Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire 2024

le mercredi 13 novembre 2024

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 14 novembre 2024

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. *Solution 1*

   Comme le récipient a la forme d'un cube, la base est un carré de 4 cm de côté, quelle que soit la face en contact avec la table.

   Dans le récipient, l'espace occupé par l'eau est un prisme rectangulaire. La base de ce prisme rectangulaire correspond à la base du récipient, et la hauteur du prisme correspond à la profondeur de l'eau.
   Le volume occupé par l'eau est donc de $(4\,\text{cm}) \times (4\,\text{cm}) \times (2\,\text{cm}) = 32\ \text{cm}^3$.

   Solution 2

   Comme le récipient a la forme d'un cube, la base est un carré de 4 cm de côté, quelle que soit la face en contact avec la table.

   Comme la profondeur de l'eau est égale à la moitié de la hauteur du cube, le volume de l'eau est égal à la moitié du volume du cube.

   Comme le volume du cube est de $(4\,\text{cm}) \times (4\,\text{cm}) \times (4\,\text{cm}) = 64\ \text{cm}^3$, le volume de l'eau est de $\dfrac{64}{2}\,\text{cm}^3 = 32\,\text{cm}^3$.

   Réponse : 32

2. *Solution 1*

   Soit N le nombre d'élèves interrogés.

   Le diagramme circulaire montre que le nombre d'élèves qui préfèrent le vert est de $0{,}35N$ et que le nombre d'élèves qui préfèrent le bleu est de $0{,}45N$. Comme tous les autres élèves ont choisi le rouge, le nombre d'élèves qui préfèrent le rouge est de $N - 0{,}35N - 0{,}45N = 0{,}2N$.

   Le diagramme à bandes montre que 8 élèves préfèrent le rouge. Par conséquent, on sait que $0{,}2N = 8$.

   Pour isoler N, on divise les deux membres de l'équation par 0,2, ce qui donne $N = \dfrac{8}{0{,}2} = 40$.

   Solution 2

   Le diagramme circulaire montre que le nombre d'élèves qui préfèrent le vert est de $0{,}35N$ et que le nombre d'élèves qui préfèrent le bleu est de $0{,}45N$.

   Tous les autres élèves ont choisi le rouge. Alors, le pourcentage des élèves qui préfèrent le rouge est nécessairement, $100\,\% - 35\,\% - 45\,\% = 20\,\%$.

   Autrement dit : $\dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$ des élèves préfèrent le rouge.

   Le diagramme à bandes indique que 8 élèves préfèrent le rouge.

   Par conséquent, les 8 élèves qui préfèrent le rouge représentent un cinquième des élèves interrogés, et le nombre total d'élèves interrogés est $8 \times 5 = 40$.

   Réponse : 40

3. Tous les angles intérieurs d'un triangle équilatéral mesurent $60°$, donc $\angle CDB = 60°$.
   Tous les angles intérieurs d'un carré mesurent $90°$, donc $\angle BDE = 90°$.
   Ainsi, $\angle CDE = \angle CDB + \angle BDE = 60° + 90° = 150°$.
   Comme $\triangle BCD$ est équilatéral, $CD = BD$.
   Comme $ABDE$ est un carré, $ED = BD$.
   Par conséquent, $ED = BD = CD$.
   Comme $CD = ED$, $\triangle CDE$ est isocèle et $\angle CED = \angle ECD$.
   La somme des angles intérieurs d'un triangle est de $180°$.
   Par conséquent $180° = \angle CDE + \angle ECD + \angle CED$.
   Si on substitue $\angle ECD$ à $\angle CED$ et $150°$ à $\angle CDE$, on obtient $180° = 150° + \angle ECD + \angle ECD$.
   Après réduction, on obtient $30° = 2\angle ECD$ ou $\angle ECD = 15°$.
   Comme $\triangle BCD$ est équilatéral, on sait que $60° = \angle BCD = \angle ECB + \angle ECD$ et, ainsi,

$$\angle ECB = 60° - \angle ECD = 60° - 15° = 45°$$

Réponse : $45°$

4. Soit $a = 21$ et $b = 44$.
   Alors $2a = 2 \times 21 = 42$, ce qui est inférieur à $b = 44$. Donc $2a < b$.
   De même, $\frac{a}{4} + \frac{b}{2} = \frac{21}{4} + \frac{44}{2} = 5{,}25 + 22 = 27{,}25$, ce qui est supérieur à 27 et inférieur à 28.
   Nous avons démontré que, lorsque $a = 21$, il est possible de choisir une valeur de b qui satisfait les conditions.
   Maintenant, si $a \geq 22$, alors $2a \geq 2 \times 22$ ou $2a \geq 44$.
   Si on maintient que $b > 2a$, alors on obtient $b > 44$.
   Comme b est un entier positif et $b > 44$, alors $b \geq 45$ est vrai.
   Ainsi, si on pose que $a \geq 22$, il faut que $b \geq 45$.
   Si on substitue dans l'équation $a \geq 22$ et $b \geq 45$, on obtient

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{2} \geq \frac{22}{4} + \frac{45}{2} = 5{,}5 + 22{,}5 = 28$$

   Autrement dit, la valeur minimum de $\frac{a}{4} + \frac{b}{2}$ est 28.
   L'énoncé indique que $\frac{a}{4} + \frac{b}{2}$ est inférieur à 28.
   Par conséquent, lorsque $a \geq 22$, il n'est pas possible de choisir une valeur de b telle que toutes les conditions sont satisfaites.
   Par conséquent, la plus grande valeur possible de a est 21.
   Remarque : Pour voir comment on peut en arriver à une valeur de 21, observons que $\frac{a}{4} + \frac{b}{2} = \frac{a}{4} + \frac{2b}{4} = \frac{a+2b}{4}$, et qu'alors $\frac{a+2b}{4} < 28$.
   En multipliant par 4 les deux membres de l'inéquation, on obtient $a + 2b < 4 \times 28$ ou $a + 2b < 112$.
   Dans l'inéquation $2a < b$, on peut multiplier les deux membres par 2 pour obtenir $4a < 2b$.
   Si on additionne a aux deux membres de l'inéquation, on obtient $a+4a < a+2b$ ou $5a < a+2b$.
   En combinant $5a < a + 2b$ et $a + 2b < 112$, on obtient $5a < 112$ ou $a < \frac{112}{5} = 22{,}4$.
   En substituant à a des valeurs décroissantes à partir de 22, on trouve que la plus grande valeur possible de a est 21.

Réponse : 21

5. On nomme d'abord les colonnes de C1 à C7, de gauche à droite.
   L'entier qui figure dans toutes les rangées de la colonne C1 est 5.
   Pour la colonne C2 :
   - L'entier qui figure dans la première rangée est 5.
   - L'entier qui figure dans la deuxième rangée est 6.
   - L'entier qui figure dans la troisième rangée est 7.

   Et ainsi de suite pour les autres rangées : chaque entier est égal à de 1 de plus que l'entier de la rangée précédente. Ainsi, l'entier qui figure dans la n^e rangée de la colonne C2 est $n + 4$.

