Fonctions, équations et polynômes

Boîte à outils

Fonctions

Une *fonction* est un ensemble de couples (x, y) tel que pour chaque valeur de x, il n'y a qu'une seule valeur de y. Si l'on représente graphiquement la fonction, elle doit satisfaire le *Test de la droite verticale*, qui stipule qu'une relation est une fonction si et seulement si aucune droite verticale ne coupe son graphique en plus d'un seul point. On utilise la notation $f(x) = y$ pour indiquer que y est la valeur de la fonction qui correspond à x.

La *composition de fonctions* consiste à combiner deux fonctions ou plus de manière successive. Dans cette composition, une fonction est évaluée en premier puis on utilise son résultat comme argument de la fonction suivante et ainsi de suite. Lorsque l'on compose les fonctions f et g, on applique d'abord la fonction g, puis on utilise son résultat comme argument pour f. Cette composition se note $f \circ g$ ou $f(g(x))$.

La *réciproque* d'une fonction annule l'action de la fonction. C'est-à-dire, si la fonction est un ensemble de couples (x, y), alors la réciproque sera un ensemble de couples (y, x). Si la réciproque d'une fonction $f(x)$ est également une fonction, elle se note $f^{-1}(x)$.

- $f^{-1}(f(x)) = x$ pour toutes les valeurs de x dans le domaine de $f(x)$
- $f(f^{-1}(x)) = x$ pour toutes les valeurs de x dans le domaine de $f^{-1}(x)$.

Résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes d'équations

Vous devriez être en mesure de résoudre une équation, une inéquation ou un système d'équations de manière algébrique. Pour résoudre un système d'équations, la méthode d'élimination ou la méthode de substitution sont deux méthodes qui peuvent s'avérer utiles.

Paraboles

La fonction du second degré f, définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a,b,c étant réels et $a \neq 0$) admet deux zéros. On peut obtenir ces dernières à l'aide de la formule quadratique: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Ces zéros sont

- réels et distincts si $b^2 - 4ac > 0$
- réels et égaux si $b^2 - 4ac = 0$
- non réels et distincts si $b^2 - 4ac < 0$

La somme des zéros est égale à $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit est égal à $\dfrac{c}{a}$.

Puisque $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, le sommet de la parabole est situé au point $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Polynômes

- Le *théorème du reste*: Lorsqu'un polynôme $p(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$, de degré n, est divisé par $(x - k)$, le reste est égal à $p(k)$.
- Le *théorème de factorisation* est une conséquence du théorème du reste: $p(k) = 0$ si et seulement si $(x - k)$ est un facteur de $p(x)$.
- Une équation polynomiale de la forme $p(x) = 0$ et de degré n a au maximum n racines réelles.
- Le *Théorème des racines rationnelles* stipule que pour un polynôme $p(x)$ aux coefficients entiers, toute racine rationnelle peut s'écrire sous la forme $\frac{q}{r}$, q étant un diviseur du terme constant et r un diviseur du coefficient dominant (le coefficient du monôme de plus haut degré).

Exemples de problèmes

1. Pour chaque nombre réel positif x, on définit $f(x)$ comme étant le nombre de nombres premiers p qui vérifient $x \leq p \leq x + 10$. Quelle est la valeur de $f(f(20))$?

   Solution

   Soit $a = f(20)$. Alors $f(f(20)) = f(a)$. Pour calculer $f(f(20))$, on détermine la valeur de a et ensuite celle de $f(a)$. Par définition, $a = f(20)$ est le nombre de nombres premiers p qui vérifient $20 \leq p \leq 30$. Les nombres premiers dans l'intervalle de 20 à 30 sont 23 et 29. Donc, $a = f(20) = 2$. Donc, $f(f(20)) = f(a) = f(2)$. Par définition, $f(2)$ est le nombre de nombres premiers p qui vérifient $2 \leq p \leq 12$. Il y a 5 nombres premiers dans l'intervalle de 2 à 12, soit 2, 3, 5, 7, 11. Donc, $f(f(20)) = 5$.

