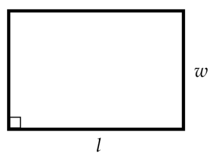
Géométrie euclidienne

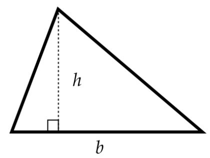
Boîte à outils

Aire

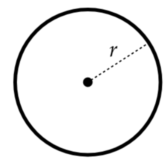
- $A_{\text{Rectangle}} = l \times w$



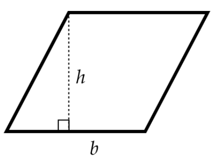
- $A_{\text{Triangle}} = \frac{1}{2}(b \times h)$



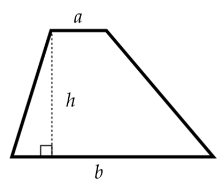
- $A_{\text{Cercle}} = \pi r^2$



- $A_{\text{Parallélogramme}} = b \times h$



- $A_{\text{Trapèze}} = \frac{1}{2}(a + b)h$

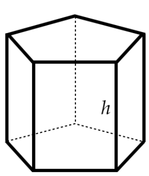


Remarque: Le périmètre d'un cercle est égal à $2\pi r$.

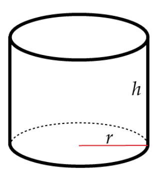
- L'aire d'un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur s est égale à $\dfrac{\sqrt{3}s^2}{4}$.
- La formule de Héron - L'aire d'un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b et c est égale à $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ où $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Volume

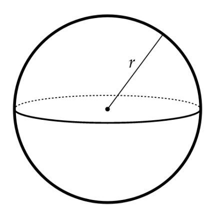
- $V_{\text{Prisme}} = A_{\text{Base}} \times h$



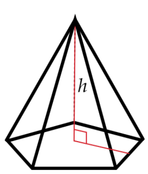
- $V_{\text{Cylindre}} = \pi r^2 h$



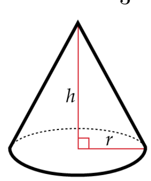
- $V_{\text{Sphère}} = \frac{4}{3}\pi r^3$



- $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_{\text{Base}} \times h$



- $V_{\text{Cone}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$

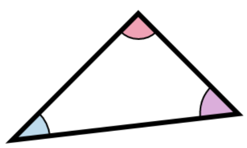
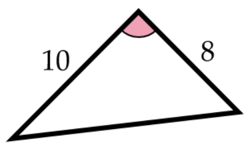
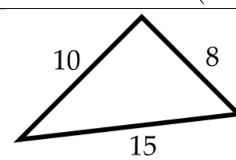
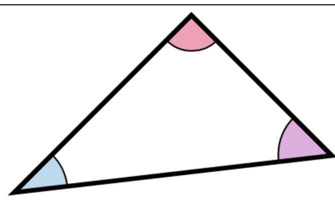
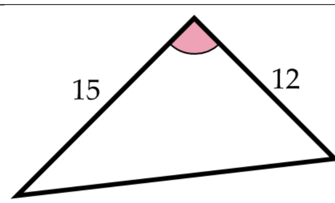
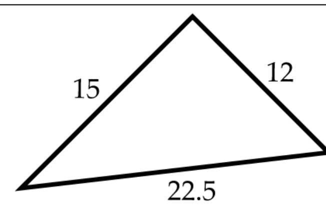


Théorème de Pythagore

- Pour un triangle rectangle ayant des côtés de longueurs a, b et c, c étant la longueur de l'hypoténuse, on a $a^2 + b^2 = c^2$.
- Les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs qui satisfont à cette relation sont appelés des *triplets pythagoriciens*. Les triplets $(3, 4, 5)$, $(7, 24, 25)$ et $(5, 12, 13)$ en sont des exemples communs.