   Les deux premiers entiers de la n^e rangée sont donc 5 et $n + 4$.
   Les autres valeurs de la n^e rangée peuvent être déterminées en se servant du troisième élément de l'énoncé du problème.
   - Le troisième entier de la n^e rangée est $5 + (n + 4) = n + 9$.
   - Le quatrième entier de la n^e rangée est $(n + 4) + (n + 9) = 2n + 13$.
   - Le cinquième entier de la n^e rangée est $(n + 9) + (2n + 13) = 3n + 22$.
   - Le sixième entier de la n^e rangée est $(2n + 13) + (3n + 22) = 5n + 35$.
   - Le septième entier de la n^e rangée est $(3n + 22) + (5n + 35) = 8n + 57$.

   En résumé, les entiers de la n^e rangée sont, de gauche à droite :

$$5, \quad n + 4, \quad n + 9, \quad 2n + 13, \quad 3n + 22, \quad 5n + 35, \quad 8n + 57$$

   On cherche le nombre entier à deux chiffres qui figure dans exactement cinq des cellules du tableau.
   Comme C1 ne contient aucun entier à deux chiffres, on n'en tient pas compte.
   De C2 à C7, la valeur des entiers augmente au fil des rangées, alors aucune colonne ne contient plusieurs fois le même entier. On cherche donc des entiers à deux chiffres qui figurent dans exactement cinq des colonnes du tableau.

   Les entiers de la colonne C2 sont $n + 4$, où n va de 1 à 95. Les entiers de cette colonne vont donc de 5 à 99.
   Les entiers de la colonne C3 sont $n + 9$, où n va de 1 à 95. Les entiers de cette colonne vont donc de 10 à 104.
   Les colonnes C2 et C3 contiennent donc *tous les* entiers à deux chiffres.

   On cherche donc, en fait, les entiers à deux chiffres qui sont dans exactement 3 des colonnes C4, C5, C6 et C7.

   Les entiers de la colonne C7 sont de la forme $8n + 57$, soit
   $8(1) + 57 = 65$
   $8(2) + 57 = 73$
   $8(3) + 57 = 81$
   $8(4) + 57 = 89$
   $8(5) + 57 = 97$
   Tous les autres entiers de la colonne C7 comptent au moins trois chiffres.
   Les seuls entiers à deux chiffres de la colonne C7 sont donc 65, 73, 81, 89 et 97.

   On examinera deux possibilités : les entiers qui ne sont pas dans la colonne C7 mais qui figurent dans les colonnes C4, C5 et C6, et les entiers qui figurent dans la colonne C7 et dans exactement deux colonnes parmi les colonnes C4, C5 et C6.

Entiers à deux chiffres qui figurent dans C4, C5 et C6, mais pas dans C7
Soit un entier à deux chiffres x qui figure dans C4, C5 et C6, mais pas dans C7.
Les entiers de C6 sont de la forme $5n + 35$. Ce sont donc des multiples de 5 supérieurs à 35.
Les entiers de C4 sont de la forme $2n + 13$. Ce sont donc des entiers impairs supérieurs à 13.
On en conclut que x est un entier à deux chiffres qui est un multiple de 5 supérieur à 35.
Il s'agit donc de 45, 55, 65, 75, 85 ou 95.
Il faut vérifier lesquelles de ces valeurs de x figurent dans la colonne C5.

En général, pour déterminer si un entier x figure dans une colonne donnée, on peut formuler une équation où x est égal à l'expression qui représente les nombres de la colonne, puis isoler n. Si n est un entier positif de 1 à 95, alors x figure dans la n^{e} rangée de cette colonne. Sinon, x ne figure pas dans la colonne.

Par exemple, 55 figure dans C5 parce que si on pose que $55 = 3n + 22$, on obtient $n = 11$, ce qui signifie que 55 est dans la 11^{e} rangée de la colonne. Par contre, 45 ne figure pas dans C5 parce que si on pose que $45 = 3n+22$, on obtient $n = \frac{23}{3}$, qui n'est pas un entier (si 45 figurait dans C5, il serait dans la rangée $\frac{23}{3}$, ce qui n'a aucun sens).

Si on met en application les principes énoncés au paragraphe précédent, on isolera n dans l'équation $x = 3n + 22$ pour chaque valeur de x de la liste, soit 45, 55, 65, 75, 85, 95. Les valeurs de x qui figurent dans C4 sont celles pour lesquelles on trouve une valeur de n entière. Les valeurs de x de cette colonne correspondent à une valeur de n de $\frac{23}{3}$, 11, $\frac{43}{3}$, $\frac{53}{3}$, 21 et $\frac{73}{3}$, respectivement.
Seules les valeurs 55 et 85 sont associées à une valeur de n entière, par conséquent 55 et 85 sont les deux seuls entiers à deux chiffres qui figurent dans les colonnes C4, C5 et C6.

Ni 55 ni 85 ne figure dans C7. Ce sont donc les seuls nombres entiers à deux chiffres qui figurent dans les colonnes C4, C5 et C6, mais pas dnas la colonne C7.

Entiers à deux chiffres qui figurent dans C7 et exactement deux des colonnes C4, C5 et C6
On se sert du tableau ci-dessous pour vérifier si chacun des entiers à deux chiffres qui figurent dans la colonne C7 figurent également dans les colonnes C4, C5 ou C6.

x	Val. de n si $x = 2n + 13$	Dans C4?	Val. de n si $x = 3n + 22$	Dans C5?	Val. de n si $x = 5n + 35$	Dans C6?	Nb de col.
65	$n = 26$	OUI	$n = \frac{43}{3}$	NON	$n = 6$	OUI	2
73	$n = 30$	OUI	$n = 17$	OUI	$n = \frac{38}{5}$	NON	2
81	$n = 34$	OUI	$n = \frac{59}{3}$	NON	$n = \frac{46}{5}$	NON	1
89	$n = 38$	OUI	$n = \frac{67}{3}$	NON	$n = \frac{54}{5}$	NON	1
97	$n = 42$	OUI	$n = 25$	OUI	$n = \frac{62}{5}$	NON	2

Le tableau permet de déterminer que 65, 73 et 97 sont les seuls nombres entiers à deux chiffres qui figurent dans la colonne C7 et dans exactement deux des colonnes C4, C5 ou C6.

Ainsi, de tous les entiers à deux chiffres qui figurent dans la colonne C7, exactement trois figurent dans exactement cinq cellules du tableau de Lakshmi.
En combinant toutes les solutions trouvées, on trouve cinq entiers à deux chiffres qui figurent dans exactement cinq cellules du tableau : 55, 65, 73, 85 et 97.

Réponse : 5

6. *Solution 1*

On calculera la probabilité d'échec et on soustraira le résultat de 1.

Pour qu'il y ait *succès*, il faut qu'au moins un diamètre ait un multiple de 3 à une extrémité et un multiple de 2 à l'autre.

