Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2020

le mardi 7 avril 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 8 avril 2020
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) *Solution 1*

Si $x \neq -2$, alors $\dfrac{3x+6}{x+2} = \dfrac{3(x+2)}{x+2} = 3$.

Autrement dit, pour toute valeur $x \neq -2$, l'expression est égale à 3.

Donc, lorsque $x = 11$, on a $\dfrac{3x+6}{x+2} = 3$.

Solution 2

Lorsque $x = 11$, on a $\dfrac{3x+6}{x+2} = \dfrac{3(11)+6}{11+2} = \dfrac{39}{13} = 3$.

(b) *Solution 1*

Une droite coupera toujours l'axe des ordonnées en un point dont l'abscisse est 0.
Puisque A a une abscisse de -1 et que B a une abscisse de 1, alors le milieu de AB est situé sur l'axe des ordonnées et sur la droite qui passe aux points A et B, il en est de même pour le point où cette droite coupe l'axe des abscisses.
Le milieu du segment de droite limité par les points $A(-1,5)$ et $B(1,7)$ est $\left(\frac{1}{2}(-1+1), \frac{1}{2}(5+7)\right)$ ou $(0,6)$.
Donc, la droite qui passe aux points $A(-1,5)$ et $B(1,7)$ a pour ordonnée à l'origine 6.

Solution 2

La droite qui passe aux points $A(-1,5)$ et $B(1,7)$ a pour pente $\dfrac{7-5}{1-(-1)} = \dfrac{2}{2} = 1$.

La droite de pente 1 et qui passe au point $B(1,7)$ a pour équation $y - 7 = 1(x-1)$ ou $y = x + 6$.
La droite d'équation $y = x + 6$ a pour ordonnée à l'origine 6.

(c) On détermine d'abord les coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $y = 3x + 7$ et $y = x + 9$.

À ce point, la valeur de y est la même sur les deux droites, donc $3x + 7 = x + 9$, d'où $2x = 2$ ou $x = 1$.
Lorsque $x = 1$, on obtient $y = x + 9 = 10$.
Donc, les deux droites se coupent au point $(1, 10)$.
Puisque les trois droites se coupent toutes en un même point, alors la droite d'équation $y = mx + 17$ passe par $(1, 10)$.
Donc, $10 = m \cdot 1 + 17$, d'où $m = 10 - 17 = -7$.

2. (a) Supposons que a, b et c sont respectivement les chiffres des centaines, des dizaines et des unités de m.
D'après le problème :

- a, b et c sont trois chiffres distincts,
- a, b et c sont chacun inférieurs à 10,
- $a = bc$ et
- c est impair (puisque m est impair).

L'entier $m = 623$ remplit toutes ces conditions. Étant donné qu'il n'existe qu'un tel nombre, 623 est donc la seule réponse.
Pourquoi est-ce la seule valeur possible de m ?
On remarque qu'on ne peut avoir $b = 1$ ou $c = 1$, sinon $a = c$ ou $a = b$.
Donc, $b \geq 2$ et $c \geq 2$.

Puisque $c \geq 2$ et que c est impair, alors c peut être égal à 3, à 5, à 7 ou à 9.
Puisque $b \geq 2$ et $a = bc$, alors a serait supérieur à 10 (ce qui est impossible) si c est égal à 5, à 7 ou à 9. Donc, $c = 3$.
Puisque $b \geq 2$ et $b \neq c$, alors $b = 2$ ou $b \geq 4$.
Si $b \geq 4$ et $c = 3$, alors $a > 10$, ce qui est impossible.
On doit donc avoir $c = 3$ et $b = 2$, d'où $a = 6$.

(b) Puisque Éléonore a un sac de 100 billes (chacune étant noire ou dorée) dont le rapport du nombre de billes noires au nombre de billes dorées est de $1 : 4$, alors $\frac{1}{5}$ de ses billes sont noires. Donc, Éléonore a $\frac{1}{5} \cdot 100 = 20$ billes noires.

Lorsqu'elle rajoute des billes dorées, le rapport du nombre de billes noires au nombre de billes dorées devient $1 : 6$. Donc, Éléonore a $6 \cdot 20 = 120$ billes dorées.
Éléonore a donc $20 + 120 = 140$ billes en tout, ce qui veut dire qu'elle a rajouté $140 - 100$ ou 40 billes dorées.

(c) On voit d'abord que $\dfrac{n^2+n+15}{n} = \dfrac{n^2}{n} + \dfrac{n}{n} + \dfrac{15}{n} = n + 1 + \dfrac{15}{n}$.

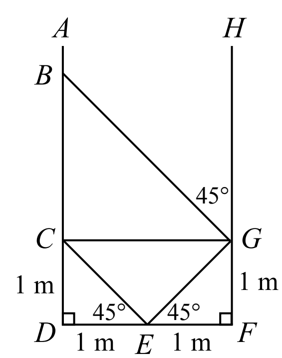
Donc, $\dfrac{n^2+n+15}{n}$ est un entier uniquement lorsque $n + 1 + \dfrac{15}{n}$ est un entier.

Puisque $n + 1$ est un entier, alors $\dfrac{n^2+n+15}{n}$ est un entier uniquement lorsque $\dfrac{15}{n}$ est un entier.

L'expression $\dfrac{15}{n}$ est un entier uniquement lorsque n est un diviseur de 15.

Puisque n est un entier strictement positif, alors les valeurs possibles de n sont 1, 3, 5 et 15.

