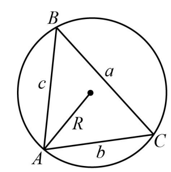
Trigonométrie

Boîte à outils

Nom	*Formule*
Loi des sinus	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, R étant le rayon du cercle circonscrit. 
Loi du cosinus	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$
Aire d'un triangle ABC	L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$.
Identités trigonométriques générales	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ $\sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta$
Identités pythagoriciennes	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta, \quad \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$
Formules de somme	$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$
Formules d'angle double	$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

Exemples de problèmes

1. Déterminer les racines de l'équation $2\sin^3 x - 5\sin^2 x + 2\sin x = 0$ dans l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$.

   Solution

   On factorise le membre de gauche pour obtenir

   $$\sin x(2\sin^2 x - 5\sin x + 2) = 0$$
   $$\sin x(2\sin x - 1)(\sin x - 2) = 0$$

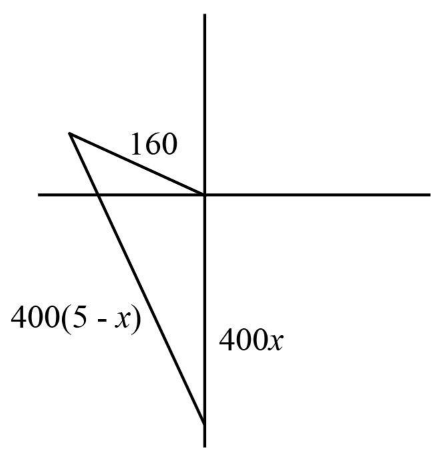
   Donc, $\sin x = 0$, $\frac{1}{2}$ ou 2. Or, $|\sin x| \leq 1$. Donc, $\sin x \neq 2$. Donc, dans l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$, on a $x = 0$, π, 2π, $\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$.

2. Un avion quitte un porte-avions et se déplace en direction sud à une vitesse constante de 400 km/h. Le porte-avions poursuit sa route selon un cap de 60° à l'ouest du nord à une vitesse de 32 km/h. Si l'avion a suffisamment de carburant pour voler pendant 5 heures à une vitesse constante de 400 km/h, quelle est la distance maximale qu'il peut parcourir vers le sud tout en s'assurant de pouvoir retourner en toute sécurité sur le porte-avions avec le carburant restant?

   Solution

   La première étape pour résoudre ce problème est de dessiner un diagramme (ce que l'on a fait ci-dessous). Soit x le nombre d'heures pendant lesquelles l'avion se dirige vers le sud. La distance qu'il parcourt vers le sud est donc égale à $400x$. Pour revenir, l'avion parcourt une distance de $400(5-x)$ en $(5-x)$ heures. Pendant les 5 heures, le porte-avions parcourt une distance totale de $5(32) = 160$. D'après la loi du cosinus, on a:

   $$(400(5-x))^2 = 160^2 + (400x)^2 - 2 \cdot 160 \cdot 400x \cdot \cos 120°.$$

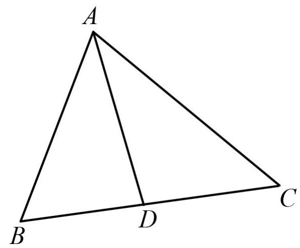


   On simplifie pour obtenir

   $$4000000 - 1600000x + 160000x^2 = 25600 + 160000x^2 + 64000x$$

   d'où on a $x = \frac{621}{260}$. Donc, la distance maximale que l'avion peut parcourir vers le sud tout en s'assurant de pouvoir revenir sur le porte-avions est égale à $400\left(\frac{621}{260}\right) = \frac{12420}{13}$ km, soit environ 955,4 km.

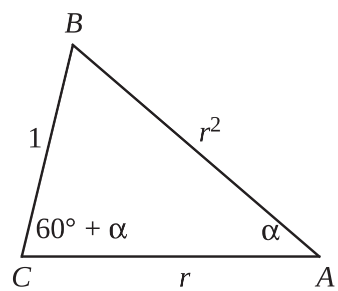
3. Dans le triangle ABC, le point D est situé sur le côté BC de manière que AD soit la bissectrice de l'angle A. Démontrer que $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD}$.



Solution

Soit $\angle ADC = \theta$ et $\angle BAC = \alpha$. On utilise la loi des sinus dans les triangles ADC et ADB pour obtenir $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\theta} = \dfrac{CD}{AC}$ et $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(180^\circ - \theta)} = \dfrac{BD}{AB}$. Cependant, $\sin\theta = \sin(180^\circ - \theta)$. Donc, $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD}$. Ce resultat est le théorème de la bissectrice d'un triangle.

4. Dans le triangle ABC, $\angle C = \angle A + 60^\circ$. Si $BC = 1$, $AC = r$ et $AB = r^2$ $(r > 1)$, démontrer que $r < \sqrt{2}$.



Solution

Soit $\angle A = \alpha$, $\angle C = \alpha + 60^\circ$ et $\angle B = 120^\circ - 2\alpha$ les angles du triangle. D'après la loi des sinus:

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{1} &= \frac{\sin(\alpha + 60^\circ)}{\sin\alpha} \\ &= \frac{\sin\alpha\cos 60^\circ + \cos\alpha\sin 60^\circ}{\sin\alpha} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cot\alpha\end{aligned}$$

Puisque les trois angles du triangle sont positifs, on peut constater que $0 < \alpha < 60^\circ$. Dans cet intervalle, la fonction tangente est croissante et son inverse, la fonction cotangente, est décroissante.