Pour qu'il y ait *échec*, il faut donc qu'aucun diamètre n'ait ces caractéristiques.

Dans les nombres de 1 à 8, il n'y a que deux multiples de 3 : 3 et 6.

Par conséquent, pour avoir un échec, il faut que 3 et 6 *ne soient pas* jumelés à un entier pair.

Si l'extrémité d'un diamètre est 3, l'autre extrémité doit être un entier impair différent de 3, donc 1, 5 ou 7.

De même, si l'extrémité d'un diamètre est 6, l'autre extrémité doit être un entier impair, mais différent de 3 (autrement un entier pair serait jumelé à 3).

Par conséquent, on a un échec exactement lorsque 3 et 6 sont les extrémités de deux diamètres différents et qu'ils sont jumelés à 1, 5 ou 7.

Calculons maintenant la probabilité que cela se produise.

Il y a 8 positions possibles pour l'entier 1.

Lorsque 1 est placé, il y a 7 positions possibles pour l'entier 2.

Lorsque 1 et 2 sont placés, il y a 6 positions possibles pour 3, puis 5 pour 4, et ainsi de suite jusqu'à 8, qui n'a qu'une position possible.

Il y a donc, en tout, $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ manières possibles de placer les entiers autour du cercle.

Ensuite, il faut déterminer le nombre de manières de placer les nombres de façon à ce que les entiers 3 et 6 soient tous les deux jumelés à 1, 5 ou 7.

Il y a 8 positions possibles pour l'entier 3.

Lorsque 3 est placé, il existe 3 options d'entiers pour l'autre extrémité du diamètre, soit $8 \times 3 = 24$ manières de jumeler 3 et l'autre entier.

Une fois que ces entiers sont placés, il reste 6 positions possibles pour le 6.

Comme 1, 5 ou 7 a déjà été utilisé, il reste 2 options d'entiers pour l'autre extrémité du diamètre dont une extrémité est 6.

Il existe donc $8 \times 3 \times 6 \times 2$ manières de choisir et de jumeler les entiers aux extrémités 3 et 6.

Les quatre entiers restants, quels qu'ils soient, peuvent être placés n'importe où : l'échec est assuré.

En appliquant le même raisonnement que précédemment, on peut déterminer qu'il existe $4 \times 3 \times 2 \times 1$ manières de placer les entiers qui restent.

Ainsi, la probabilité d'échec est

$$\frac{8 \times 3 \times 6 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{3 \times 2}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$$

et, donc, la probabilité de réussite est de $1 - \frac{6}{35} = \frac{29}{35}$.

Solution 2
Comme on l'a vu dans la solution 1, il existe $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40\,320$ manières de placer les nombres entiers autour du cercle. Nous allons calculer le nombre de manières de placer les entiers de façon à obtenir un succès, puis diviser ce nombre par $40\,320$.
Les seuls multiples de 3 sont 3 et 6. Alors pour obtenir un succès, il faut que l'un ou l'autre de ces nombres soit jumelé à un nombre pair.
Nous allons tenir compte de quatre situations.

3 et 6 sont jumelés (ce sont les extrémités du même diamètre)
Dans ce cas, 3 est jumelé à un entier pair, 6. Donc on a un succès quelle que soit la position des autres entiers.
Il existe 4 options pour lesquelles les extrémités d'un diamètre sont 3 ou 6 et 2 manière de placer 3 et 6, ce qui donne, au total, 8 manière de placer 3 ou 6 sur un diamètre.
Il y a $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ manières de placer les quatre entiers qui restent.
Donc, dans ce cas, il y a $8 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5760$ manières de placer les entiers.

Pour les trois autre cas, 3 et 6 ne sont pas jumelés l'un à l'autre.

3 et 6 sont jumelés à un entier pair
Il y a 8 option pour placer 3, et 6 pour placer 6 (parce qu'on ne peut pas le jumeler à 3 dans ce cas).
Les entiers pairs restants sont 2, 4 et 8. Il y a 3 possibilités de jumeler un entier pair à 3, après quoi il reste deux possibilités de jumeler un entier pair à 6.
Lorsque ces quatre entiers sont placés, il reste quatre options pour les entiers restants, qui peuvent être placés n'importe où. Il y a donc $4 \times 3 \times 2 \times 1$ manières de les placer.
Par conséquent, il existe $8 \times 6 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6912$ manières de placer les entiers dans ce cas.

3 est jumelé à un entier pair et 6 est jumelé à un entier impair
Comme dans le cas précédent, il y a 8×6 façons de placer 3 et 6.
Les entiers pairs restants sont 2, 4 et 8, et les entiers impairs restants sont 1, 5 et 7.
Il y a 3 options de jumelage pour le 3 et 3 options de jumelages pour 6.
Lorsque ces entiers sont placés, il reste $4 \times 3 \times 2 \times 1$ manières de placer les entiers restants.
Il y a donc $8 \times 6 \times 3 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 10\,368$ manières de placer les entiers dans ce cas.

3 est jumelé à un entier impair 6 est jumelé à un entier pair
Le calcul est le même que dans le cas précédent.
La probabilité de réussite est

$$\frac{5760 + 6912 + 2 \times 10\,368}{40\,320} = \frac{33\,408}{40\,320} = \frac{29}{35}$$

Réponse : $\frac{29}{35}$

Partie B

1. Remarque : dans cette solution, la « différence » entre deux nombres est le résultat de la soustraction du plus petit nombre du plus grand. Par exemple, la différence entre 3 et 5 est 2, parce que $5 - 3 = 2$.

   a) Les coordonnées de B sont $(6, 3)$. Comme AB est horizontal, A et B auront la même ordonnée (coordonnée en y). Comme BC est vertical, B et C auront la même abscisse (coordonnée en x).
   La longueur de AB correspond à la différence entre les abscisses de A et de B, soit $6-2 = 4$.
   La longueur de BC correspond à la différence entre les ordonnées de B et de C, soit $7 - 3 = 4$.
   L'aire du $\triangle ABC$ est $\frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$.

   b) La hauteur du triangle, de X à YZ, est égale à la différence entre l'ordonnée de X et l'ordonnée commune de X et Z, soit $10 - 4 = 6$.
   La longueur de YZ est égale à la différence entre l'abscisse de Y et celle de Z, soit $a - 3$.
   L'aire du $\triangle XYZ$ est $\frac{1}{2} \times YZ \times 6 = \frac{1}{2} \times (a - 3) \times 6 = 3(a - 3)$.
   On sait que l'aire est 24. Alors $24 = 3(a - 3)$, ou $8 = a - 3$. Si on isole a, on obtient $a = 8 + 3 = 11$.