3. (a) Remarquons d'abord qu'un triangle dont deux angles mesurent 45° et 90° est un triangle isocèle car le troisième angle a une mesure égale à $180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Le triangle a donc deux angles isométriques.
De façon particulière, le triangle CDE est isocèle et $CD = DE$ et le triangle EFG est isocèle et $EF = FG$.
Puisque $DE = EF = 1$ m, alors $CD = FG = 1$ m.
On relie C et G.



Considérons le quadrilatère $CDFG$. Puisque les angles aux sommets D et F sont droits et que $CD = GF$, $CDFG$ doit donc être un rectangle.
Cela signifie que $CG = DF = 2$ m et que les angles aux sommets C et G sont droits.
Puisque $\angle CGF = 90^\circ$ et $\angle DCG = 90^\circ$, alors $\angle BGC = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ et $\angle BCG = 90^\circ$.
Le triangle BCG est donc isocèle et $BC = CG = 2$ m.
Finalement, $BD = BC + CD = 2 \text{ m} + 1 \text{ m} = 3$ m.

(b) On applique le procédé deux fois de plus :

	x	y
Avant l'Étape 1	24	3
Après l'Étape 1	27	3
Après l'Étape 2	81	3
Après l'Étape 3	81	4

	x	y
Avant l'Étape 1	81	4
Après l'Étape 1	85	4
Après l'Étape 2	340	4
Après l'Étape 3	340	5

Donc, x a une valeur finale de 340.

(c) La parabole d'équation $y = kx^2 + 6x + k$ a deux abscisses à l'origine distinctes uniquement lorsque le discriminant de l'équation quadratique $kx^2 + 6x + k = 0$ est positif.
Dans ce cas, le discriminant est égal à $\Delta = 6^2 - 4 \cdot k \cdot k = 36 - 4k^2$.
L'inéquation $36 - 4k^2 > 0$ est équivalente à $k^2 < 9$.
Puisque k est un entier et que $k \neq 0$, alors k peut être égal à $-2, -1, 1, 2$.
(Si $k \geq 3$ ou $k \leq -3$, on obtient $k^2 \geq 9$. Donc aucunes valeurs de k dans ces intervalles ne donnent le résultat souhaité.)

4. (a) Puisque $\dfrac{a}{b} < \dfrac{4}{7}$ et que $\dfrac{4}{7} < 1$, alors $\dfrac{a}{b} < 1$.
Puisque a et b sont des entiers strictement positifs, alors $a < b$.
Puisque a et b ont une différence de 15 et que $a < b$, alors $b = a + 15$.
On a donc $\dfrac{5}{9} < \dfrac{a}{a+15} < \dfrac{4}{7}$.
On multiplie les deux membres de l'inéquation de gauche par $9(a + 15)$ (ce qui est positif) pour obtenir $5(a + 15) < 9a$ d'où on a $5a + 75 < 9a$ ou $4a > 75$.
On voit d'après cela que $a > \dfrac{75}{4} = 18{,}75$.
Puisque a est un entier, alors $a \geq 19$.
On multiplie les deux membres de l'inéquation de droite par $7(a + 15)$ (ce qui est positif) pour obtenir $7a < 4(a + 15)$ d'où on a $7a < 4a + 60$ ou $3a < 60$.
On voit d'après cela que $a < 20$.
Puisque a est un entier, alors $a \leq 19$.
Puisque $a \geq 19$ et que $a \leq 19$, alors $a = 19$, d'où $\dfrac{a}{b} = \dfrac{19}{34}$.

(b) Les 6 premiers termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme 10 sont : $10, 5, \dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{5}{16}$.
Dans ce cas, le rapport du 6ᵉ terme de la suite géométrique au 4ᵉ terme est $\dfrac{5/16}{5/4}$, soit $\dfrac{1}{4}$.
(Par ailleurs, on aurait pu déterminer ce rapport sans écrire la suite en prenant conscience qu'on doit multiplier par $\dfrac{1}{2}$ deux fois en passant du 4ᵉ terme au 6ᵉ terme.)
Les 6 premiers termes d'une suite arithmétique de raison d et de premier terme 10 sont : 10, $10 + d$, $10 + 2d$, $10 + 3d$, $10 + 4d$, $10 + 5d$.
Dans ce cas, le rapport du 6ᵉ terme de la suite arithmétique au 4ᵉ terme est $\dfrac{10 + 5d}{10 + 3d}$.
Puisque ces rapports sont égaux, alors $\dfrac{10 + 5d}{10 + 3d} = \dfrac{1}{4}$.
On a donc $4(10 + 5d) = 10 + 3d$, d'où $40 + 20d = 10 + 3d$ ou $17d = -30$, soit $d = -\dfrac{30}{17}$.

5. (a) Soit $a = f(20)$. Alors $f(f(20)) = f(a)$.
Pour calculer $f(f(20))$, on détermine la valeur de a et ensuite celle de $f(a)$.
Par définition, $a = f(20)$ est le nombre de nombres premiers p qui vérifient $20 \leq p \leq 30$.
Les nombres premiers dans l'intervalle de 20 à 30 sont 23 et 29. Donc, $a = f(20) = 2$.
Donc, $f(f(20)) = f(a) = f(2)$.
Par définition, $f(2)$ est le nombre de nombres premiers p qui vérifient $2 \leq p \leq 12$.
Il y a 5 nombres premiers dans l'intervalle de 2 à 12, soit 2, 3, 5, 7, 11.
Donc, $f(f(20)) = 5$.