Similitude et isométrie

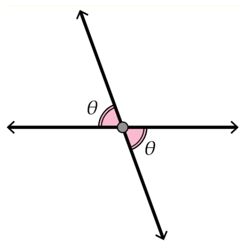
- Deux polygones sont dits semblables lorsque leurs angles homologues sont congrus. Ces polygones sont également isométriques si leurs côtés homologues sont congrus.
- Deux triangles sont semblables s'ils satisfont l'une des propriétés suivantes:
  - Similitude Angle-Angle: Les triangles ont deux paires d'angles homologues congrus.
  - Similitude Côté-Angle-Côté: Les triangles ont une paire d'angles congrus compris entre 2 paires de côtés homologues proportionnels.
  - Similitude Côté-Côté-Côté: Les triangles ont trois paires de côtés homologues proportionnels.

<table>
<tr><th>Angle-Angle (AA)</th><th>Côté-Angle-Côté (CAC)</th><th>Côté-Côté-Côté (CCC)</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

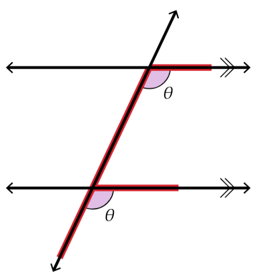
Angles

- La somme des mesures des angles intérieurs d'un polygone à n côtés est égale à $((n-2)\times 180)°$ ou $(180n-360)°$.
- Tous les angles intérieurs d'un polygone régulier sont congrus.
- Un trapèze a deux paires d'angles supplémentaires.
- Un parallélogramme a des angles opposés qui sont égaux et des angles consécutifs qui sont supplémentaires.
- Les angles qui forment une ligne droite et qui partagent un sommet ont une somme de $180°$.
- Si la somme de deux angles est égale à $90°$, ces angles sont dits *complémentaires*.

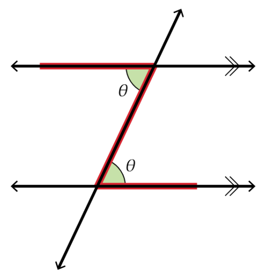
- Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure



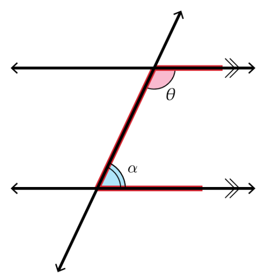
- Deux droites parallèles coupées par une sécante forment des angles correspondants de même mesure.



- Deux droites parallèles coupées par une sécante forment des angles alternes-internes de même mesure.

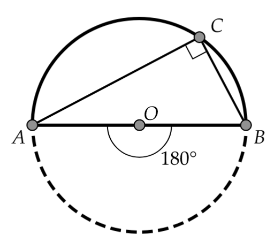


- Les angles représentés dans la figure ci-dessous (qui sont parfois appelés angles co-internes) ont une somme de 180°.

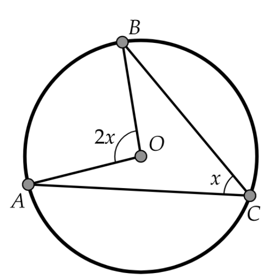


Propriétés du cercle

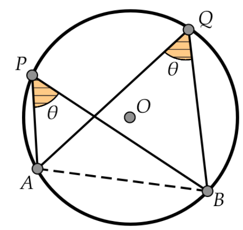
- L'aire d'un secteur ayant un angle au centre de $\theta°$ peut être obtenue à l'aide de la formule $A_{\text{secteur}} = \dfrac{\theta}{360}\pi r^2$, r étant le rayon du cercle. L'arc formé a une longueur de $s = \dfrac{\theta}{360}2\pi r$.
- L'angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit.



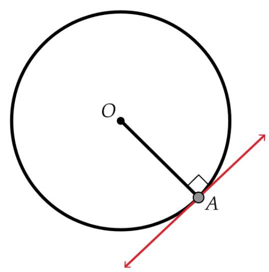
- Dans un cercle, un angle au centre qui intercepte un arc AB est deux fois plus grand que n'importe quel angle inscrit qui intercepte le même arc.



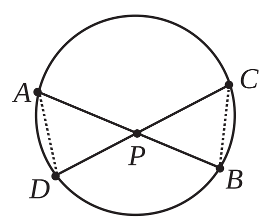
- Les angles inscrits qui interceptent le même arc sont congrus.



