100}(x)$ admet trois racines réelles distinctes et positives.

3. (a) Nous remarquons que $PB = PD = 53$ et que $BC = 28$.
Par le théorème de Pythagore appliqué à $\triangle BCP$, nous trouvons que

$$PC^2 = PB^2 - BC^2 = 53^2 - 28^2 = (53 + 28)(53 - 28) = 81 \cdot 25 = 9^2 \cdot 5^2.$$

Puisque $PC > 0$, alors $PC = 9 \cdot 5 = 45$.
Comme $ABCD$ est un rectangle, nous avons $AB = DC = PD + PC = 53 + 45 = 98$.

(b) Supposons quet $BC = m$ est un nombre entier, et que $PD = x$.
Nous remarquons que $PB = PD = x$.
De plus, comme $DC = AB = 101$ alors $PC = DC - PD = 101 - x$.

Le théorème de Pythagore appliqué à $\triangle PBC$ nous permet d'obtenir les équations suivantes, toutes équivalentes :

$$\begin{aligned} PB^2 &= PC^2 + BC^2 \\ x^2 &= (101 - x)^2 + m^2 \\ x^2 &= x^2 - 202x + 101^2 + m^2 \\ 202x &= 101^2 + m^2 \\ x &= \frac{101^2 + m^2}{2 \cdot 101} \end{aligned}$$

Ainsi, pour que x soit entier, le numérateur doit être un multiple de 101.
Comme 101^2 est un multiple de 101, le second terme m^2 doit lui aussi être multiple de 101.
Pour que cela arrive, il faut que m soit multiple de 101 puisque 101 est un nombre premier.
Toutefois, cela est impossible car $m = BC < AB = 101$ et tout multiple positif non nul de 101 doit nécessairement être au moins égal à 101.
Par conséquent, le nombre entier m ne peut pas être un multiple de 101. De cela nous concluons que x, la longueur de PD, ne peut pas non plus être entière.

(c) Supposons que $AB = n$, $BC = m$ et $PD = x$, où m, n et x sont des nombres entiers vérifiant $m < n$ et $x < n$.
Par construction, nous avons $PB = x$, $PC = n - x$ et $BC = m$.
En applicant le théorème de Pythagore à $\triangle PBC$, nous obtenons les équations suivantes, toutes équivalentes :

$$\begin{aligned} PB^2 &= PC^2 + BC^2 \\ x^2 &= (n - x)^2 + m^2 \\ x^2 &= x^2 - 2nx + n^2 + m^2 \\ 2nx &= n^2 + m^2 \\ x &= \frac{n^2 + m^2}{2n} \end{aligned}$$

Nous avons à déterminer l'ensemble des entiers positifs m vérifiant $1 \leq m \leq 100$ et pour lesquels il existe 7 entiers positifs n tels que $x = \dfrac{n^2 + m^2}{2n}$ est un nombre entier.
Nous remarquons que, comme le dénominateur de cette fraction (c'est-à-dire $2n$) est pair, si nous désirons que x soit un nombre entier, alors il est nécessaire que le numérateur de cette fraction (c'est-à-dire $n^2 + m^2$) soit lui aussi un nombre pair.
Dans ce cas, puisque $n^2 + m^2$ doit être pair, alors n et m doivent être tous les deux pairs ou tous les deux impairs.
Nous divisons notre travail en deux cas : quand m est impair, et quand m est pair.

<u>Premier cas : m est impair</u>
Puisque m est impair, alors n est impair.
Nous pouvons réécrire $x = \dfrac{n^2 + m^2}{2n} = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{m^2}{n}$.
Comme $\dfrac{n}{2}$ est un entier impair partagé en deux, pour que x soit entier il faut que $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{m^2}{n}$ soit aussi un entier impair partagé en deux ; en d'autres termes, $\dfrac{m^2}{n}$ doit être un nombre impair.
Nous rappelons que $n > m$. Ainsi, nous voulons déterminer l'ensemble des nombres impairs