(b) Puisque $(x-1)(y-2) = 0$, alors $x = 1$ or $y = 2$.
Supposons que $x = 1$. Dans ce cas, les équations restantes sont :

$$\begin{aligned}(1-3)(z+2) &= 0 \\ 1 + yz &= 9\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}-2(z+2) &= 0 \\ yz &= 8\end{aligned}$$

D'après la première équation, $z = -2$.
D'après la seconde équation, $y(-2) = 8$, d'où $y = -4$.
Donc, si $x = 1$, la seule solution est $(x, y, z) = (1, -4, -2)$.
Supposons que $y = 2$. Dans ce cas, les équations restantes sont :

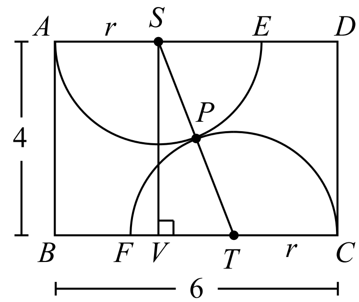
$$\begin{aligned}(x-3)(z+2) &= 0 \\ x + 2z &= 9\end{aligned}$$

D'après la première équation, $x = 3$ ou $z = -2$.
Si $x = 3$, alors $3 + 2z = 9$, d'où $z = 3$.
Si $z = -2$, alors $x + 2(-2) = 9$, d'où $x = 13$.
Donc, si $y = 2$, les solutions sont $(x, y, z) = (3, 2, 3)$ et $(x, y, z) = (13, 2, -2)$.
Pour résumer, les solutions qui vérifient le système d'équations sont :

$$(x, y, z) = (1, -4, -2),\ (3, 2, 3),\ (13, 2, -2)$$

On peut confirmer par substitution que chacun des triplets vérifie bel et bien chacune des équations.

6. (a) On abaisse une perpendiculaire de S jusqu'à V sur BC.
Puisque le quadrilatère $ASVB$ a trois angles droits, son quatrième angle doit également être droit. Le quadrilatère est donc un rectangle.
Donc, $BV = AS = r$ puisque AS est un rayon du demi-cercle supérieur.
De plus, $SV = AB = 4$.
On joint les points S et T au point P. Puisque les deux demi-cercles sont tangents en P, alors SPT est une droite, d'où on a donc $ST = SP + PT = r + r = 2r$.



Considérons le triangle rectangle SVT. On a $SV = 4$ et $ST = 2r$.
De plus, $VT = BC - BV - TC = 6 - r - r = 6 - 2r$.
D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} SV^2 + VT^2 &= ST^2 \\ 4^2 + (6-2r)^2 &= (2r)^2 \\ 16 + 36 - 24r + 4r^2 &= 4r^2 \\ 52 &= 24r \end{aligned}$$

Donc, $r = \frac{52}{24} = \frac{13}{6}$.

(b) Puisque le triangle ABE est rectangle en A et est isocèle avec $AB = AE = 7\sqrt{2}$, alors le triangle ABE est un triangle 45°-45°-90°, d'où $\angle ABE = 45°$ et $BE = \sqrt{2}AB = \sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}$ ou $BE = 14$.

Puisque le triangle BCD est rectangle en C avec $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{8x}{4x} = 2$, alors le triangle BCD est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°, d'où $\angle DBC = 30°$.

Puisque $\angle ABC = 135°$, alors $\angle EBD = \angle ABC - \angle ABE - \angle DBC = 135° - 45° - 30° = 60°$.
Considérons maintenant le triangle EBD. On a $EB = 14$, $BD = 8x$, $DE = 8x - 6$ et $\angle EBD = 60°$.
D'après la loi du cosinus, on a donc les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} DE^2 &= EB^2 + BD^2 - 2 \cdot EB \cdot BD \cdot \cos(\angle EBD) \\ (8x-6)^2 &= 14^2 + (8x)^2 - 2(14)(8x)\cos(60°) \\ 64x^2 - 96x + 36 &= 196 + 64x^2 - 2(14)(8x) \cdot \tfrac{1}{2} \\ -96x &= 160 - 14(8x) \\ 112x - 96x &= 160 \\ 16x &= 160 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Donc, la seule valeur possible de x est $x = 10$.

7. (a) *Solution 1*

Puisque la fonction g est linéaire et a une pente positive, cette fonction est donc biunivoque et est donc inversible.
Cela signifie que $g^{-1}(g(a)) = a$ pour tout nombre réel a et que $g(g^{-1}(b)) = b$ pour tout nombre réel b.
Donc, $g(f(g^{-1}(g(a)))) = g(f(a))$ pour tout nombre réel a.
Donc,

$$\begin{aligned} g(f(a)) &= g(f(g^{-1}(g(a)))) \\ &= 2(g(a))^2 + 16g(a) + 26 \\ &= 2(2a-4)^2 + 16(2a-4) + 26 \\ &= 2(4a^2 - 16a + 16) + 32a - 64 + 26 \\ &= 8a^2 - 6 \end{aligned}$$

De plus, si $b = f(a)$, alors $g^{-1}(g(f(a))) = g^{-1}(g(b)) = b = f(a)$.
Donc,

$$f(a) = g^{-1}(g(f(a))) = g^{-1}(8a^2 - 6)$$

Puisque $g(x) = 2x - 4$, alors $y = 2g^{-1}(y) - 4$, d'où $g^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + 2$.
Donc,

$$f(a) = \tfrac{1}{2}(8a^2 - 6) + 2 = 4a^2 - 1$$

d'où $f(\pi) = 4\pi^2 - 1$.

