Géométrie analytique

Boîte à outils

Voici quelques formules et équations utiles complémentaires au matériel sur les paraboles dans l'atelier qui traite des fonctions, équations et polynômes:

Description	**Formule ou équation**
Pente d'une droite passant par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2)	$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Deux droites perpendiculaires ayant pour pentes m_1 et m_2	$m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$
Équation cartésienne d'une droite ayant pour pente $-\dfrac{A}{B}$, pour abscisse à l'origine $-\dfrac{C}{A}$ et pour ordonnée à l'origine $-\dfrac{C}{B}$	$Ax + By + C = 0$
Équation d'une droite de pente m qui passe par le point (x_0, y_0)	$y - y_0 = m(x - x_0)$
Équation d'une droite qui passe par les points $(a, 0)$ et $(0, b)$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$
Coordonnées du milieu du segment de droite ayant pour extrémités $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$	$\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$
Distance D entre les points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$	$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
Distance (minimale) D entre la droite $Ax + By + C = 0$ et le point (x_0, y_0)	$D = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + C\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
Aire d'un triangle ayant pour sommets $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ et $C(x_3,y_3)$	$\dfrac{1}{2}\lvert x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3\rvert$
Équation du cercle de centre (h, k) et de rayon r	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Exemples de problèmes

1. On fait subir à la droite d'équation $2x - 3y - 6 = 0$ une réflexion par rapport à la droite d'équation $y = -x$. Déterminer l'équation de l'image.

   Solution

   Rappelez-vous qu'après une réflexion, la distance entre l'image d'un point et l'axe de réflexion est égale à la distance entre le point initial et l'axe de réflexion. Donc, le segment de droite reliant un point à son image est perpendiculaire à l'axe de réflexion et le milieu de ce segment est situé sur l'axe de réflexion.

   La droite d'équation $2x-3y-6 = 0$ a pour abscisse à l'origine $(3, 0)$ et pour ordonnée à l'origine $(0, -2)$. Lorsqu'une droite subit une réflexion, son image est naturellement une autre droite. Partant de ce principe, on fait subir une réflexion aux deux points puis on détermine l'équation de la droite passant par leurs images. Lorsqu'on fait subir au point $(3, 0)$ une réflexion par rapport à la droite $y = -x$, on obtient une image ayant pour coordonnées $(0, -3)$. Ce résultat s'explique par le fait que le segment de droite reliant $(3, 0)$ et $(0, -3)$ a pour pente 1, ce qui le rend perpendiculaire à $y = -x$, et que le milieu de ce segment de droite est situé sur la droite d'équation $y = -x$ et a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. De même, lorsqu'on fait subir au point $(0, -2)$ une réflexion par rapport à la droite d'équation $y = -x$, on obtient une image ayant pour coordonnées $(2, 0)$. Étant donné que la droite passe par $(0, -3)$ et $(2, 0)$, la droite a pour pente $\frac{3}{2}$ et a pour équation $y = \frac{3}{2}x - 3$ ou $3x - 2y - 6 = 0$.

2. Soit deux points $A(3, 5)$ et $B(11, 11)$. Déterminer le(s) point(s) P, sur l'axe des abscisses, de manière que le triangle ABP ait une aire de 30.

   Solution 1

   La longueur de AB est égale à $\sqrt{(11-3)^2 + (11-5)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. La pente de la droite passant par A et B est égale à $\frac{11-5}{11-3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Donc, la droite a pour équation $y - 11 = \frac{3}{4}(x - 11)$ ou $3x - 4y + 11 = 0$. Si l'on considère AB comme étant la base du triangle, alors la distance du point $P(a,\ 0)$ à la droite AB représente la hauteur du triangle. Cette distance est donc égale à $\frac{30(2)}{10} = 6$. Donc,

$$\begin{aligned}\frac{|3a - 4(0) + 11|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} &= 6 \\ 3a + 11 &= \pm 30 \\ a &= -\frac{41}{3} \text{ ou } \frac{19}{3}\end{aligned}$$

   Les points ont donc pour coordonnées $\left(\frac{19}{3}, 0\right)$ et $\left(-\frac{41}{3}, 0\right)$.

Solution 2

Soit $P = (p, 0)$. Selon la formule permettant de calculer l'aire d'un triangle dont on connaît les coordonnées des sommets, on a:

$$\begin{aligned} \text{l'aire du triangle } ABP &= \frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3| \\ &= \frac{1}{2}|33 + 0 + 5p - 55 - 11p - 0| \\ &= |-22 - 6p| \end{aligned}$$

Donc $|-22-6p| = 60$, d'où $p = \dfrac{19}{3}$ ou $p = -\dfrac{41}{3}$.