m vérifiant $1 \leq m \leq 100$ et pour lesquels m^2 admet exactement 7 facteurs n tels que $m < n \leq m^2$.
Nous remarquons que chaque facteur n de m^2 tel que $m < n \leq m^2$ correspont à un facteur q de m^2 avec $1 \leq q < m$. Cette correspondance est réalisée à partir de la factorisation $qn = m^2$, ou en autres termes $q = \dfrac{m^2}{n}$. Donc, de $m < n \leq m^2$ nous avons $\dfrac{m^2}{m^2} \leq q < \dfrac{m^2}{m}$.
En outre, m^2 admet le facteur supplémentaire m.
Par conséquent, nous avons à déterminer l'ensemble des nombres impairs m avec $1 \leq m \leq 100$ pour lesquels m^2 admet exactement $2 \cdot 7 + 1 = 15$ facteurs positifs.
Si m avait trois facteurs premiers distincts p_1, p_2, p_3, alors m^2 serait un multiple du produit $p_1^2p_2^2p_3^2$. Cela impliquerait que m^2 possède au moins $(2+1)(2+1)(2+1) = 27$ facteurs positifs, ce qui est impossible.
Donc, m peut avoir tout au plus deux facteurs premiers distincts.
Supposons que $m = p_1^a$ pour p_1 un nombre premier et pour a un entier positif.
Alors $m^2 = p_1^{2a}$ et m^2 admet $2a + 1$ facteurs positifs.
Comme m^2 a 15 facteurs positifs, nous avons $2a + 1 = 15$, d'où $a = 7$ et donc $m = p_1^7$.
Cependant, la plus petite puissance septième parfaite qui est en outre impaire est $3^7 > 100$; c'est pourquoi il n'y a aucun m dans ce sous-cas.
Supposons que $m = p_1^ap_2^b$ pour deux nombres premiers $p_1 \neq p_2$ et pour deux entiers positifs a et b.
Ainsi, $m^2 = p_1^{2a}p_2^{2b}$ et donc m^2 admet $(2a + 1)(2b + 1)$ facteurs.
Puisque $2a + 1 \geq 3$, que $2b + 1 \geq 3$ et que $(2a + 1)(2b + 1) = 15$, un nombre parmi $2a + 1$ et $2b + 1$ est égal à 5 tandis que l'autre est égal à 3, c'est-à-dire qu'un nombre parmi a et b est égal à 2 tandis que l'autre est égal à 1.
Par conséquent, nous avons $m = p_1^2p_2$, où p_1 et p_2 sont des nombres premiers impairs.
Si $p_1 = 3$, alors, puisque $m = 9p_2$ et que $1 \leq m \leq 100$, il est possible d'avoir ou bien $m = 45$ (lorsque $p_2 = 5$), ou bien $m = 63$ (lorsque $p_2 = 7$), ou bien finalement $m = 99$ (lorsque $p_2 = 11$).
Si $p_1 = 5$, alors, puisque $m = 25p_2$ et que $1 \leq m \leq 100$, il n'est possible que d'avoir $m = 75$ (lorsque $p_2 = 3$).
Si $p_1 \geq 7$, alors il n'y a aucun nombre premier impair p_2 vérifiant $m \leq 100$.
Par conséquent, dans le cas où m est impair, les valeurs possibles pour m sont $m = 45, 63, 75, 99$.

Deuxième cas : m est pair
Puisque m est pair, alors n est pair.
Soient $m = 2M$ et $n = 2N$, où M et N sont des entiers positifs.
Comme $1 \leq 2M \leq 100$, alors $0{,}5 \leq M \leq 50$ et donc $1 \leq M \leq 50$.
Nous pouvons réécrire $x = \dfrac{4N^2 + 4M^2}{4N} = N + \dfrac{M^2}{N}$.
Comme N est un entier et que nous souhaitons que x le soit aussi, il faut que $\dfrac{M^2}{N}$ soit aussi un nombre entier.
Comme $n > m$, alors $N > M$. Cela signifie que nous avons à déterminer l'ensemble des entiers M vérifiant $1 \leq M \leq 50$ et tels que M^2 admette exactement 7 facteurs N avec $M < N \leq M^2$.
Comme ci-haut, cela revient à déterminer l'ensemble des entiers M vérifiant $1 \leq M \leq 50$ et tels que M^2 admette exactement 15 facteurs positifs.
De nouveau comme ci-haut, le nombre M doit être de la forme $p_1^2p_2$ où p_1 et p_2 sont des nombres premiers. Cependant, cette fois-ci, M n'est pas contraigné à être impair.

Si $p_1 = 2$, alors, puisque $M = 4p_2$ et que $1 \leq M \leq 50$, il est possible d'avoir ou bien $M = 12$ (lorsque $p_2 = 3$), ou bien $M = 20$ (lorsque $p_2 = 5$), ou bien $M = 28$ (lorsque $p_2 = 7$), ou bien finalement $M = 44$ (lorsque $p_2 = 11$).
Si $p_1 = 3$, alors, puisque $M = 9p_2$ et que $1 \leq M \leq 50$, il est possible d'avoir $M = 18$ (lorsque $p_2 = 2$) ou $M = 45$ (lorsque $p_2 = 5$).
Si $p_1 = 5$, alors, puisque $M = 25p_2$ et que $1 \leq M \leq 50$, il n'est possible que d'avoir $M = 50$ (lorsque $p_2 = 2$).
Comme $m = 2M$, les valeurs possibles de m dans ce cas sont $m = 24, 40, 56, 88, 36, 90, 100$.

En combinant les deux cas, les valeurs de m sont $m = 24, 36, 40, 45, 56, 63, 75, 88, 90, 99, 100$.