Solution 2

Puisque la fonction g est linéaire et a une pente positive, cette fonction est donc biunivoque et est donc inversible.
Afin de trouver une formule pour $g^{-1}(y)$, on commence avec l'équation $g(x) = 2x - 4$ que l'on convertit à $y = 2g^{-1}(y) - 4$ et dans laquelle on isole $g^{-1}(y)$ pour obtenir $2g^{-1}(y) = y + 4$ ou $g^{-1}(y) = \dfrac{y+4}{2}$.
Étant donné que $g(f(g^{-1}(x))) = 2x^2 + 16x + 26$, on applique la fonction g^{-1} aux deux membres de l'équation pour obtenir successivement :

$$\begin{aligned} f(g^{-1}(x)) &= g^{-1}(2x^2 + 16x + 26) \\ f(g^{-1}(x)) &= \frac{(2x^2 + 16x + 26) + 4}{2} \qquad \text{(ayant une formule pour } g^{-1}) \\ f(g^{-1}(x)) &= x^2 + 8x + 15 \\ f\left(\frac{x+4}{2}\right) &= x^2 + 8x + 15 \qquad \text{(ayant une formule pour } g^{-1}) \\ f\left(\frac{x+4}{2}\right) &= x^2 + 8x + 16 - 1 \\ f\left(\frac{x+4}{2}\right) &= (x+4)^2 - 1 \end{aligned}$$

On veut déterminer la valeur de $f(\pi)$.
On peut donc remplacer $\dfrac{x+4}{2}$ avec π, ce qui revient à remplacer $x + 4$ avec 2π.
Donc, $f(\pi) = (2\pi)^2 - 1 = 4\pi^2 - 1$.

(b) *Solution 1*

En utilisant les lois des logarithmes, les équations données sont équivalentes à :

$$\log_2(\sin x) + \log_2(\cos y) = -\frac{3}{2}$$
$$\log_2(\sin x) - \log_2(\cos y) = \frac{1}{2}$$

En additionnant ces deux équations, on obtient $2\log_2(\sin x) = -1$, d'où $\log_2(\sin x) = -\frac{1}{2}$.
Donc, $\sin x = 2^{-1/2} = \frac{1}{2^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Puisque $0^\circ \leq x < 180^\circ$, alors $x = 45^\circ$ ou $x = 135^\circ$.
Puisque $\log_2(\sin x) + \log_2(\cos y) = -\frac{3}{2}$ et $\log_2(\sin x) = -\frac{1}{2}$, alors $\log_2(\cos y) = -1$, d'où $\cos y = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.
Puisque $0^\circ \leq y < 180^\circ$, alors $y = 60^\circ$.
Donc, $(x, y) = (45^\circ, 60^\circ)$ ou $(x, y) = (135^\circ, 60^\circ)$.

Solution 2

Remarquons d'abord que $2^{1/2} = \sqrt{2}$ et que $2^{-3/2} = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{2^1 2^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
À partir partir des équations données, on obtient :

$$\sin x \cos y = 2^{-3/2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$\frac{\sin x}{\cos y} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

En multipliant ces deux équations ensemble, on obtient $(\sin x)^2 = \frac{1}{2}$, d'où $\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Puisque $0^\circ \leq x < 180^\circ$, on doit donc avoir $\sin x \geq 0$, donc $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Puisque $0^\circ \leq x < 180^\circ$, on obtient $x = 45^\circ$ ou $x = 135^\circ$.
Puisque $\sin x \cos y = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et que $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient $\cos y = \frac{1}{2}$.
Puisque $0^\circ \leq y < 180^\circ$, alors $y = 60^\circ$.
Donc, $(x, y) = (45^\circ, 60^\circ)$ ou $(x, y) = (135^\circ, 60^\circ)$.

8. (a) *Solution 1*

Soit x la probabilité que Bianca remporte le titre de champion du tournoi.
Puisque Alain, Bianca et Chen sont tous les trois des joueurs de même niveau et puisque leurs rôles dans le tournoi sont identiques, alors chacun d'eux a la même probabilité de remporter le titre de champion du tournoi.
Donc, la probabilité qu'Alain remporte le titre de champion du tournoi est égale à x et la probabilité que Chen remporte le titre de champion du tournoi est égale à x.
Soit y la probabilité que Dave remporte le titre de champion du tournoi.
Puisque uniquement l'un des quatre joueurs peut remporter le titre de champion du tournoi, alors $3x + y = 1$, d'où $x = \frac{1-y}{3}$. On peut exprimer y en fonction de p.

Dave doit gagner deux matchs afin de remporter le titre de champion du tournoi.
Peu importe le joueur que Dave affronte lors d'un match, sa probabilité de victoire est égale à p.
Donc, la probabilité qu'il gagne ses deux matchs consécutifs est égale à p^2. Donc, la probabilité qu'il remporte le titre de champion du tournoi est de $y = p^2$.
Donc, la probabilité que Bianca remporte le titre de champion du tournoi est égale à $\dfrac{1-p^2}{3}$.
(Ce que l'on peut récrire sous la forme souhaitée de la manière suivante : $\dfrac{-p^2+0p+1}{3}$.)