   c) Le quadrilatère $PQRS$ peut être divisé en deux triangles : $\triangle RQS$ et $\triangle PQS$. Ces triangles ont pour base le segment QS et la somme de leurs aires correspond à l'aire du quadrilatère $PQRS$.
   La hauteur du $\triangle RQS$ est égale à la différence entre l'ordonnée de R et celle de Q et S, soit $c + 2 - c = 2$.
   La hauteur du $\triangle PQS$ est égale à la différence entre l'ordonnée de P et celle de Q et S, soit $c - 4$.
   La longueur de QS est égale à la différence entre l'abscisse de Q et celle de S, soit $2c-c = c$.
   L'aire du $\triangle RQS$ est égale à $\frac{1}{2} \times QS \times 2 = \frac{1}{2} \times c \times 2 = c$.
   L'aire du $\triangle PQS$ est égale à $\frac{1}{2} \times QS \times (c - 4) = \frac{1}{2}c(c - 4)$.
   L'aire du quadrilatère $PQRS$ est la somme des aires du $\triangle RQS$ et du $\triangle PQS$, soit

   $$c + \tfrac{1}{2}c(c - 4) = c + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{4}{2}c = \tfrac{1}{2}c^2 - c = \tfrac{1}{2}(c^2 - 2c) = \tfrac{1}{2}c(c - 2)$$

   On sait que l'aire du quadrilatère $PQRS$ est égale à 180.
   Alors $180 = \frac{1}{2}c(c - 2)$ ou $360 = c(c - 2)$.
   Comme c et, donc, $c - 2$ sont des entiers, on cherche deux entiers dont la différence est 2 et le produit est 360, comme $c = 20$ et $c - 2 = 18$ (dans ce cas, la réponse à la question est $c = 20$).
   Pour arriver à $c = 20$, on pourrait énumérer les paires de facteurs de 360 et déterminer les deux facteurs dont la différence est 2, soit $18 \times 20 = 360$.
   Une autre option serait de reformuler l'équation $360 = c(c-2)$: on aurait $c^2 -2c-360 = 0$, qu'on résoudrait en factorisant ou en utilisant la formule quadratique.

2. a) Pour parcourir 20 km à une vitesse de 12 km/h, il faut

$$\frac{20\,\text{km}}{12\,\text{km/h}} = \frac{20}{12}\,\text{h} = \frac{5}{3}\,\text{h}$$

Pour parcourir 10 km à une vitesse de 10 km/h, il faut 1 h.

Pour parcourir 30 km, il a fallu à Béatrice $\frac{5}{3}\,\text{h} + 1\,\text{h} = \frac{8}{3}\,\text{h}$.

b) Pour parcourir la première distance de x km en marchant, il a fallu à Carole $\frac{x\,\text{km}}{6\,\text{km/h}} = \frac{x}{6}\,\text{h}$.

Pour parcourir les derniers $(10 - x)$ km, il lui a fallu $\frac{(10-x)\,\text{km}}{4\,\text{km/h}} = \frac{10-x}{4}\,\text{h}$.

Il a fallu 2 heures et 18 minutes à Carole pour parcourir les $30km$, soit $2\frac{18}{60} = \frac{138}{60}$ h.

Ainsi, $\frac{138}{60} = \frac{x}{6} + \frac{10-x}{4}$.

Si on multiplie les deux membres de l'équation par 60 on obtient $138 = 10x + 15(10 - x)$ ou $138 = 10x + 150 - 15x$ et, en réduisant, $12 = 5x$ ou $x = \frac{12}{5}$.

c) Damien a fait un parcours à vélo.

Il a pédalé à une vitesse de 24 km/h pendant $\frac{a\,\text{km}}{24\,\text{km/h}} = \frac{a}{24}\,\text{h}$.

Ensuite, il a pédalé à une vitesse de 16 km/h pendant $\frac{b\,\text{km}}{16\,\text{km/h}} = \frac{b}{16}\,\text{h}$.

En tout, Damien a fait du vélo pendant 3 h, alors $\frac{a}{24} + \frac{b}{16} = 3$.

Si on multiplie les deux membres de l'équation par 48, on obtient $2a + 3b = 144$.

Pour résoudre le problème, il nous faut deux entiers positifs (a, b).

Comme $2a$ et 144 sont des nombres pairs, l'entier $3b$ est nécessairement pair, lui aussi.

Pour que $3b$ soit pair, il faut que b soit pair parce que 3 est impair. On cherche donc un entier n tel que $b = 2n$.

Si on substitue $2n$ à b dans $2a + 3b = 144$, on obtient $2a + 6n = 144$ ou $a + 3n = 72$.

Comme $3n$ et 72 sont des multiples de 3, a doit également être un multiple de 3.

Par conséquent, il existe un entier m tel que $a = 3m$.

Si on substitue $3m$ à a dans $a + 3n = 72$, on obtient $3m + 3n = 72$ ou $m + n = 24$.

Les couples d'entiers positifs (m, n) qui satisfont $m + n = 24$ sont $(1, 23)$, $(2, 22)$, $(3, 21)$ et ainsi de suite, jusqu'à $(23, 1)$, pour un total de 23 couples.

Comme $a = 3m$ et $b = 2n$, chaque couple (m, n) qui satisfait l'équation $m + n = 24$ correspond à exactement un couple (a, b) qui satisfait l'équation $2a+3b = 144$. Par exemple, $(m, n) = (1, 23)$ correspond à $(a, b) = (3, 46)$ et, effectivement $2(3) + 3(46) = 144$.

Comme 23 couples (m, n) satisfont $m + n = 24$, 23 couples (a, b) satisfont l'équation $2a + 3b = 144$.

d) Raisonnement similaire à celui de la partie précédente.
Arold a fait de la course pendant $\frac{r}{12}$ h, du jogging pendant $\frac{j}{8}$ h et de la marche pendant $\frac{w}{4}$ h.
Ainsi, on a $\frac{r}{12} + \frac{j}{8} + \frac{w}{4} = 5$.
Si on multiplie les deux membres de l'équation par 24, on obtient $2r + 3j + 6w = 120$.
Les inconnues de l'équation sont des entiers positifs.
Comme $3j$, $6w$ et 120 sont des multiples de 3, $2r$ est nécessairement un multiple de 3, ce qui signifie que r est également un multiple de 3 (le raisonnement est similaire à celui de la partie précédente).
Pour un entier positif k tel que $r = 3k$, on a $6k + 3j + 6w = 120$.
Si on divise les membres de l'équation par 3, on obtient $2k + j + 2w = 40$.
Comme $2k$, $2w$ et 40 sont des nombres pairs, j est nécessairement un nombre pair, et il existe un entier positif m tel que $j = 2m$.
Par substitution dans $2k + j + 2w = 40$, on obtient $2k + 2m + 2w = 40$ ou $k + m + w = 20$.
Comme chaque valeur de k correspond à exactement une valeur de r et que chaque valeur de m correspond à exactement une valeur de j, on peut dénombrer les triplets (r, j, w) en dénombrant les triplets (k, m, w) d'entiers positifs qui satisfont l'équation $k + m + w = 20$.
Disons que $k = 1$. Alors $1 + m + w = 20$, donc $m + w = 19$.
18 couples d'entiers positifs (m,w) rendent cette équation vraie : $(1, 18)$, $(2, 17)$, $(3, 16)$, et ainsi de suite, jusqu'à $(18, 1)$. Il existe donc 18 solutions lorsque $k = 1$.
Si $k = 2$, alors $m + w = 18$. Il existe 17 couples d'entiers positifs (m, w) pour lesquels $m + w = 18$: $(1, 17)$, $(2, 16)$, et ainsi de suite, jusqu'à $(17, 1)$. Il existe donc 17 solutions lorsque $k = 2$.
De même, il existe 16 solutions lorsque $k = 3$, 15 solutions lorsque $k = 4$, et ainsi de suite, jusqu'à 1 solution lorsque $k = 18$.
Lorsque $m = w = 1$, on a $k + 1 + 1 = 20$, alors $k = 18$. Ainsi, pour les valeurs minimales de m et w, k vaut 18. 18 est donc la plus grande valeur possible de k.
Par conséquent, le nombre de solutions entières positives est