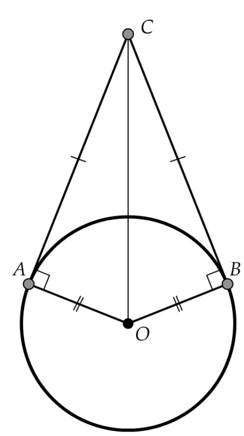
- Toute tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon du cercle passant par le point de contact.



- Si deux cordes AB et CD d'un cercle se coupent en un point P alors $(PA)(PB) = (PC)(PD)$.

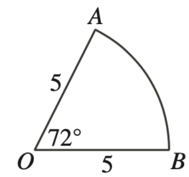


- Les tangentes issues d'un même point à l'extérieur d'un cercle ont la même longueur.



Exemples de problèmes

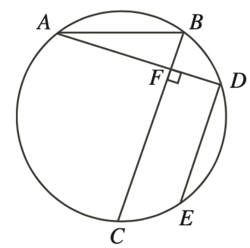
1. Quel est le périmètre du secteur circulaire ci-contre de centre O, de rayon 5 et dont l'angle AOB mesure $72°$?



Solution:

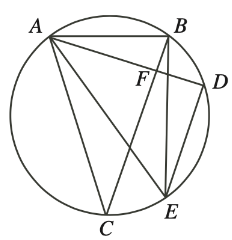
Le périmètre du secteur est constitué de deux segments de droite (d'une longueur totale de $5 + 5 = 10$) et d'un arc de cercle. Puisque $\dfrac{72°}{360°} = \dfrac{1}{5}$, la longueur de l'arc du secteur est égale à $\dfrac{1}{5}$ de la circonférence d'un cercle de rayon 5. La longueur de l'arc est donc égale à $\dfrac{1}{5}(2\pi(5)) = 2\pi$. Le périmètre du secteur est donc égal à $10 + 2\pi$.

2. Dans la figure ci-contre, AB et BC sont des cordes du cercle de manière que $AB < BC$. Si D est le point du cercle pour lequel AD est perpendiculaire à BC et E est le point du cercle pour lequel DE est parallèle à BC, démontrer que $\angle EAC + \angle ABC = 90°$.



Solution 1:

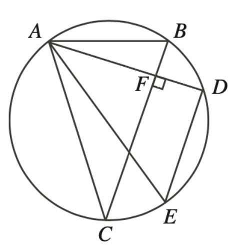
On trace les segments AC, AE et BE.



Puisque DE est parallèle à BC et que AD est perpendiculaire à BC, alors AD est perpendiculaire à DE, c'est-à-dire que $\angle ADE = 90°$. Donc, AE est un diamètre. Or, les angles EAC et EBC sont congrus, puisqu'ils interceptent le même arc EC.
Donc, $\angle EAC + \angle ABC = \angle EBC + \angle ABC = \angle EBA$. Ce dernier mesure $90°$, puisque AE est un diamètre.

Solution 2:

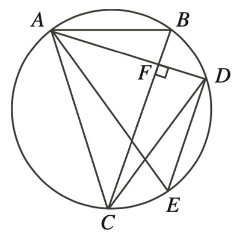
On trace les segments AC et AE.



Puisque DE est parallèle à BC et que AD est perpendiculaire à BC, alors AD est perpendiculaire à DE, c'est-à-dire que $\angle ADE = 90^\circ$. Donc, AE est un diamètre. Donc, $\angle ECA = 90^\circ$. Or, les angles ABC et AEC sont congrus, puisqu'ils interceptent le même arc AC. Donc $\angle EAC + \angle ABC = \angle EAC + \angle AEC = 180^\circ - \angle ECA$, d'après la somme de la mesure des angles du triangle AEC. Puisque $\angle ECA = 90^\circ$, alors $\angle EAC + \angle AEC = 90^\circ$.