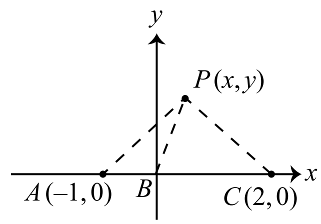
Solution 2
Soit x la probabilité que Bianca remporte le titre de champion du tournoi.
Pour les deux premiers matchs, les joueurs peuvent s'affronter selon les trois appariements suivants :
(i) Bianca affronte Alain et Chen affronte Dave
(ii) Bianca affronte Chen et Alain affronte Dave
(iii) Bianca affronte Dave et Alain affronte Chen
Chacun de ces trois appariements a une probabilité d'occurrence de $\frac{1}{3}$.
Dans l'appariement (i), Bianca sortira vainqueuse soit si Bianca bat Alain, Chen bat Dave et Bianca bat Chen, soit si Bianca bat Alain, Dave bat Chen et Bianca bat Dave.
Puisque la probabilité que Bianca batte Alain est égale à $\frac{1}{2}$, que la probabilité que Chen batte Dave est égale à $1-p$ et que la probabilité que Bianca batte Chen est égale à $\frac{1}{2}$, alors la première possibilité a une probabilité égale à $\frac{1}{2}\cdot(1-p)\cdot\frac{1}{2}$.
Puisque la probabilité que Bianca batte Alain est égale à $\frac{1}{2}$, que la probabilité que Dave batte Chen est égale à p et que la probabilité que Bianca batte Dave est égale à $1-p$, alors la deuxième possibilité a une probabilité égale à $\frac{1}{2}\cdot p\cdot(1-p)$.
Donc, la probabilité que Bianca sortira vainqueuse dans l'appariement (i) est égale à $\frac{1}{2}\cdot(1-p)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot p\cdot(1-p)$.

Dans l'appariement (ii), Bianca sortira vainqueuse soit si Bianca bat Chen, Alain bat Dave et Bianca bat Alain, soit si Bianca bat Alain, Dave bat Alain et Bianca bat Dave.
La probabilité combinée de ces possibilités est égale à $\frac{1}{2}\cdot(1-p)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot p\cdot(1-p)$.
Dans l'appariement (iii), Bianca sortira vainqueuse soit si Bianca bat Dave, Alain bat Chen et Bianca bat Alain, soit si Bianca bat Dave, Chen bat Alain et Bianca bat Chen.
La probabilité combinée de ces possibilités est égale à $(1-p)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+(1-p)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$.
Donc,

$$
\begin{aligned}
x &= \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{4}(1-p)+\tfrac{1}{2}p(1-p)+\tfrac{1}{4}(1-p)+\tfrac{1}{2}p(1-p)+\tfrac{1}{4}(1-p)+\tfrac{1}{4}(1-p)\right)\\
&= \tfrac{1}{3}(p(1-p)+(1-p))\\
&= \tfrac{1}{3}(p-p^2+1-p)
\end{aligned}
$$

Donc, la probabilité que Bianca remporte le titre de champion du tournoi est égale à $\dfrac{1-p^2}{3}$.

(b) Quoiqu'on n'inclura généralement pas les unités dans les calculs de notre solution, soient toutes les longueurs en kilomètres, toutes les heures en secondes et toutes les vitesses en kilomètres par seconde.
On place les points dans le plan cartésien avec B à l'origine $(0,0)$, A sur la partie négative de l'axe des abscisses et C sur la partie positive de l'axe des abscisses.
On place A à $(-1,0)$ et C à $(2,0)$.
Supposons que P a pour coordonnées (x,y) et que la distance de P à B est égale à d km.



Puisque le son arrive à A $\frac{1}{2}$ s après qu'il soit arrivé à B et que le son voyage à une vitesse de $\frac{1}{3}$ km/s, alors A est situé à $(\frac{1}{2}\text{ s})\cdot(\frac{1}{3}\text{ km/s}) = \frac{1}{6}$ km de plus du point P que ne l'est le point B.
Donc, la distance de P à A est égale à $(d+\frac{1}{6})$ km.
Puisque le son arrive à C 1 s après qu'il soit arrivé à A, alors C est situé à $\frac{1}{3}$ km de plus du point P que ne l'est le point A. Donc, C est situé à $(d+\frac{1}{6})\text{ km} + (\frac{1}{3}\text{ km}) = (d+\frac{1}{2})$ km de P.

Puisque la distance de P à B est égale à d km, alors $(x-0)^2+(y-0)^2 = d^2$.

Puisque la distance de P à A est égale à $(d+\frac{1}{6})$ km, alors $(x+1)^2+(y-0)^2 = (d+\frac{1}{6})^2$.

Puisque la distance de P à C est égale à $(d+\frac{1}{2})$ km, alors $(x-2)^2+(y-0)^2 = (d+\frac{1}{2})^2$.

On développe et on simplifie ces équations pour obtenir :

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= d^2 \\ x^2+2x+1+y^2 &= d^2+\tfrac{1}{3}d+\tfrac{1}{36} \\ x^2-4x+4+y^2 &= d^2+d+\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Lorsqu'on soustrait la première équation de la deuxième, on obtient :

$$2x+1 = \tfrac{1}{3}d+\tfrac{1}{36}$$

Lorsqu'on soustrait la première équation de la troisième, on obtient :

$$-4x+4 = d+\tfrac{1}{4}$$

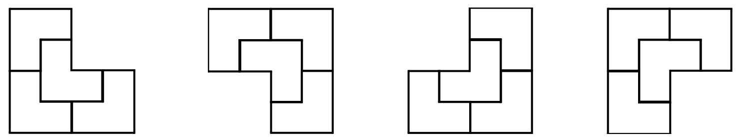
Donc,

$$\begin{aligned} 2(2x+1)+(-4x+4) &= 2(\tfrac{1}{3}d+\tfrac{1}{36})+(d+\tfrac{1}{4}) \\ 6 &= \tfrac{2}{3}d+\tfrac{1}{18}+d+\tfrac{1}{4} \\ 216 &= 24d+2+36d+9 \qquad \text{(en multipliant par 36)} \\ 205 &= 60d \\ d &= \tfrac{41}{12} \end{aligned}$$

Donc, la distance entre le microphone B et le point P est de $\frac{41}{12}$ km.