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 18 = 171$$

3. a) La *somme à* 3 *signes* des entiers de 8 à 15 est $8 + 9 - 10 + 11 + 12 - 13 + 14 + 15 = 46$.

b) *Solution 1*
Soit une tranche de la suite 1, 2, 3, ..., $n - 1$, n. Si la tranche ne contient pas l'entier n, alors la tranche fait également partie de la liste courte 1, 2, 3, ..., $n - 1$.
De plus, chaque tranche de la suite 1, 2, 3, ..., $n - 1$ est également une tranche de la suite 1, 2, 3, ..., $n - 1$, n.
Ainsi, on peut déduire que les tranches de 1, 2, 3, ..., $n - 1$, n appartiennent à deux catégories : les tranches de 1, 2, 3, ..., $n - 1$, et les tranches qui contiennent l'entier n.
La grandeur de G_n peut être calculée en faisant la somme des *sommes à* 3 *signes* de toutes les tranches de la suite 1, 2, 3, ..., $n - 1$ plus les *sommes à* 3 *signes* de toutes les tranches qui contiennent n.
Autrement dit, G_n est égal à G_{n-1} plus les *sommes à* 3 *signes* de toutes les tranches qui appartiennent à la suite 1, 2, 3, ..., $n - 1$, n et qui contiennent n.
Sachant cela, on comprend que la grandeur de $G_n - G_{n-1}$ est exactement égale à la somme des *sommes à* 3 *signes* des tranches qui appartiennent à la suite 1, 2, 3, ..., n et qui contiennent n.

Par exemple, $G_6 - G_5$ est égal à

$$\begin{array}{r} 1+2-3+4+5-6\phantom{{}=43} \\ +2+3-4+5+6\phantom{{}=43} \\ +3+4-5+6\phantom{{}=43} \\ +4+5-6\phantom{{}=43} \\ +5+6\phantom{{}=43} \\ +6=43 \end{array}$$

et $G_5 - G_4$ est égal à

$$\begin{array}{r} 1+2-3+4+5\phantom{{}=31} \\ +2+3-4+5\phantom{{}=31} \\ +3+4-5\phantom{{}=31} \\ +4+5\phantom{{}=31} \\ +5=31 \end{array}$$

On constate que $G_6 - 2G_5 + G_4 = (G_6 - G_5) - (G_5 - G_4) = 43 - 31 = 12$.

À l'observation des sommes disposées en triangle, on voit que bien des termes s'annulent, et qu'il y aurait certainement un moyen plus simple d'exprimer cette différence de 12. Par exemple, les premières lignes des deux sommes disposées en triangle sont presque identiques (elles ne diffèrent que par le -6). Les deux secondes lignes également sont presque identiques (elles ne diffèrent que par le $+6$).
Pour généraliser, faisons appel à la notation $\langle u, v\rangle$ pour les *sommes à* 3 *signes* de la suite d'entiers de u à v, inclusivement. Par exemple, $\langle 3, 8\rangle = 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8$. Notons que $\langle u, u\rangle$ n'est que l'entier u (la *somme à* 3 *signes* d'une suite qui compte un seul entier).
Partant de cette notation et de l'expression ci-dessus, on voit que

$$G_6 - G_5 = \langle 1, 6\rangle + \langle 2, 6\rangle + \langle 3, 6\rangle + \langle 4, 6\rangle + \langle 5, 6\rangle + \langle 6, 6\rangle$$

et, en généralisant,

$$G_n - G_{n-1} = \langle 1, n\rangle + \langle 2, n\rangle + \langle 3, n\rangle + \cdots + \langle n-1, n\rangle + \langle n, n\rangle$$

Considérons maintenant les *sommes à* 3 *signes* $\langle 1, n\rangle$ et $\langle 1, n-1\rangle$.
Ces *sommes à* 3 *signes* ne diffèrent que par le signe ($\pm n$) à la fin de $\langle 1, n\rangle$.
Ainsi, $\langle 1, n\rangle - \langle 1, n-1\rangle$ est soit n, soit $-n$.
Plus généralement, si $k \leq n-1$, les *sommes à* 3 *signes* $\langle k, n\rangle$ et $\langle k, n-1\rangle$ ne diffèrent que par $\pm n$ à la fin de $\langle k, n\rangle$. Par conséquent $\langle k, n\rangle - \langle k, n-1\rangle$ est $\pm n$, et le signe dépend du nombre de termes de $\langle k, n\rangle$.
Plus précisément, $\langle k, n\rangle - \langle k, n-1\rangle$ est égal à $-n$ si le nombre de termes de la suite $\langle k, n\rangle$ est un multiple de 3, et à $+n$ sinon.
On peut se servir de cette notation pour trouver la valeur exacte de l'expression

$$G_{3n} - 2G_{3n-1} + G_{3n-2} = (G_{3n} - G_{3n-1}) - (G_{3n-1} - G_{3n-2})$$

Ainsi, si on applique la notation, on a

$$G_{3n} - G_{3n-1} = \langle 1, 3n\rangle + \langle 2, 3n\rangle + \langle 3, 3n\rangle + \cdots + \langle 3n-1, 3n\rangle + \langle 3n, 3n\rangle$$

et

$$G_{3n-1} - G_{3n-2} = \langle 1, 3n-1\rangle + \langle 2, 3n-1\rangle + \langle 3, 3n-1\rangle + \cdots + \langle 3n-2, 3n-1\rangle + \langle 3n-1, 3n-1\rangle$$

et on peut reformuler la différence $(G_{3n} - G_{3n-1}) - (G_{3n-1} - G_{3n-2})$ sous la forme

$$(\langle 1, 3n\rangle - \langle 1, 3n-1\rangle) + (\langle 2, 3n\rangle - \langle 2, 3n-1\rangle) + \cdots + (\langle 3n-1, 3n\rangle - \langle 3n-1, 3n-1\rangle) + \langle 3n, 3n\rangle$$

