Logarithmes et exposants

Boîte à outils

Exposants

Soit a, b, x et y des nombres réels et n un entier tel que $n \geq 2$. Voici les lois des exposants:

- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $a^0 = 1$, si $a \neq 0$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$, si $a \neq 0$
- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, si $a \neq 0$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$, si $b \neq 0$

De plus, 0^0 n'est pas défini s'il survient dans n'importe laquelle de ces formules.

Logarithmes

Soit x et y des nombres réels strictement positifs. Soit a un nombre réel strictement positif tel que $a \neq 1$. L'équation $y = a^x$ est équivalente à $\log_a y = x$. Voici les lois des logarithmes:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^y) = y \log_a x$
- $\log_a(a^x) = x$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$ avec $x \neq 1$
- $\log_y x = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$

Exemples de problèmes

1. Étant donné l'équation $2\log_5(x-3y) = \log_5(2x) + \log_5(2y)$, calculer la valeur de $\frac{x}{y}$.

   Solution

   D'abord, remarquons que les arguments des trois termes logarithmiques de l'équation initiale doivent être strictement positifs pour que ces termes soient définis. Donc $x > 0$, $y > 0$ et $x > 3y$. On a

$$\begin{aligned} 2\log_5(x-3y) &= \log_5(2x) + \log_5(2y) \\ \log_5(x-3y)^2 &= \log_5(4xy). \end{aligned}$$

   Puisqu'une fonction logarithmique est croissante, l'égalité précédente indique que les arguments sont égaux. Donc,

$$\begin{aligned} (x-3y)^2 &= 4xy \\ x^2 - 6xy + 9y^2 &= 4xy \\ x^2 - 10xy + 9y^2 &= 0 \\ (x-y)(x-9y) &= 0 \end{aligned}$$

   Donc $\frac{x}{y} = 1$ ou $\frac{x}{y} = 9$. Or, d'après les restrictions, $\frac{x}{y} > 3$. Donc, $\frac{x}{y} = 9$.

2. Déterminer toutes les solutions de l'équation

$$9(7^k + 7^{k+2}) = 5^{m+3} + 5^m$$

   m et k étant des entiers.

   Solution

   On factorise chaque membre de l'équation pour obtenir:

$$\begin{aligned} 9(1+7^2)7^k &= 5^m(1+5^3) \\ 9(50)7^k &= 5^m(126) \\ 3^2 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 7^k &= 5^m \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

   Puisque chaque membre de l'équation est un produit de nombres premiers et que la factorisation première d'un entier est unique, alors la seule solution est $m = 2$ et $k = 1$.

3. Déterminer les points d'intersection des courbes définies par $y = \log_{10}(x-2)$ et $y = 1 - \log_{10}(x+1)$.

   Solution

   Puisque l'argument de chaque terme logarithmique doit être strictement positif, alors $x - 2$ et $x + 1$ doivent être positifs, d'où $x > 2$. On a

$$\begin{aligned} \log_{10}(x-2) &= 1 - \log_{10}(x+1) \\ \log_{10}(x-2) + \log_{10}(x+1) &= 1 \\ \log_{10}[(x-2)(x+1)] &= 1 \\ (x-2)(x+1) &= 10 \\ x^2 - x - 2 &= 10 \\ x^2 - x - 12 &= 0 \\ (x-4)(x+3) &= 0 \end{aligned}$$

   Donc $x = 4$ ou $x = -3$. Or, cette dernière est rejetée puisque l'on doit avoir $x > 2$. Donc, $x = 4$. Le point d'intersection est $(4, \log_{10} 2)$ ou $(4, 1 - \log_{10} 5)$. Puisque $\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = 1$, ces réponses sont équivalentes.

4. Déterminer toutes les valeurs de x qui vérifient $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$.

   Solution

   Puisque l'argument d'un logarithme doit être strictement positif, alors $9 > 2^x$.

$$\begin{aligned} \log_2(9 - 2^x) &= 3 - x \\ 9 - 2^x = 2^{3-x} &= \frac{8}{2^x} \end{aligned}$$

   On reporte $y = 2^x$ dans cette équation pour obtenir:

$$\begin{aligned} 9 - y &= \frac{8}{y} \\ y^2 - 9y + 8 &= 0 \\ (y-1)(y-8) &= 0 \end{aligned}$$

   Donc, $y = 1$ ou $y = 8$. On reporte ces valeurs dans l'équation $y = 2^x$ pour obtenir respectivement $x = 0$ et $x = 3$. Puisque chacune de ces valeurs satisfait à la restriction, les solutions sont $x = 0$ et $x = 3$.

5. La représentation graphique de $y = m^x$ passe aux points $(2, 5)$ et $(5, n)$. Quelle est la valeur de mn?

   Solution

   D'après l'énoncé du problème, on a $m^2 = 5$ et $n = m^5$. Donc, $m = \pm\sqrt{5}$, que l'on reporte dans $n = m^5$ pour obtenir $n = (\pm\sqrt{5})^5$. Donc, $mn = (\sqrt{5})^6 = 125$.

Trousse de problèmes

1. Déterminer les valeurs de x qui vérifient $\log_x 2 + \log_x 4 + \log_x 8 = 1$.
2. Déterminer les valeurs de x qui vérifient $12^{2x+1} = 2^{3x+7} \cdot 3^{3x-4}$.
3. Déterminer la somme de la série suivante:
$$\log_{10}\frac{3}{2} + \log_{10}\frac{4}{3} + \log_{10}\frac{5}{4} + \cdots + \log_{10}\frac{200}{199}$$
4. Déterminer les valeurs de x et y qui vérifient $x^3y^5 = 2^{11} \cdot 3^{13}$ et $\dfrac{x}{y^2} = \dfrac{1}{27}$.
5. Soit $\log_8 3 = k$. Exprimer $\log_8 18$ sous la forme $ak + b$, a et b étant des nombres rationnels.
6. Déterminer le(s) point(s) d'intersection des courbes définies par $y = \log_2(2x)$ et $y = \log_4 x$.
7. Soit $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ deux points sur la courbe définie par $y = \log_a x$. On considère une droite horizontale qui passe au milieu du segment AB. Cette droite coupe la courbe au point $C(x_3, y_3)$. Démontrer que $(x_3)^2 = x_1x_2$.
8. La courbe définie par $y = ax^r$ passe aux points $(2, 1)$ et $(32, 4)$. Déterminer la valeur de r.
9. Soit $2^{x+3} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$, x et y étant des entiers. Déterminer les valeurs de x et de y.
10. Soit $f(x) = 2^{4x-2}$. Déterminer une expression simplifiée pour $f(x) \cdot f(1-x)$.
11. Déterminer toutes les valeurs de x qui vérifient $\log_5(x-2) + \log_5(x-6) = 2$.
12. Soit x un nombre réel strictement positif tel que $x \neq 1$. Démontrer que a, b et c sont trois nombres qui forment une suite géométrique si et seulement si $\log_x a$, $\log_x b$ et $\log_x c$ forment une suite arithmétique.
13. Déterminer toutes les valeurs réelles de x qui vérifient
$$3^{x+2} + 2^{x+2} + 2^x = 2^{x+5} + 3^x$$
14. Déterminer tous les nombres réels x qui vérifient
$$(\log_{10} x)^{\log_{10}(\log_{10} x)} = 10000$$
15. Déterminer tous les nombres réels $x > 0$ qui vérifient
$$\log_4 x - \log_x 16 = \frac{7}{6} - \log_x 8$$