9. (a) À chaque tour, on subdivise chacune des formes L en quatre L plus petits.
Cela signifie que le nombre de formes L augmente par un facteur de 4 après chaque tour.
Après la première subdivision, il y a 4 formes L.
Après qu'il y ait eu deux subdivisions, il y a $4^2 = 16$ L de la plus petite taille.
Après qu'il y ait eu trois subdivisions, il y a $4^3 = 64$ L de la plus petite taille.

(b) Les formes en L ont quatre orientations possibles : , , , .
Lorsqu'on subdivise un L de chacune des orientations, on obtient les figures suivantes :



À partir de ces figures, on voit qu'après chaque tour subséquent,
- Chaque produit 2 , 0 , 1 et 1 de la plus petite taille.
- Chaque produit 0 , 2 , 1 et 1 .
- Chaque produit 1 , 1 , 2 et 0 .
- Chaque produit 1 , 1 , 0 et 2 .

Après 1 subdivision, on a 2 , 0 , 1 et 1 .
Après 2 subdivisions, le nombre de L de chaque orientation est comme suit :
- : $2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 6$
- : $2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$
- : $2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 4$
- : $2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 4$

Après 3 subdivisions, le nombre de L de chaque orientation est comme suit :
- : $6 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 20$
- : $6 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 12$
- : $6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 16$
- : $6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 16$

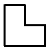
D'où viennent ces nombres ?
Par exemple, pour déterminer le nombre de après 2 subdivisions, on considère le nombre de L de chaque orientation après la première subdivision (2, 0, 1, 1) et on se demande combien de chacun d'eux produira au niveau suivant. Puisque les quatre types produisent chacun 2, 0, 1 et 1 , alors le nombre total de après qu'il y ait eu 2 subdivisions est égal à $2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$, soit 6.

À titre d'exemple supplémentaire, pour déterminer le nombre de après 3 subdivisions, on remarque qu'après 2 subdivisions le nombre de L des quatre orientations différentes est 6, 2, 4, 4 et que chaque L de chacun des quatre types produit 0, 2, 1, 1 . Cela signifie que le nombre total de après qu'il y ait eu 3 subdivisions est égal à

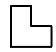
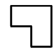
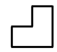
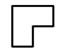
$$6 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 12$$

En combinant tout cela, il y a 20 L de la plus petite taille qui sont orientés de la même manière que le L d'origine.

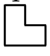
(c) Dans la partie (b), on avait déterminé le nombre de L de la plus petite taille de chaque orientation après qu'il y ait eu 1, 2 et 3 subdivisions.
Déterminons maintenant le nombre de L de la plus petite taille après la 4ᵉ subdivision.
Après 4 subdivisions, le nombre de L de chaque orientation est comme suit :

-  : $20 \cdot 2 + 12 \cdot 0 + 16 \cdot 1 + 16 \cdot 1 = 72$
-  : $20 \cdot 0 + 12 \cdot 2 + 16 \cdot 1 + 16 \cdot 1 = 56$
-  : $20 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 16 \cdot 2 + 16 \cdot 0 = 64$
-  : $20 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 16 \cdot 0 + 16 \cdot 2 = 64$

Dans le tableau suivant, on rassemble les données quant aux nombres de L de la plus petite taille de chaque orientation pour les 4 premières subdivisions :

Après la subdivision				
1	2	0	1	1
2	6	2	4	4
3	20	12	16	16
4	72	56	64	64

On récrit les nombres de la troisième rangée : $16+4, 16-4, 16, 16$. On récrit également les nombres de la quatrième rangée : $64+8, 64-8, 64, 64$.
Sur cette base, on peut deviner que le nombre de L de la plus petite taille de chaque orientation après n subdivisions est $4^{n-1}+2^{n-1}$, $4^{n-1}-2^{n-1}$, 4^{n-1}, 4^{n-1}.
Si cette supposition est correcte, alors après la 2020ᵉ subdivision il doit y avoir $4^{2019}+2^{2019}$ L de la plus petite taille qui sont orientés de la même manière que le L d'origine.
On peut prouver la véracité de ces suppositions à l'aide d'un raisonnement inductif.
On remarque d'abord que le tableau ci-dessus soutient notre supposition lorsque $n = 1$, 2, 3, 4.
Ensuite, si on peut montrer que le fait que notre supposition est correcte après un nombre donné de subdivisions signifie qu'elle sera correcte après la prochaine subdivision, alors elle sera correcte après chaque subdivision. (Car si notre supposition est correcte après 4 subdivisions, cela signifie qu'elle sera correcte après 5 subdivisions. De même, si notre supposition est correcte après 5 subdivisions, cela signifie qu'elle sera correcte après 6 subdivisions, et ainsi de suite de manière à être correcte après n'importe quel nombre de subdivisions.)
Supposons donc qu'après qu'il y ait eu k subdivisions, on a les nombres suivants de L de la plus petite taille pour chaque orientation : $4^{k-1}+2^{k-1}$, $4^{k-1}-2^{k-1}$, 4^{k-1}, 4^{k-1}.
Après $k+1$ subdivisions (c'est-à-dire après la prochaine subdivision), le nombre de L de chaque orientation est comme suit :

