Suites et séries

Boîte à outils

Suites arithmétiques

Une suite arithmétique est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant au terme précédent une constante (positive ou négative) appelée *raison*.

Description	*Formule*
$k^{\text{ième}}$ terme	$t_k = a + (k-1)r$, a étant le premier terme et r étant la raison
Somme des n premiers termes	$S_n = \frac{n}{2}(a + t_n) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)r)$
Sommes égales de 2 termes	Puisque chaque terme après le premier est obtenu en ajoutant au terme précédent une constante, alors on a $t_k + t_l = t_m + t_n$ si et seulement si $k + l = m + n$.

Suites géométriques

Une suite géométrique est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante non nulle appelée *raison*.

Description	*Formule*
$k^{\text{ième}}$ terme	$t_k = ar^{k-1}$, a étant le premier terme et r étant la raison
Somme des n premiers termes	$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$
Produits égaux de 2 termes	Soit $a \neq 0$ et $r \neq 0$. Puisque chaque terme après le premier est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante, alors on a $t_k t_l = t_m t_n$ si et seulement si $k + l = m + n$.
Somme d'une suite géométrique infinie	Si la raison r vérifie $\lvert r \rvert < 1$, on peut calculer la somme d'une suite géométrique infinie $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ à l'aide de $S = \dfrac{a}{1-r}$.

Divers

Bien que les suites arithmétiques et géométriques soient souvent mises en avant dans les cours de mathématiques du secondaire, elles ne constituent qu'une petite portion de l'ensemble des suites.Voici quelques formules pour la somme des termes de suites qui paraissent souvent dans les concours.

Description	*Formula*
Somme des n premiers entiers	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
Somme des carrés des n premiers entiers	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Somme des cubes des n premiers entiers	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
Séries télescopiques	Si $t_k = u_k - u_{k-1}$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0$

- Une *suite récurrente* est une suite dans laquelle la valeur de chaque terme est déterminée en fonction d'un ou plusieurs des termes précédents.
  - Une *formule de récurrence* définit la manière de calculer chaque terme t_n à partir du terme précédent (ou de plusieurs termes précédents).
  - Chaque formule de récurrence doit comprendre au moins un terme connu ou donné. Ce terme est souvent le terme initial, soit t_1.
  - Le *terme général* d'une suite est une expression qui permet de calculer chaque terme, t_n, de la suite directement en fonction de son rang, n. Cette représentation de la suite est parfois appelée sa *forme explicite*.

Exemples de problèmes

1. Quelle est la somme des multiples de 7 ou de 11 qui sont inférieurs à 1000?

   Solution

   On semble chercher la valeur de $(7 + 14 + 21 + 28 + \cdots + 994) + (11 + 22 + 33 + \cdots + 990)$, soit la somme de deux suites arithmétiques. Or, les multiples de 77 paraissent dans les deux parenthèses, ce qui fait qu'on les compterait deux fois; il faut donc les soustraire de cette somme. On cherche donc la valeur de

   $$(7 + 14 + 21 + 28 + \cdots + 994) + (11 + 22 + 33 + \cdots + 990) - (77 + 154 + \cdots + 924).$$

   Le terme 994 est le 142ᵉ terme de la première suite et donc la somme de cette suite est égale à $\frac{142}{2}(7 + 994)$. Le terme 990 est le 90ᵉ terme de la seconde suite et donc la somme de cette suite est égale à $\frac{90}{2}(11 + 990)$. Le terme 924 est le 12ᵉ terme de la suite que l'on soustrait et donc la somme de cette suite est égale à $\frac{12}{2}(77 + 924)$. Donc, la somme des multiples de 7 ou de 11 qui sont inférieurs à 1000 est égale à:

   $$\begin{aligned}&\frac{142}{2}(7 + 994) + \frac{90}{2}(11 + 990) - \frac{12}{2}(77 + 924)\\ &= (71 + 45 - 6)(1001)\\ &= (110)(1001)\\ &= 110110\end{aligned}$$

2. On considère une suite dans laquelle $t_1 = 1$ et $t_{n+1} = t_n + 3n^2 + 3n + 1$. Déterminer la valeur de t_{100}.

   Solution

   Puisque les différences $t_n - t_{n-1}$ ne sont pas constantes, il ne s'agit pas d'une suite arithmétique. On pose $n = 1$ pour obtenir

   $$t_2 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

   On pose $n = 2$, pour obtenir

   $$t_3 = 8 + 12 + 6 + 1 = 27$$

   Ces éléments suggèrent que $t_n = n^3$ pour tout n.