D'après la loi du cosinus:

$$r^2 = 1 + r^4 - 2r^2\cos(120^\circ - 2\alpha).$$

Or, $r > 1$. Donc,

$$(r^2 - 1)^2 > 0 \text{ ou } r^4 + 1 > 2r^2.$$

On reporte l'inéquation $r^4 + 1 > 2r^2$ dans l'équation pour obtenir $r^2 > 2r^2 - 2r^2 \cos(120^\circ - 2\alpha)$, d'où $\cos(120^\circ - 2\alpha) > \frac{1}{2}$. Donc, $\alpha > 30^\circ$ et

$$r^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cot \alpha < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1} = 2$$

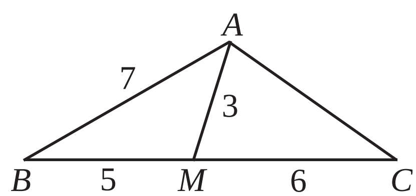
Donc, $r^2 < 2$, d'où $r < \sqrt{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

Trousse de problèmes

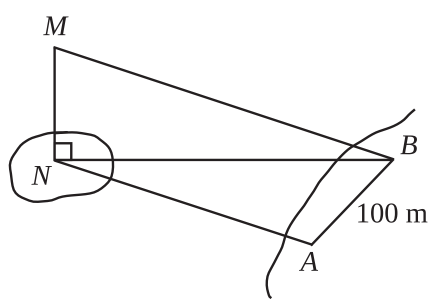
1. (a) Sachant que $2\sin(2\theta) + 1 = 0$, déterminer la plus petite valeur positive de θ (en degrés).

   (b) Déterminer toutes les racines de l'équation $2(\sin^2\theta - \cos^2\theta) = 8\sin\theta - 5$ dans l'intervalle $-\pi \le \theta \le \pi$.

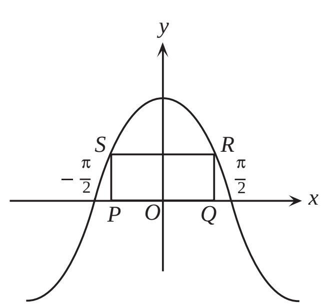
2. Dans le triangle ABC, M est situé sur BC de manière que $BM = 5$ et $MC = 6$. Si $AM = 3$ et $AB = 7$, déterminer la valeur exacte de AC.



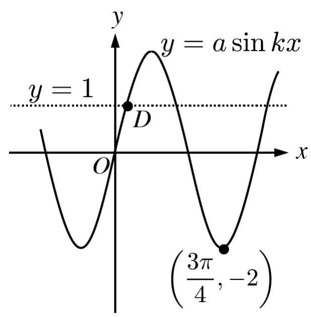
3. Pour déterminer la hauteur MN d'une tour sur une île, on a choisi deux points, A et B, à 100 m l'un de l'autre, de manière que A, B et N soient situés dans le même plan horizontal. Si $\angle NAB = 108°$, $\angle ABN = 47°$ et $\angle MBN = 32°$, déterminer la hauteur de la tour au mètre près.



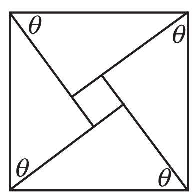
4. Un rectangle $PQRS$ est situé de manière que son côté PQ soit sur l'axe des abscisses. De plus, ses sommets S et R sont situés sur la courbe définie par $y = k\cos x$. Sachant que le côté PQ a une longueur de $\frac{\pi}{3}$ et que le rectangle a une aire de $\frac{5\pi}{3}$, déterminer la valeur de k.



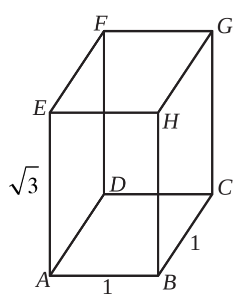
5. La figure suivante présente la courbe définie par $y = a\sin kx$. Le point $\left(\frac{3\pi}{4}, -2\right)$ est un point minimum. La droite d'équation $y = 1$ coupe la courbe au point D. Déterminer les coordonnées de D.



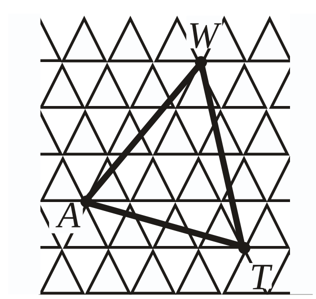
6. Un petit carré, qui a une aire de 9 cm^2, est entouré de quatre triangles congruents, de manière à former un grand carré qui a une aire de 89 cm^2. Si chacun des triangles a un angle θ, déterminer la valeur de $\tan\theta$.



7. Un prisme droit a une hauteur de $\sqrt{3}$ et sa base carrée a des côtés de 1 cm. Déterminer le cosinus de l'angle FAC.



8. Chaque petit triangle équilatéral qui forme la grille suivante a des côtés de longueur 1. Les sommets du triangle WAT sont des sommets de ces petits triangles équilatéraux. Déterminer l'aire du triangle WAT.



9. Un triangle ABC est tel que $AB = 8$ et $\angle CAB = 60°$. Les côtés BC et AC ont des côtés de longueurs respectives a et b. Déterminer toutes les valeurs possibles de a et de b.