2. Soit $x^2 - x - 2 = 0$. Déterminer toutes les valeurs possibles de l'expression $1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2}$.

   Solution

   On a
$$1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} = \frac{x^2 - x - 2 - 4}{x^2}$$
   Puisque $x^2 - x - 2 = 0$, alors
$$\frac{x^2 - x - 2 - 4}{x^2} = -\frac{4}{x^2}$$
   On factorise pour obtenir $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0$. Donc, $x = 2$ ou $x = -1$. Donc, les valeurs possibles de l'expression sont -1 et -4.

3. Soit $x^2 = 8x + y$ et $y^2 = x + 8y$ avec $x \neq y$. Déterminer la valeur de $x^2 + y^2$.

   Solution

   On additionne les deux équations pour obtenir $x^2 + y^2 = 9x + 9y$. Lorsque l'on soustrait la seconde équation de la première, on obtient $x^2 - y^2 = 7x - 7y$. On factorise chaque membre de l'équation pour obtenir $(x - y)(x + y) = 7(x - y)$. Puisque $x \neq y$, alors $x - y \neq 0$. On peut donc diviser chaque membre de l'équation par $x - y$ pour obtenir $x + y = 7$. Donc, $x^2 + y^2 = 9(x + y) = 9(7) = 63$.

4. La parabole définie par $y = x^2$ subit une translation de manière que ses abscisses à l'origine soient $-d$ et e et son ordonnée à l'origine soit $-f$, $(d > 0,\ e > 0,\ f > 0)$. Démontrer que $de = f$.

   Solution 1 (élégante)

   Puisque les abscisses à l'origine de l'image sont $-d$ et e, la nouvelle parabole a une équation de la forme $y = a(x + d)(x - e)$. De plus, comme $y = x^2$ n'a subi qu'une translation comme transformation, alors $a = 1$. Pour obtenir l'ordonnée à l'origine, posons $x = 0$. L'équation devient $-f = -de$, d'où $de = f$.

   Solution 2 (ardue)

   Soit $y = ax^2 + bx + c$ l'équation de l'image. Comme la parabole initiale n'a subi qu'une translation comme transformation, alors $a = 1$. On détermine les abscisses à l'origine et l'ordonnée à l'origine: $e = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$, $-d = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$ et $-f = c$. On multiplie ces deux expressions pour obtenir $-de = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2} \cdot \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2} = \dfrac{b^2-b^2+4c}{4} = c = -f$, ce qu'il fallait démontrer.

5. Déterminer toutes les valeurs de x qui vérifient $x + \dfrac{36}{x} \geq 13$.

Solution

Remarquons d'abord qu'on doit avoir $x \neq 0$. Si $x > 0$, on multiplie chaque membre de l'inéquation par x pour obtenir $x^2 - 13x + 36 \geq 0$ ou $(x-4)(x-9) \geq 0$. On a deux cas à considérer. Dans le premier cas, $x-4 \geq 0$ et $x-9 \geq 0$, tandis que dans le second cas, $x-4 \leq 0$ et $x-9 \leq 0$.

Dans le premier cas, on combine les deux inéquations pour obtenir $x \geq 9$. Dans le second cas, on combine les deux inéquations pour obtenir $x \leq 4$. On a également $x > 0$, d'où on a donc $0 < x \leq 4$ ou $x \geq 9$.

Si $x < 0$, le membre de gauche de l'inéquation est négatif, ce qui signifie que sa valeur n'est pas supérieure à 13. Donc, $0 < x \leq 4$ ou $x \geq 9$.

6. Lorsqu'on divise un polynôme par $x-3$, on obtient un reste de 5. Lorsqu'on le divise par $x+1$, on obtient un reste de -7. Quel reste obtient-on lorsqu'on le divise par x^2-2x-3?