   Pour démontrer que $t_n = n^3$ est une definition équivalente à celle qui est donnée, on remarque d'abord que $t_1 = 1 = 1^3$. De plus, on considère deux termes consécutifs de la suite définie par cette definition équivalente, soit $t_n = n^3$ et $t_{n+1} = (n + 1)^3$. La différence entre ces termes est égale à:

   $$\begin{aligned}t_{n+1} - t_n &= (n + 1)^3 - (n)^3\\ &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n^3\\ &= 3n^2 + 3n + 1\\ t_{n+1} &= t_n + 3n^2 + 3n + 1\end{aligned}$$

   ce qui correspond à la définition initiale de la suite. On a donc démontré que la suite initiale peut être exprimée sous la forme $t_n = n^3$. Donc, $t_{100} = 100^3$.

3. Soit a et b deux nombres strictement positifs tels que a, b, $a+b$ et ab forment 4 termes consécutifs d'une suite géométrique. Déterminer a.

Solution

Puisque les termes forment une suite géométrique, les rapports de termes consécutifs sont égaux. Donc:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{ab} \quad (*)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{b}{a+b} \\ a^2 + ab &= b^2 \\ b^2 - ab - a^2 &= 0 \\ \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right) - 1 &= 0 \quad \text{(puisque } a \neq 0) \\ \frac{b}{a} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

On a choisi la racine positive de l'équation, car a et b sont positifs. De plus, à partir de (*), on a

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a+b}{ab} \\ a^2 &= a+b \\ a &= 1 + \frac{b}{a} \quad \text{(puisque } a \neq 0) \\ &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{(en reportant } \frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ dans l'équation)} \end{aligned}$$

Trousse de problèmes

1. Dans une suite géométrique, $t_5 + t_7 = 1500$ et $t_{11} + t_{13} = 187500$. Déterminer toutes les valeurs possibles des trois premiers termes.

2. Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique dont les termes sont distincts. Déterminer la valeur de x, sachant que

$$(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$$

3. Soit x, 4 et y trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de manière que x, 3 et y soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Déterminer la valeur de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

4. Trois nombres distincts, dont le produit est égal à 125, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Ils sont aussi les 1^{er}, 3^{e} et 6^{e} termes d'une suite arithmétique. Déterminer ces nombres.

5. Soit T_k le $k^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, c'est-à-dire que $T_k = 1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k^2+k}{2}$. Les six premiers nombres triangulaires sont 1, 3, 6, 10, 15 et 21. Déterminer la somme des 200 premiers nombres triangulaires.

6. Les mesures des angles intérieurs d'un pentagone forment une suite arithmétique et un des angles mesure $90°$. Déterminer toutes les mesures possibles du plus grand angle du pentagone.

7. Déterminer quatre entiers a, b, c et d qui vérifient les conditions suivantes :

   - $b + c = 30$
   - $a + d = 35$
   - Les nombres a, b, c et d sont en ordre croissant et ils forment une suite géométrique.

8. On forme une suite t_1, t_2, t_3 en choisissant t_1 au hasard dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, t_2 au hasard dans l'ensemble $\{4, 5, 6\}$ et t_3 au hasard dans l'ensemble $\{7, 8, 9\}$. Quelle est la probabilité pour que t_1, t_2, t_3 soit une suite arithmétique?

9. La somme de 25 entiers consécutifs est égale à 500. Déterminer le plus petit des 25 entiers.

10. Combien y a-t-il de termes dans la suite arithmétique -1994, -1992, -1990, ..., 1992, 1994?

11. La somme des n premiers termes d'une suite est égale à $S_n = 3^n - 1$, n étant un entier strictement positif.

    (a) Soit t_n le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite. Déterminer t_1, t_2 et t_3.

    (b) Démontrer que $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ est une constante, quelle que soit la valeur de n.

12. On considère la suite arithmétique 7, 14, 21, ... Combien y a-t-il de termes de la suite qui sont entre 40 et 28 001?

13. Soit f une fonction telle que $f(1) = 2$ et $f(n+1) = \dfrac{3f(n)+1}{3}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$. Déterminer $f(100)$.

14. On considère toutes les droites définies par une équation de la forme $px + qy = r$ et qui passent par le point $(-1, 2)$. Démontrer que p, q et r forment une suite arithmétique.

15. On considère une suite arithmétique S dont les termes sont $t_1, t_2, t_3, \ldots$ De plus, $t_1 = a$ et la raison est égale à d. Les termes t_5, t_9 et t_{16} forment une suite géométrique de trois termes dont la raison est égale à r. Démontrer que S contient une infinité de suites géométriques de trois termes ayant toutes la même raison géométrique r.

16. Dans la suite $5, 3, -2, -5, \ldots$, chaque terme à partir du troisième est obtenu en soustrayant du terme précédent le terme qui le précède. Déterminer la somme des 32 premiers termes de la suite.

17. On considère la suite définie par $t_1 = 1, t_2 = -1$ et $t_n = \left(\dfrac{n-3}{n-1}\right) t_{n-2}$ lorsque $n \geq 3$. Déterminer t_{1998}.

18. Soit une suite arithmétique dont le $n^{\text{ième}}$ terme est défini par $t_n = 555 - 7n$. Si $S_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$, déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $S_n < 0$.