-  : $(4^{k-1}+2^{k-1})\cdot 2+(4^{k-1}-2^{k-1})\cdot 0+4^{k-1}\cdot 1+4^{k-1}\cdot 1 = 4\cdot 4^{k-1}+2\cdot 2^{k-1} = 4^k+2^k$
-  : $(4^{k-1}+2^{k-1})\cdot 0+(4^{k-1}-2^{k-1})\cdot 2+4^{k-1}\cdot 1+4^{k-1}\cdot 1 = 4\cdot 4^{k-1}-2\cdot 2^{k-1} = 4^k-2^k$
-  : $(4^{k-1}+2^{k-1})\cdot 1+(4^{k-1}-2^{k-1})\cdot 1+4^{k-1}\cdot 2+4^{k-1}\cdot 0 = 4\cdot 4^{k-1} = 4^k$
-  : $(4^{k-1}+2^{k-1})\cdot 1+(4^{k-1}-2^{k-1})\cdot 1+4^{k-1}\cdot 0+4^{k-1}\cdot 2 = 4\cdot 4^{k-1} = 4^k$

Puisque $k = (k+1)-1$, ces expressions soutiennent notre supposition. Donc, notre supposition est correcte après n'importe quel nombre de subdivisions.
Donc, après qu'il y ait eu 2020 subdivisions, il y a $4^{2019}+2^{2019}$ L de la plus petite taille qui sont orientés de la même manière que le L d'origine.

10. (a) Par souci de simplicité, soit l'expression « somme par paire » dans notre solution synonyme de la somme des entiers d'un couple possible d'entiers dans une liste de nombres.
Dans ce cas, les sommes par paires des nombres $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ sont

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_4 \leq s_5 \leq s_6$$

On peut exprimer les six sommes par paires des nombres de la liste de la manière suivante :

$$a_1 + a_2, a_1 + a_3, a_1 + a_4, a_2 + a_3, a_2 + a_4, a_3 + a_4$$

Puisque $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, alors la plus petite somme doit être celle des deux nombres les plus petits. Donc, $s_1 = a_1 + a_2$.
De même, la plus grande somme doit être la somme des deux nombres les plus grands, d'où $s_6 = a_3 + a_4$.
Puisque $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, alors la deuxième plus petite somme est $a_1 + a_3$ car $a_1 + a_3$ n'est pas supérieur à chacune des quatre sommes $a_1 + a_4$, $a_2 + a_3$, $a_2 + a_4$ et $a_3 + a_4$:

Puisque $a_3 \leq a_4$, alors $a_1 + a_3 \leq a_1 + a_4$.
Puisque $a_1 \leq a_2$, alors $a_1 + a_3 \leq a_2 + a_3$.
Puisque $a_1 \leq a_2$ et $a_3 \leq a_4$, alors $a_1 + a_3 \leq a_2 + a_4$.
Puisque $a_1 \leq a_4$, alors $a_1 + a_3 \leq a_3 + a_4$.

Donc, $s_2 = a_1 + a_3$.
D'après un argument semblable, $s_5 = a_2 + a_4$.
Jusqu'ici, on a $s_1 = a_1 + a_2$, $s_2 = a_1 + a_3$, $s_5 = a_2 + a_4$ et $s_6 = a_3 + a_4$.
Cela signifie que s_3 et s_4 sont égaux à $a_1 + a_4$ et à $a_2 + a_3$ dans un ordre quelconque (car il s'avère que les deux ordres sont possibles).

<u>1^er cas : $s_3 = a_1 + a_4$ et $s_4 = a_2 + a_3$</u>
Dans ce cas, $a_1 + a_2 = 8$, $a_1 + a_3 = 104$ et $a_2 + a_3 = 110$.
Lorsqu'on additionne ces trois équations, on obtient :

$$(a_1 + a_2) + (a_1 + a_3) + (a_2 + a_3) = 8 + 104 + 110$$

d'où $2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 222$ ou $a_1 + a_2 + a_3 = 111$.
Puisque $a_2 + a_3 = 110$, alors $a_1 = (a_1 + a_2 + a_3) - (a_2 + a_3) = 111 - 110 = 1$.
Puisque $a_1 = 1$ et $a_1 + a_2 = 8$, alors $a_2 = 7$.
Puisque $a_1 = 1$ et $a_1 + a_3 = 104$, alors $a_3 = 103$.
Puisque $a_3 = 103$ et $a_3 + a_4 = 208$, alors $a_4 = 105$.
Donc, $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 7, 103, 105)$.

<u>2^e cas : $s_3 = a_2 + a_3$ et $s_4 = a_1 + a_4$</u>
Dans ce cas, $a_1 + a_2 = 8$, $a_1 + a_3 = 104$ et $a_2 + a_3 = 106$.
En utilisant le même processus, $a_1 + a_2 + a_3 = 109$.
D'où on obtient $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (3, 5, 101, 107)$.

Donc, les deux listes possibles de Kerry sont $1, 7, 103, 105$ et $3, 5, 101, 107$.

(b) Supposons que les valeurs de $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}$ soient fixes mais inconnues. En fonction des nombres $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$, les dix sommes par paires sont :

$$a_1 + a_2, a_1 + a_3, a_1 + a_4, a_1 + a_5, a_2 + a_3, a_2 + a_4, a_2 + a_5, a_3 + a_4, a_3 + a_5, a_4 + a_5$$

Ces derniers seront égaux à $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}$ dans un certain ordre.
En utilisant une analyse similaire à celle de la partie (a), la plus petite somme est $a_1 + a_2$ tandis que la plus grande somme est $a_4 + a_5$. Donc, $s_1 = a_1 + a_2$ et $s_{10} = a_4 + a_5$.
De plus, la deuxième plus petite somme sera $s_2 = a_1 + a_3$ tandis que la deuxième plus grande somme sera $s_9 = a_3 + a_5$.
Soit