Solution 3:

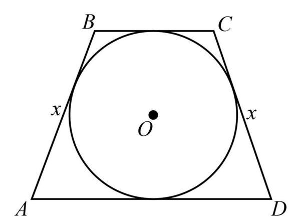
On trace les segments AC, AE et CD.



Puisque DE est parallèle à BC et que AD est perpendiculaire à BC, alors AD est perpendiculaire à DE, c'est-à-dire que $\angle ADE = 90^\circ$. Donc, AE est un diamètre. Or, les angles ABC et ADC sont congrus, puisqu'ils interceptent le même arc AC. De plus, les angles EAC et EDC sont congrus, puisqu'ils interceptent le même arc EC.

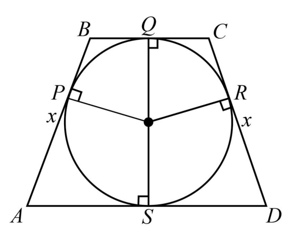
Donc, $\angle EAC + \angle ABC = \angle EDC + \angle ADC = \angle ADE = 90^\circ$.

3. On considère un trapèze isocèle $ABCD$, ayant une aire de 80 unités carrés et tel que $AB = CD = x$. Un cercle de centre O et de rayon 4 est tangent aux quatre côtés du trapèze. Déterminer la valeur de x.



Solution:

On nomme les points de tangence P, Q, R et S et on les relie au centre du cercle.



Chacun de ces segments de droite est un rayon du cercle. Donc, chacun des segments est perpendiculaire aux côtés du trapèze car les côtés du trapèze sont tangents au cercle. Les côtés BC et AD sont parallèles et les côtés QO et OS sont également parallèles. Donc, QS est un diamètre du cercle. Donc, la hauteur du trapèze est égale à $QS = 2(4) = 8$.

On pose $BQ = b$ et $CQ = a$. Comme les segments tangents issus du même point à l'extérieur d'un cercle ont la même longueur, on obtient les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} BQ &= BP = b \\ AP &= AS = x - b \\ CQ &= CR = a \\ DR &= DS = x - a \end{aligned}$$

Donc,

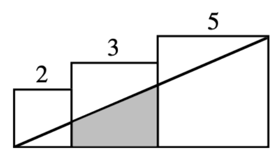
$$\begin{aligned} BC + AD &= BQ + QC + AS + SD \\ &= b + a + (x - b) + (x - a) \\ &= 2x \end{aligned}$$

L'aire du trapèze $ABCD$ est égale à

$$\frac{1}{2}(BC + AD) \times QS = \frac{1}{2}(2x) \times 8 = 8x$$

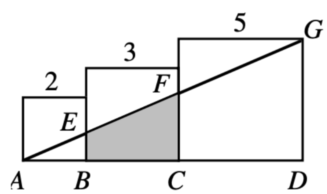
Puisque l'aire du trapèze $ABCD$ est égale à 80, on a $8x = 80$, d'où on a donc $x = 10$.

4. La figure ci-contre illustre trois carrés dont les dimensions sont indiquées. Quelle est l'aire du quadrilatère ombré?



Solution

Dans cette solution, on fait appel aux triangles semblables. On nomme des points comme dans la figure ci-dessous.



On veut calculer les longueurs des segments EB et FC, ce qui permettra de calculer l'aire des triangles AEB et AFC . Puisque FC est parallèle à GD, on a $\angle AFC = \angle AGD$ et $\angle ACF = \angle ADG$. De plus, les triangles AFC et AGD partagent l'angle A. Donc, d'après la propriété angle-angle (AA), les triangles AFC et AGD sont semblables. On a donc

$$\frac{AC}{AD} = \frac{FC}{GD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Donc, $FC = \frac{1}{2}GD = \frac{1}{2}(5) = \frac{5}{2}$.

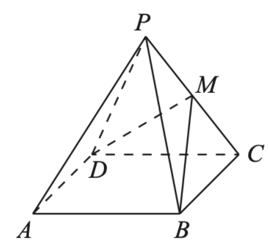
En utilisant un raisonnement similaire, les triangles AEB et AFC sont également semblables. Donc,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{FC} = \frac{2}{5}$$

Donc, $EB = \dfrac{2}{5}FC = \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{5}{2}\right) = 1$.