Les points ont donc pour coordonnées $\left(\dfrac{19}{3}, 0\right)$ et $\left(-\dfrac{41}{3}, 0\right)$

3. Étant donné deux cercles, le segment de droite reliant leurs points d'intersection est appelé leur *corde commune*. On peut établir que cette corde est perpendiculaire au segment de droite qui joint les centres des deux cercles. (Sauriez-vous démontrer cela?) Pour les cercles définis par les équations $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 - 6x + 2 = 0$, déterminer la longueur de leur corde commune.

   Solution

   Le premier cercle a pour centre (0, 0) et pour rayon 2. En complétant le carré, on peut écrire l'équation du second cercle sous la forme:

$$(x - 3)^2 + y^2 = 7$$

   Donc, le second cercle a pour centre (3, 0) et pour rayon $\sqrt{7}$. Puisque le segment qui joint les centres est horizontal, la corde commune est verticale. On peut déterminer les points d'intersection des cercles en résolvant l'équation suivante:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4 &= x^2 + y^2 - 6x + 2 \\ 6x &= 6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

   On reporte $x = 1$ dans l'équation d'un cercle ou de l'autre pour obtenir les points d'intersection $(1, \pm\sqrt{3})$. Donc, la corde commune a une longueur de $2\sqrt{3}$.

4. Une droite, qui a une pente de -2, est située à 2 unités de l'origine. Quelle est l'aire du triangle formé par la droite et les axes?

   Solution

   Soit k l'abscisse à l'origine de la droite. Puisque la droite a une pente de -2, son ordonnée à l'origine est égale à $2k$ et son équation est donc $2x + y - 2k = 0$. D'après la formule de la distance entre un point et une droite, la distance entre cette droite et le point (0, 0) est égale à $\left|\dfrac{2k}{\sqrt{5}}\right|$. Étant donné que cette distance est égale à 2, on a donc $k = \pm\sqrt{5}$. On considère la base du triangle comme étant la distance entre l'origine et l'abscisse à l'origine. Cette distance est égale à $|k| = \sqrt{5}$. On considère la hauteur du triangle comme étant la distance entre l'origine et l'ordonnée à l'origine. Cette distance est égale à $|2k| = 2\sqrt{5}$. Donc, l'aire du triangle formé par la droite et les axes est égale à $\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 5$.

Trousse de problèmes

1. Soit le triangle OCD, où $O(0,0)$, $C(9,0)$ et $D(8,4)$. Une droite verticale coupe le triangle en deux régions de même aire. Déterminer l'équation de la droite.

2. Déterminer les valeurs de c pour lesquelles la droite d'équation $y = x + c$ est tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 8$.

3. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles les cercles d'équations $x^2 + y^2 = k^2$ et $(x-5)^2 + (y+12)^2 = 49$ se coupent en un seul point.

4. Un cercle coupe les axes aux points $A(0,10)$, $O(0,0)$ et $B(8,0)$. Une droite, qui passe au point $P(2,-3)$, coupe le cercle en moitiés. Déterminer l'ordonnée à l'origine de la droite.

5. Le triangle ABC a pour sommets $A(0,0)$, $B(3,3)$ et $C(-4,4)$. Déterminer l'équation de la bissectrice de l'angle CAB.

6. Déterminer la pente et la longueur des deux tangentes au cercle d'équation $(x-3)^2+(y-4)^2 = 4$ menées à l'origine.

7. Déterminer l'équation de l'ensemble des points qui sont équidistants des points $C(0,3)$ et $D(6,0)$.

8. Le quadrilatère $KWAD$ est tel que le sommet K est à l'origine, D est sur la partie positive de l'axe des abscisses et les sommets A et W sont situés dans le quadrant I. Soit M et N les milieux respectifs des côtés KW et AD. Si $MN = \frac{1}{2}(AW + DK)$, démontrer que les côtés AW et KD sont parallèles.

9. Le point A est situé sur la droite d'équation $4x + 3y - 48 = 0$ et le point B est situé sur la droite d'équation $x + 3y + 10 = 0$. Sachant que le milieu du segment AB a pour coordonnées $(4,2)$, déterminer les coordonnées de A et de B.