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8 + s_9 + s_{10}$$

On remarque que S a une valeur fixe mais inconnue.
Même si on ne connaît pas l'ordre dans lequel ces sommes par paires sont affectées à s_1 jusqu'à s_{10}, la valeur de S sera tout de même égale à la somme de ces dix sommes par paires.
Autrement dit, $S = 4a_1 + 4a_2 + 4a_3 + 4a_4 + 4a_5$, puisque chacun des nombres de la liste est compris dans quatre sommes.
Donc, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{4}S$ ou $(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5) = \frac{1}{4}S$.
Cela signifie que $s_1 + a_3 + s_{10} = \frac{1}{4}S$, d'où $a_3 = \frac{1}{4}S - s_1 - s_{10}$.
Puisque les valeurs de s_1, s_{10} et S sont fixes, donc on peut déterminer la valeur de a_3 d'après la liste des sommes de s_1 jusqu'à s_{10}.
En utilisant la valeur de a_3, et sachant que $s_2 = a_1 + a_3$ et $s_9 = a_3 + a_5$ et que s_2 et s_9 sont connus, on peut déterminer a_1 et a_5.
Finalement, en utilisant $s_1 = a_1 + a_2$ et $s_{10} = a_4 + a_5$ et les valeurs de a_1 et a_5, on peut déterminer a_2 et a_4.
Donc, étant donné les dix sommes s_1 jusqu'à s_{10}, on peut déterminer les valeurs de a_3, a_1, a_5, a_2 et a_4, d'où il n'y a qu'une seule liste a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 possible. (Pouvez-vous écrire des expressions pour chacun de a_1 à a_5 uniquement en fonction de s_1 à s_{10} ?)

(c) Supposons que les listes a_1, a_2, a_3, a_4 et b_1, b_2, b_3, b_4 produisent la même liste de sommes s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6. (On peut trouver des exemples de telles listes dans la partie (a).)
Soit x un entier strictement positif. Considérons la liste suivante de 8 termes :

$$a_1, a_2, a_3, a_4, b_1 + x, b_2 + x, b_3 + x, b_4 + x$$

On voit qu'il y a trois catégories de sommes par paires dans cette liste :
(i) $a_i + a_j$, $1 \le i < j \le 4$: d'où on obtient les sommes de s_1 à s_6
(ii) $(b_i + x) + (b_j + x)$, $1 \le i < j \le 4$: chacun de ces derniers est $2x$ plus grand que les six sommes de s_1 à s_6 car on obtient ces six sommes à partir des sommes par paires $b_i + b_j$
(iii) $a_i + (b_j + x)$, $1 \le i \le 4$ et $1 \le j \le 4$
Considérons la liste suivante de 8 termes :

$$a_1 + x, a_2 + x, a_3 + x, a_4 + x, b_1, b_2, b_3, b_4$$

On voit qu'il y a également trois catégories de sommes par paires dans cette liste :
(i) $b_i + b_j$, $1 \le i < j \le 4$: d'où on obtient les sommes de s_1 à s_6
(ii) $(a_i + x) + (a_j + x)$, $1 \le i < j \le 4$: chacun de ces derniers est $2x$ plus grand que les six sommes de s_1 à s_6 car on obtient ces six sommes à partir des sommes par paires $a_i + a_j$
(iii) $(a_i + x) + b_j$, $1 \le i \le 4$ et $1 \le j \le 4$

Donc, on a les mêmes 28 sommes par paires dans chaque cas. Dans chaque cas, il y a 6 sommes dans (i), 6 sommes dans (ii) et 16 sommes dans (iii).
Si l'on choisit les listes initiales de manière qu'elles aient les mêmes sommes par paires et qu'on choisit la valeur de x de manière qu'elle soit suffisamment grande afin que $a_i + x$ ne soit pas égal à tout b_j et que $b_i + x$ ne soit pas égal à tout a_j, on obtient deux listes différentes de 8 nombres qui produisent chacune la même liste de 28 sommes.
Par exemple, si l'on choisit $1, 7, 103, 105$ comme la liste a_1, a_2, a_3, a_4 et $3, 5, 101, 107$ comme la liste b_1, b_2, b_3, b_4 et $x = 10\,000$, on obtient les listes

$$1, 7, 103, 105, 10\,003, 10\,005, 10\,101, 10\,107$$

et

$$3, 5, 101, 107, 10\,001, 10\,007, 10\,103, 10\,105$$

En utilisant une analyse similaire à celle ci-dessus, si les listes a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 et b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8 ont le même ensemble de sommes par paires, alors les listes

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, b_1 + y, b_2 + y, b_3 + y, b_4 + y, b_5 + y, b_6 + y, b_7 + y, b_8 + y$$

et

$$a_1 + y, a_2 + y, a_3 + y, a_4 + y, a_5 + y, a_6 + y, a_7 + y, a_8 + y, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8$$

auront également les mêmes sommes par paires.
Donc, on pose $y = 1\,000\,000$ et on voit que les listes

$$1, 7, 103, 105, 10\,003, 10\,005, 10\,101, 10\,107, 1\,000\,003, 1\,000\,005, 1\,000\,101, 1\,000\,107,$$

$$1\,010\,001, 1\,010\,007, 1\,010\,103, 1\,010\,105$$

et

$$3, 5, 101, 107, 10\,001, 10\,007, 10\,103, 10\,105, 1\,000\,001, 1\,000\,007, 1\,000\,103, 1\,000\,105,$$

$$1\,010\,003, 1\,010\,005, 1\,010\,101, 1\,010\,107$$

ont la même liste de sommes $s_1, s_2, \ldots, s_{120}$, ce qu'il fallait démontrer.