Donc, l'aire ombrée est égale à l'aire du triangle AFC moins l'aire du triangle AEB. L'aire du quadrilatère ombré est donc égale à $\dfrac{1}{2}(5)\left(\dfrac{5}{2}\right) - \dfrac{1}{2}(2)(1) = \dfrac{21}{4}$. (Une autre approche est de remarquer que le quadrilatère $EBCF$ est un trapèze dont la longueur de la base est de 3 et dont les côtés EB et FC mesurent respectivement 1 et $\dfrac{5}{2}$, d'où son aire est donc égale à $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{5}{2}\right)(3) = \dfrac{21}{4}$.)

5. Dans la figure ci-contre, $PABCD$ est une pyramide dont la base est le carré $ABCD$ et dont les arêtes sont telles que $PA = PB = PC = PD$. Supposons que M est le milieu de PC et que $\angle BMD = 90°$. On enlève de la pyramide $PABCD$ la pyramide à base triangulaire $MBCD$ en coupant le long du triangle défini par les points M, B et D. Le solide résultant $PABMD$ a un volume de 288. Quelle est la longueur de AB?



Solution: *(Ce problème présente un grand défi.)*

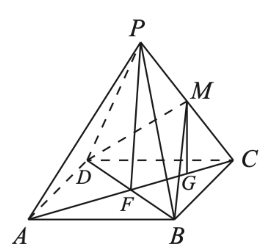
Soit $2a$ la longueur des côtés de la base carrée $ABCD$ et $2h$ la hauteur de la pyramide (la distance à laquelle P se trouve au-dessus de la base).

Soit F le point d'intersection des diagonales AC et BD de la base. Par symétrie, P est situé directement au-dessus de F; c'est-à-dire que PF est perpendiculaire au plan du carré $ABCD$.

On remarque que $AB = BC = CD = DA = 2a$ et que $PF = 2h$. On veut déterminer la valeur de $2a$.

Soit G le milieu de FC.

On joint P à F et M à G.



On considère les triangles PCF et MCG. Puisque M est le milieu de PC, alors $MC = \frac{1}{2}PC$. Puisque G est le milieu de FC, alors $GC = \frac{1}{2}FC$.

Puisque les triangles PCF et MCG ont un angle commun en C et que cet angle est entre deux paires de côtés homologues proportionnels, alors les triangles PCF et MCG sont semblables.

Puisque PF est perpendiculaire à FC, alors MG est perpendiculaire à GC.

De plus, $MG = \frac{1}{2}PF = h$ puisque les longueurs des côtés du triangle MCG sont moitié moins que celles du triangle PCF.

Le volume de la pyramide à base carrée $PABCD$ est égal à $\frac{1}{3}(AB^2)(PF) = \frac{1}{3}(2a)^2(2h) = \frac{8}{3}a^2h$.

On peut considérer que le triangle $MBCD$ a pour base le triangle rectangle BCD et pour hauteur MG.

Donc, le volume du triangle $MBCD$ est égal à $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CD\right)(MG) = \frac{1}{6}(2a)^2h = \frac{2}{3}a^2h$.

Donc, en fonction de a et h, le volume du solide $PABMD$ est égal à $\frac{8}{3}a^2h - \frac{2}{3}a^2h = 2a^2h$.

Puisque $PABMD$ a un volume de 288, alors $2a^2h = 288$ ou $a^2h = 144$.

On n'a pas encore utilisé le fait que $\angle BMD = 90^\circ$.

Puisque $\angle BMD = 90^\circ$, alors le triangle BMD est rectangle en M. Donc, $BD^2 = BM^2+MD^2$.

Par symétrie, $BM = MD$. Donc, $BD^2 = 2BM^2$.

Puisque le triangle BCD est rectangle en C, alors $BD^2 = BC^2 + CD^2 = 2(2a)^2 = 8a^2$.

Puisque le triangle BGM est rectangle en G, alors $BM^2 = BG^2 + MG^2 = BG^2 + h^2$.