La grandeur $\langle 1, 3n\rangle$ compte $3n$ termes, alors $\langle 1, 3n\rangle - \langle 1, 3n-1\rangle = -3n$.
La grandeur $\langle 2, 3n\rangle$ compte $3n-1$ termes (pas un multiple de 3),
alors $\langle 2, 3n\rangle - \langle 2, 3n-1\rangle = 3n$.
La grandeur $\langle 3, 3n\rangle$ compte $3n-2$ termes (pas un multiple de 3),
alors $\langle 3, 3n\rangle - \langle 3, 3n-1\rangle = 3n$.
On trouve ainsi que $\langle 4, 3n\rangle$ compte $3n-3$ termes (multiple de 3),
et que $\langle 4, 3n\rangle - \langle 4, 3n-1\rangle = -3n$.
En poursuivant ainsi, on trouve que $(G_{3n} - G_{3n-1}) - (G_{3n-1} - G_{3n-2})$ équivaut à une somme de la forme

$$(-3n) + (3n) + (3n) + (-3n) + (3n) + (3n) + \cdots + (-3n) + (3n) + (3n)$$

qui compte exactement $3n$ termes, dont n valent $-3n$ et $2n$ valent $3n$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\frac{G_{3n} - 2G_{3n-1} + G_{3n-2}}{3} &= \frac{(G_{3n} - G_{3n-1}) - (G_{3n-1} - G_{3n-2})}{3} \\
&= \frac{n(-3n) + 2n(3n)}{3} \\
&= \frac{-3n^2 + 6n^2}{3} \\
&= \frac{3n^2}{3} \\
&= n^2
\end{aligned}$$

qui est un carré parfait.

Solution 2
En utilisant la notation et le raisonnement utilisés dans la solution 1, on obtient

$$G_n - G_{n-1} = \langle 1, n\rangle + \langle 2, n\rangle + \langle 3, n\rangle + \cdots + \langle n-1, n\rangle + \langle n, n\rangle$$

Pour exprimer cette somme de manière explicite, nous allons examiner l'apport total de chaque entier de la somme des *sommes à* 3 *signes*.
Par exemple, $G_9 - G_8 = \langle 1, 9\rangle + \langle 2, 9\rangle + \langle 3, 9\rangle + \cdots + \langle 9, 9\rangle$ peut être exprimé sous la forme

$$\begin{array}{r} 1+2-3+4+5-6+7+8-9 \\ +2+3-4+5+6-7+8+9 \\ +3+4-5+6+7-8+9 \\ +4+5-6+7+8-9 \\ +5+6-7+8+9 \\ +6+7-8+9 \\ +7+8-9 \\ +8+9 \\ +9 \end{array}$$

Voici comment un peut calculer la somme.
L'entier 1 apparaît exactement une fois, avec le signe $+$, alors le total de tous les 1 de la somme est égal à 1.
L'entier 2 apparaît deux fois, avec le signe $+$, alors l'apport total des 2 dans la somme est de $2(2) = 4$.
L'entier 3 apparaît deux fois dans la somme, une fois avec le signe $+$ et une fois avec le signe $-$, alors l'apport total des 3 est de $3 + 3 - 3 = (2 - 1)3 = 3$.
L'entier 4 apparaît trois fois avec le signe $+$ et une fois avec le signe $-$, alors l'apport total des 4 est de $(3 - 1)4 = 8$.
En poursuivant de la même manière, on trouve que la valeur de $G_9 - G_8$ est

$$(1)1+(2)2+(2-1)3+(3-1)4+(4-1)5+(4-2)6+(5-2)7+(6-2)8+(6-3)9 = 123$$

D'une manière générale, considérons l'entier 1 dans

$$\langle 1, n\rangle + \langle 2, n\rangle \ + \ \langle 3, n\rangle \ + \ \cdots \ + \ \langle n-1, n\rangle \ + \ \langle n, n\rangle$$

Il figure dans $\langle 1, n\rangle$ $(+1)$, mais pas dans $\langle 2, n\rangle$, ni dans $\langle 3, n\rangle$, ni dans aucune autre *somme à* 3 *signes*. Par conséquent, l'apport total de tous les 1 est égal à $1(1) = 1$.

L'entier 2 figure dans $\langle 1, n\rangle$ et $\langle 2, n\rangle$, vaut $+2$ dans les deux cas, et ne figure dans aucune autre *somme à* 3 *signes*. Par conséquent, l'apport total de tous les 2 est égal à $2(2) = 4$.

L'entier 3 figure dans $\langle 1, n\rangle$, où il vaut -3, et dans $\langle 2, n\rangle$ et $\langle 3, n\rangle$, où il vaut $+3$. Par conséquent, l'apport total de tous les 3 est égal à $(2 - 1)(3) = 3$.

De même, 4 figure dans $\langle 1, n\rangle$ où il est précédé du signe $+$, dans $\langle 2, n\rangle$, où il est précédé du signe $-$, et dans $\langle 3, n\rangle$ et $\langle 4, n\rangle$, où il est précédé du signe $+$. Par conséquent, l'apport total de tous les 4 est égal à $(3 - 1)(4) = 8$.

En général, si k est un entier tel que $1 \le k \le n$, alors k figure k fois dans la somme $G_n - G_{n-1}$. Le nombre d'occurrences de k précédées d'un signe $-$ dépend de la valeur de k.

Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$.
L'entier k figure dans $\langle k, n\rangle$ précédé d'un signe $+$, dans $\langle k-1, n\rangle$ précédé d'un signe $+$, et dans $\langle k-2, n\rangle$ précédé d'un signe $-$.
De même, il figure dans $\langle k-3, n\rangle$ et $\langle k-4, n\rangle$ précédé d'un signe $+$, et dans $\langle k-5, n\rangle$ précédé d'un signe $-$.
Et la régularité se poursuit : deux signes $+$ suivis d'un signe $-$, puis deux signes $+$ suivis d'un signe $-$, et ainsi de suite. Notons que k ne figure pas dans $\langle m, n\rangle$ lorsque $m > k$.
Si k est un multiple de 3 ($k = 3m$ pour certains entiers m), il figurera m fois précédé d'un signe $-$ et $2m$ fois précédé d'un signe $+$. Dans ce cas, l'apport total de k est

$$(2m - m)k = mk = \frac{k}{3} \times k = \frac{k^2}{3}$$

Si k est de 1 de plus qu'un multiple de 3 ($k = 3m + 1$ pour certains entiers m), alors k est précédé m fois d'un signe $-$ et $2m + 1$ fois d'un signe $+$. Dans ce cas, l'apport total de k est

$$(2m + 1 - m)k = (m + 1)k = \left(\frac{k-1}{3} + 1\right) k = \frac{k(k+2)}{3}$$

Si k est de 2 de plus qu'un multiple de 3 ($k = 3m + 2$ pour certains entiers m), alors k est précédé m fois d'un signe $-$ et $2m + 2$ fois d'un signe $+$. Dans ce cas, l'apport total de k est

$$(2m + 2 - m)k = (m + 2)k = \left(\frac{k-2}{3} + 2\right) k = \frac{k(k+4)}{3}$$