Solution

Lorsqu'on divise un polynôme par un polynôme du second degré, le reste est un polynôme de degré 0 ou 1. Donc, on récrit la divison comme telle:

$$p(x) = (x^2-2x-3)q(x) + ax + b \qquad (*)$$

$p(x)$ étant le polynôme, $q(x)$ étant le quotient de la division et $ax+b$ étant le reste. D'après le théorème du reste, $p(3) = 5$ et $p(-1) = -7$. De plus, on remarque que $x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$. Donc, on reporte $x = 3$ et -1 dans $(*)$ pour obtenir

$$p(3) = 5 = 3a + b$$
$$p(-1) = -7 = -a + b$$

On résout ce système d'équations pour obtenir $a = 3$ et $b = -4$. Le reste est donc égal à $3x - 4$.

Trousse de problèmes

1. Déterminer toutes les solutions réelles (x, y) du système d'équations:

$$x^2 - xy + 8 = 0$$
$$x^2 - 8x + y = 0$$

2. La parabole d'équation $y = (x-1)^2 - 4$ coupe l'axe des abscisses aux points P et Q. Soit (a, b) le milieu du segment PQ. Déterminer la valeur de a.

3. (a) L'équation $y = x^2 + 2ax + a$ définit une parabole particulière pour chaque valeur réelle de a. Démontrer que toutes ces paraboles passent par un même point et déterminer les coordonnées de ce point.

   (b) Les sommets de ces paraboles sont situés sur une courbe. Démontrer que cette courbe est elle-même une parabole dont le sommet est le point commun déterminé dans la partie (a).

4. Déterminer toutes les valeurs réelles de p et de r qui vérifient le système d'équations suivant:

$$p + pr + pr^2 = 26$$
$$p^2r + p^2r^2 + p^2r^3 = 156$$

5. Soit une équation quadratique $ax^2+bx+c = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$) qui admet des racines réelles. Démontrer que a, b, et c ne peuvent pas être des termes consécutifs d'une suite géométrique.

6. Soit une équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b et c étant des entiers et $a \neq 0$) dont les racines sont des entiers. Résoudre l'équation, sachant que a, b et c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

7. Résoudre l'équation $(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 1 = x$.

8. La parabole d'équation $y = (x-2)^2 - 16$ a pour sommet A. Soit B le point qui correspond à la plus grande des abscisses à l'origine. Déterminer l'équation de la droite qui passe aux points A et B.

9. Résoudre l'équation $(x - b)(x - c) = (a - b)(a - c)$ en fonction de a, de b et de c.

10. Sachant que $x = -2$ est une racine de l'équation $x^3 - 7x - 6 = 0$, déterminer les deux autres racines.

11. Déterminer la valeur de a pour laquelle l'équation $4x^2 + 4(a-2)x - 8a^2 + 14a + 31 = 0$ admet des racines réelles dont la somme des carrés est un minimum.

12. Soit $f(x) = \dfrac{3x-7}{x+1}$. Soit g la fonction réciproque de f. Déterminer la valeur de $g(2)$.

13. Soit une fonction définie par $y = -2x^2 - 4ax + k$. Déterminer la valeur de k, sachant que le point $(-2, 7)$ est le point maximum du graphique.

14. Soit a et b les racines de l'équation $x^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) et soit c et d les racines de l'équation $x^2 + ax + b = 0$ ($c \neq 0$, $d \neq 0$). Déterminer la valeur de $a + b + c + d$.

15. Soit $y = x^2 - 2x - 3$. Déterminer la valeur minimale de l'expression $\dfrac{y-4}{(x-4)^2}$.

16. Soit g une fonction qui vérifie $g(x) = 2x - 4$ pour tout nombre réel x et soit g^{-1} la fonction réciproque de g. Soit f une fonction qui vérifie l'équation $g(f(g^{-1}(x))) = 2x^2 + 16x + 26$ pour tout nombre réel x. Quelle est la valeur de $f(\pi)$?