Puisque le triangle BFG est rectangle en F (les diagonales du carré $ABCD$ sont égales et perpendiculaires), alors

$$\begin{aligned}
BG^2 &= BF^2 + FG^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 + \left(\frac{1}{4}AC\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}BD^2 + \frac{1}{16}AC^2 \\
&= \frac{1}{4}BD^2 + \frac{1}{16}BD^2 \\
&= \frac{5}{16}BD^2 \\
&= \frac{5}{2}a^2
\end{aligned}$$

Puisque $2BM^2 = BD^2$, alors $2(BG^2 + h^2) = 8a^2$, d'où $\frac{5}{2}a^2 + h^2 = 4a^2$ ou $h^2 = \frac{3}{2}a^2$, soit $a^2 = \frac{2}{3}h^2$.

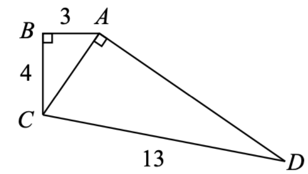
Puisque $a^2h = 144$, alors $\frac{2}{3}h^2\cdot h = 144$ ou $h^3 = 216$, d'où $h = 6$.

Puisque $a^2h = 144$, alors $6a^2 = 144$ ou $a^2 = 24$.

Puisque $a > 0$, alors $a = 2\sqrt{6}$. Donc, $AB = 2a = 4\sqrt{6}$.

Trousse de problèmes

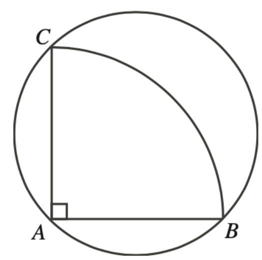
1. Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en B et le triangle ACD est rectangle en A. De plus, $AB = 3$, $BC = 4$ et $CD = 13$. Quelle est l'aire du quadrilatère $ABCD$?



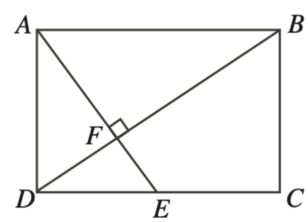
2. On considère un prisme droit à base rectangulaire. L'une de ses faces a une aire de 27 cm^2 tandis qu'une autre de ses faces a une aire de 32 cm^2. Sachant que le prisme a un volume de 144 cm^3, déterminer l'aire totale du prisme en cm^2.

3. Les rayons de deux cercles ont une somme de 10 cm. La circonférence du plus grand cercle a 3 cm de plus que celle du plus petit cercle. Déterminer la différence entre l'aire du grand cercle et celle du petit cercle.

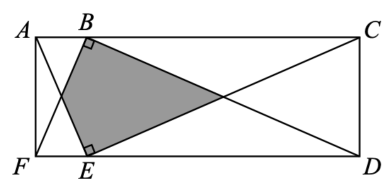
4. Dans la figure ci-contre, ABC est un quart d'une pizza circulaire de centre A et de rayon 20 cm. Comme l'indique la figure, le morceau de pizza est placé sur un plat circulaire de manière que les points A, B et C touchent au bord du plat. Quelle fraction du plat le morceau de pizza recouvre-t-il?



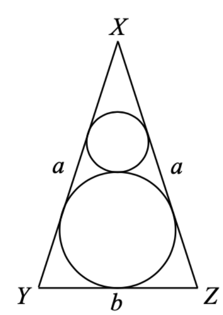
5. Dans le rectangle $ABCD$, le point E est situé sur le côté DC. Les segments AE et BD sont perpendiculaires et se coupent en F. Sachant que $AF = 4$ et $DF = 2$, déterminer l'aire du quadrilatère $BCEF$.