Nous avons donc une expression générale pour déterminer l'apport de k dans la somme $G_n - G_{n-1}$ où $1 \leq k \leq n$.
On voit que cet apport ne dépend jamais de n, ce qui implique que si $k \leq n - 1$, l'apport de k est exactement le même dans $G_n - G_{n-1}$ et $G_{n-1} - G_{n-2}$.
Ainsi, dans $G_{3n} - 2G_{3n-1} + G_{3n-2} = (G_{3n} - G_{3n-1}) - (G_{3n-1} - G_{3n-2})$, les apports de tous les entiers $k \leq n - 1$ s'annulent, alors $(G_{3n} - G_{3n-1}) - (G_{3n-1} - G_{3n-2})$ est certainement égal à l'apport de $3n$ dans $G_{3n} - G_{3n-1}$.
Dans les calculs ci-dessus, comme $3n$ est un multiple de 3, cet apport est

$$\frac{(3n)^2}{3} = 3n^2$$

et, ainsi,

$$\frac{G_{3n} - 2G_{3n-1} + G_{3n-2}}{3} = \frac{3n^2}{3} = n^2$$

qui est un carré parfait.

c) *Solution 1*

Comme on l'a vu en b), $G_{2025} - G_{2024}$ est égal à la somme

$$\langle 1, 2025\rangle + \langle 2, 2025\rangle + \langle 3, 2025\rangle + \cdots + \langle 2024, 2025\rangle + \langle 2025, 2025\rangle$$

La solution ci-dessous permettra de déterminer le reste lorsque cette somme est divisée par 27, sans calculer la somme.

Voyons d'abord la somme des neuf premiers termes

$$\langle 1, 2025\rangle + \langle 2, 2025\rangle + \langle 3, 2025\rangle + \cdots + \langle 9, 2025\rangle$$

Pour un entier positif donné a, examinons la somme ci-dessous, en portant une attention particulière à l'emplacement des signes $-$:

$$\begin{aligned} &a + (a+1) - (a+2) + (a+3) + (a+4) - (a+5) + (a+6) + (a+7) - (a+8) \\ &+a - (a+1) + (a+2) + (a+3) - (a+4) + (a+5) + (a+6) - (a+7) + (a+8) \\ &-a + (a+1) + (a+2) - (a+3) + (a+4) + (a+5) - (a+6) + (a+7) + (a+8) \end{aligned} \qquad (*)$$

La somme est égale à $9a + 36$ (ce qui peut être vérifié). On observe que 3 fois cette somme donne $3(9a + 36) = 27a + 108 = 27(a + 4)$, qui est un multiple de 27.

Chacune des *sommes à* 3 *signes* $\langle 1, 2025\rangle$, $\langle 4, 2025\rangle$ et $\langle 7, 2025\rangle$ contient la somme

$$10 + 11 - 12 + 13 + 14 - 15 + 16 + 17 - 18$$

Chacune des *sommes à* 3 *signes* $\langle 2, 2025\rangle$, $\langle 5, 2025\rangle$ et $\langle 8, 2025\rangle$ contient la somme

$$-10 + 11 + 12 - 13 + 14 + 15 - 16 + 17 + 18$$

Chacune des *sommes à* 3 *signes* $\langle 3, 2025\rangle$, $\langle 6, 2025\rangle$ et $\langle 9, 2025\rangle$ contient la somme

$$10 - 11 + 12 + 13 - 14 + 15 + 16 - 17 + 18$$

Le total des trois sommes ci-dessus peut être déterminé au moyen de la formule utilisée pour (*), avec $a = 10$. Comme chaque somme apparaît exactement trois fois, on peut conclure que dans

$$\langle 1, 2025\rangle + \langle 2, 2025\rangle + \langle 3, 2025\rangle + \cdots + \langle 9, 2025\rangle$$

si on fait le total de toutes les occurrences des entiers de 10 à 18, précédés des signes appropriés, on obtiendra $27(10 + 4)$, qui est un multiple de 27.

De même, pour $a = 19$, la somme des entiers de 19 à 27, précédés des signes appropriés, est $27(19 + 4)$, qui est un multiple de 27.

En poursuivant ainsi, on verra que le total de toutes les occurrences de 28 à 36 donne un multiple de 27, celui de toutes les occurrences de 37 à 45 aussi, et ainsi de suite, jusqu'au total de toutes les occurrences de 2017 à 2025, qui sera aussi un multiple de 27. Ce processus fonctionne bien parce que 2025 est un multiple de 9 ($9 \times 225 = 2025$).

Pour conclure, comme la somme $\langle 1, 2025\rangle + \langle 2, 2025\rangle + \langle 3, 2025\rangle + \cdots + \langle 9, 2025\rangle$, la somme de toutes les occurrences des entiers de 10 à 2025, inclusivement, est une somme de multiples de 27, elle est donc aussi un multiple de 27.

Ainsi, $\langle 1, 2025\rangle + \langle 2, 2025\rangle + \langle 3, 2025\rangle + \cdots + \langle 9, 2025\rangle$ est égal à un multiple de 27 plus la somme ci-dessous

$$\begin{array}{r} 1+2-3+4+5-6+7+8-9 \\ +2+3-4+5+6-7+8+9 \\ +3+4-5+6+7-8+9 \\ +4+5-6+7+8-9 \\ +5+6-7+8+9 \\ +6+7-8+9 \\ +7+8-9 \\ +8+9 \\ +9 \end{array} \qquad (**)$$

qui est égale à 123 (voir à ce sujet la solution 2 de la partie b)).

Par conséquent, $\langle 1, 2025\rangle + \langle 2, 2025\rangle + \langle 3, 2025\rangle + \cdots + \langle 9, 2025\rangle$ est égal à 123 plus des multiples de 27.
Si on suit un raisonnement similaire, la somme des neuf termes suivants , soit

$$\langle 10, 2025\rangle + \langle 11, 2025\rangle + \langle 12, 2025\rangle + \cdots + \langle 18, 2025\rangle$$

est un multiple de 27 plus la somme de

$$\begin{array}{r} 10+11-12+13+14-15+16+17-18 \\ +11+12-13+14+15-16+17+18 \\ +12+13-14+15+16-17+18 \\ +13+14-15+16+17-18 \\ +14+15-16+17+18 \\ +15+16-17+18 \\ +16+17-18 \\ +17+18 \\ +18 \end{array} \qquad (***)$$

parce que les occurrences des entiers de 19 à 2025 de cette somme ont exactement les mêmes signes que dans

$$\langle 1, 2025\rangle + \langle 2, 2025\rangle + \langle 3, 2025\rangle + \cdots + \langle 9, 2025\rangle$$

Plutôt que de calculer la somme (***) explicitement, servons-nous de la somme (**), égale à 123, pour en déduire la valeur.
La régularité des $+$ et des $-$ est identique dans (**) et (***).
De plus, les entiers de la deuxième somme disposée en triangle peuvent être obtenus en ajoutant 9 à chaque entier de la première somme disposée en triangle.
Chaque somme compte 33 signes $+$ et 12 signes $-$ (en comptant un signe $+$ pour les premiers termes des sommes), ce qui signifie que la somme (***) peut être obtenue à partir de (**) en ajoutant 33×9 et soustrayant 12×9, pour une modification globale de $9(33 - 12) = 9 \times 21 = 27 \times 7$, qui est un multiple de 27.

Donc, la somme de (***) est 123 plus un multiple de 27.
Par conséquent, la somme de

$$\langle 10, 2025\rangle + \langle 11, 2025\rangle + \langle 12, 2025\rangle + \cdots + \langle 18, 2025\rangle$$

est un multiple de 27 plus 123 plus un autre multiple de 27, ce qui revient à 123 plus un multiple de 27.
Il en va de même pour la somme des neuf termes suivants dans $G_{2025} - G_{2024}$, et celle des neuf suivants, et ainsi de suite. Il importe de noter que la somme contient exactement 2025 termes, et que 2025 est un multiple de 9.
Comme $2025 = 9 \times 225$, on conclut que $G_{2025} - G_{2024}$ est égal à 225×123 plus un multiple de 27. Toutefois, $225 \times 123 = 9 \times 25 \times 3 \times 41 = 27 \times 1025$, qui est aussi un multiple de 27.
On conclut que $G_{2025} - G_{2024}$ est une somme de multiples de 27, que son résultat est également un multiple de 27, et que le reste est 0 lorsqu'elle est divisée par 27.

Solution 2
Dans cette solution, on fera appel à la notation et à des calculs faits dans les solutions de la partie b). Plus précisément, on calculera explicitement

$$\langle 1, 2025\rangle + \langle 2, 2025\rangle + \langle 3, 2025\rangle + \cdots + \langle 2024, 2025\rangle + \langle 2025, 2025\rangle$$

en examinant l'apport total de chaque entier k de 1 à 2025.

Partant de la solution 2 de la partie b) :

Si k est un multiple de 3, alors l'apport total de k est $\dfrac{k^2}{3}$

Si k est de 1 de plus qu'un multiple de 3, alors l'apport total de k est $\dfrac{k(k+2)}{3}$.

Si k est de 2 de plus qu'un multiple de 3, alors l'apport total de k est $\dfrac{k(k+4)}{3}$.

La grandeur $G_{2025} - G_{2024}$ est égale à la somme des apports de k lorsque k prend la valeur de chaque entier de 1 à 2025.
Chaque entier est soit un multiple de 3, soit 1 de plus qu'un multiple de 3, soit 2 de plus qu'un multiple de 3. Par conséquent, on peut calculer la somme en regroupant les entiers selon leur « catégorie » et en faisant appel aux formules données dans le questionnaire du concours.
Les multiples de 3 de 1 à $2025 = 3 \times 675$ sont 3×1, 3×2 et ainsi de suite jusqu'à 3×675.
Ainsi, l'apport total des multiples de 3 est

$$\frac{(3\times 1)^2}{3} + \frac{(3\times 2)^2}{3} + \frac{(3\times 3)^2}{3} + \cdots + \frac{(3\times 675)^2}{3}$$

que l'on peut réduire à

$$\frac{1}{3}\left(3^2(1)^2 + 3^2(2)^2 + 3^2(3)^2 + \cdots + 3^2(675)^2\right)$$

ou

$$\frac{3^2}{3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 675^2)$$

En faisant appel à la formule de la somme des premiers n carrés parfaits pour $n = 675$, on voit que l'apport des multiples de 3 est

$$3 \times \frac{675(675+1)(2\times 675+1)}{6} = \frac{675(676)(1351)}{2} = 675(338)(1351)$$

Les entiers de 1 de plus qu'un multiple de 3 sont 1 (soit $3 \times 0 + 1$), 4 (soit $3 \times 1 + 1$), 7 (soit $3 \times 2 + 1$), et ainsi de suite jusqu'à 2023 (soit $3 \times 674 + 1$). Donc, il faut trouver la somme de toutes les expressions de la forme $\dfrac{(3m+1)((3m+1)+2)}{3}$ où m prend la valeur de chaque entier de 0 à 674.

Notons que

$$\frac{(3m+1)((3m+1)+2)}{3} = \frac{(3m+1)(3m+3)}{3} = (m+1)(3m+1) = 3m^2 + 4m + 1$$

Par conséquent, en appliquant des calculs similaires à ceux du cas précédent, on trouve que l'apport total des entiers de 1 de plus qu'un multiple de 3 est

$$\big(3(0)^2 + 4(0) + 1\big) + \big(3(1)^2 + 4(1) + 1\big) + \big(3(2)^2 + 4(2) + 1\big) + \cdots + \big(3(674)^2 + 4(674) + 1\big)$$

que l'on peut reformuler ainsi

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 674^2) + 4(1 + 2 + 3 + \cdots + 674) + 675 \times 1$$

En utilisant les formules données dans le questionnaire du concours, on peut réduire cette expression à

$$\begin{aligned} 3 \times \frac{674(675)(1349)}{6} + 4 \times \frac{674(675)}{2} + 675 &= 675\left(\frac{674(1349)}{2} + 2(674) + 1\right) \\ &= 675\big(337(1349) + 2(674) + 1\big) \\ &= 675\big(337(1353) + 1\big) \end{aligned}$$

Les entiers de 2 de plus qu'un multiple de 3 sont $3 \times 0 + 2$, $3 \times 1 + 2$, et ainsi de suite jusqu'à $3 \times 674 + 2$, ou $3m + 2$ pour chaque entier m de 0 à 674. L'apport de $3m + 2$ est

$$\frac{(3m+2)(3m+2+4)}{3} = \frac{(3m+2)(3m+6)}{3} = (m+2)(3m+2) = 3m^2 + 8m + 4$$

L'apport total de tous les entiers de 2 de plus qu'un multiple de 3 est

$$\big(3(0)^2 + 8(0) + 4\big) + \big(3(1)^2 + 8(1) + 4\big) + \big(3(2)^2 + 8(2) + 4\big) + \cdots + \big(3(674)^2 + 8(674) + 4\big)$$

qui est égal à

$$3(1^2 + 2^2 + \cdots + 674^2) + 8(1 + 2 + 3 + \cdots + 674) + 675 \times 4$$

En appliquant les formules données dans le questionnaire du concours, on détermine que l'apport total des entiers de 2 de plus qu'un multiple de 3 est

$$\begin{aligned} 3 \times \frac{674(675)(1349)}{6} + 8 \times \frac{674(675)}{2} + 4 \times 675 &= 675\left(\frac{674(1349)}{2} + 4(674) + 4\right) \\ &= 675\big(337(1349) + 4(674) + 4\big) \\ &= 675\big(337(1357) + 4\big) \end{aligned}$$

En combinant les apports totaux des trois catégories, on trouve que $G_{2025} - G_{2024}$ est égal à

$$675(338)(1351) + 675\big(337(1353) + 1\big) + 675\big(337(1357) + 4\big)$$

qui est un multiple de 675 (soit 27×25), et ainsi que $G_{2025} - G_{2024}$ est un multiple de 27.