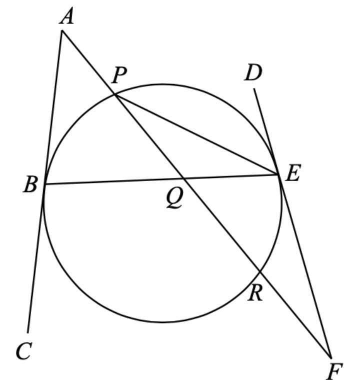
6. Dans la figure ci-contre, $ACDF$ est un rectangle, $AC = 200$ et $CD = 50$. De plus, les triangles FBD et AEC sont isométriques et sont respectivement rectangles en B et en E. Quelle est l'aire de la région ombrée?



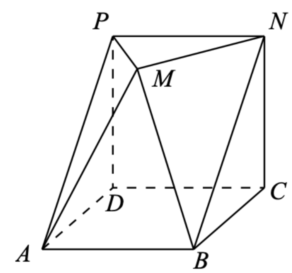
7. Dans la figure ci-contre, le triangle XYZ est isocèle, $XY = XZ = a$, $YZ = b$ et $b < 2a$. Un grand cercle de rayon R est inscrit dans le triangle (c.-à-d. que le cercle touche les trois côtés du triangle). Un petit cercle de rayon r est tracé de manière qu'il touche les côtés XY et XZ et le grand cercle. Déterminer une expression pour $\frac{R}{r}$ en fonction de a et b.



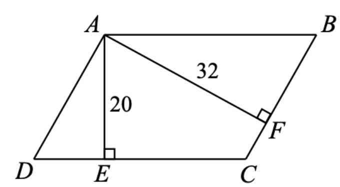
8. Dans la figure ci-contre, les segments de droites AC et DF sont tangents au cercle aux points respectifs B et E. De plus, AF coupe le cercle aux points P et R et il coupe BE en Q. Sachant que $\angle CAF = 35°$, $\angle DFA = 30°$ et $\angle FPE = 25°$, déterminer la mesure de l'angle PEQ.



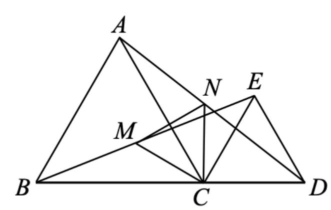
9. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ et $PNCD$ sont des carrés avec des côtés de longueur 2 et $PNCD$ est perpendiculaire à $ABCD$. Le point M est choisi du même côté de $PNCD$ que AB de manière que le triangle PMN soit parallèle à $ABCD$, que $\angle PMN = 90°$ et que $PM = MN$. Déterminer le volume du solide convexe $ABCDPMN$.



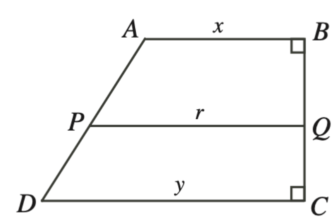
10. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme. Le point E est situé sur DC de manière que AE soit perpendiculaire à DC et le point F est situé sur CB de manière que AF soit perpendiculaire à CB. Sachant que $AE = 20$, $AF = 32$ et $\cos(\angle EAF) = \frac{1}{3}$, déterminer l'aire exacte du quadrilatère $AECF$.



11. Dans la figure ci-contre, le point C est situé sur le segment BD, le point M est le milieu du segment BE et le point N est le milieu du segment AD. De plus, les triangles ABC et ECD sont équilatéraux. Démontrer que le triangle MNC est équilatéral.



12. Dans la figure ci-contre, les côtés AB et DC du trapèze $ABCD$ sont parallèles. De plus, le côté BC est perpendiculaire à AB et à DC. Le segment PQ est parallèle à AB et il divise le trapèze en deux régions de même aire. Soit $AB = x$, $DC = y$ et $PQ = r$. Démontrer que $x^2 + y^2 = 2r^2$.



13. Dans la figure ci-contre, le carré $WXYZ$ a des côtés de longueur 6. Il est placé à l'intérieur du carré $EFGH$, qui a des côtés de longueur 10, de manière que les carrés ne se touchent pas et que WX soit parallèle à EF. Démontrer que la somme de l'aire du trapèze $EFXW$ et de l'aire du trapèze $GHZY$ ne dépend pas de la position du carré $WXYZ$ à l'intérieur du carré $EFGH$.