Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2024

(9$^{\text{e}}$ année – Secondaire III)

le mercredi 28 février 2024
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 29 février 2024
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

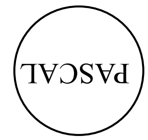
Solutions

1. On a $2 - 0 + 2 - 4 = 2 + 2 - 4 = 0$.

Réponse : (B)

2. La distance entre deux nombres sur la droite numérique est égale à leur différence positive.
On a donc $6 - (-5) = 11$.

Réponse : (D)

3. Étant donné qu'un tour de 180° équivaut à un demi-tour, la figure obtenue est 

.

(Remarquons que l'on obtient le même résultat en faisant tourner la figure de 180° dans le sens des aiguilles d'une montre ou de 180° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.)

Réponse : (C)

4. Puisque le 1er juillet est un mercredi, alors les 8 et 15 juillet sont également des mercredis.
Puisque le 15 juillet est un mercredi, alors le 17 juillet est un vendredi.

Réponse : (D)

5. Le premier et le dernier losange ont chacun trois côtés qui constituent une partie du périmètre de la figure. Chacun de ces losanges contribue donc 3 au périmètre de la figure.
Les quatre autres losanges ont chacun deux côtés qui constituent une partie du périmètre de la figure. Chacun de ces losanges contribue donc 2 au périmètre.
Donc, la figure a un périmètre de $2 \times 3 + 4 \times 2 = 14$.

Réponse : (B)

6. Lundi, Narsa a mangé 4 biscuits.
Mardi, Narsa a mangé 12 biscuits.
Mercredi, Narsa a mangé 8 biscuits.
Jeudi, Narsa a mangé 0 biscuits.
Vendredi, Narsa a mangé 6 biscuits.
Cela signifie que Narsa a mangé $4 + 12 + 8 + 0 + 6 = 30$ biscuits.
Étant donné que le paquet contenait initialement 45 biscuits, il reste $45 - 30 = 15$ biscuits dans le paquet après vendredi.

Réponse : (D)

7. Pour qu'il y ait un nombre égal de bonbons de chaque couleur, il doit y avoir au plus 3 bonbons rouges et au plus 3 bonbons jaunes (puisqu'il y a déjà 3 bonbons bleus au départ).
Donc, Shuxin a mangé au moins 7 bonbons rouges et au moins 4 bonbons jaunes.
Cela signifie que Shuxin a mangé au moins $7 + 4 = 11$ bonbons.
Remarquons que si Shuxin mange 7 bonbons rouges, 4 bonbons jaunes et 0 bonbon bleu, il y aura bien un nombre égal de bonbons de chaque couleur.

Réponse : (C)

8. Puisque 10 élèves ont les cheveux noirs et 3 élèves ont les cheveux noirs et portent des lunettes, cela signifie que $10 - 3 = 7$ élèves ont les cheveux noirs mais ne portent pas de lunettes.

Réponse : (A)

9. Puisque 25 % équivaut à $\frac{1}{4}$, alors la portion du sentier qui longe la rivière et qui traverse la forêt représente $\frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$ du sentier.
Donc, la section finale qui mène au sommet d'une colline représente $\frac{1}{8}$ du sentier.
Puisque $\frac{1}{8}$ du sentier correspond à 3 km, alors la longueur totale du sentier est égale à 8×3 km $= 24$ km.

Réponse : (A)

10. Selon la définition, $(5\nabla 2)\nabla 2 = (4 \times 5 + 2)\nabla 2 = 22\nabla 2 = 4 \times 22 + 2 = 90$.

Réponse : (E)

11. *Solution 1*
Si les 10 paniers de Laurianne valent chacun 2 points, elle aurait marqué $10 \times 2 = 20$ points en tout.
Puisqu'elle a un total de 26 points, alors elle a marqué $26 - 20 = 6$ points de plus que si tous ses paniers valaient 2 points chacun.
Cela signifie que si elle a marqué 6 paniers à 3 points chacun, alors elle aurait marqué 1 point de plus pour chacun de ces 6 paniers, d'où elle aurait donc marqué $20 + 6 = 26$ points.
Laurianne marque donc 6 paniers à 3 points.
(Remarquons que $6 \times 3 + 4 \times 2 = 26$.)

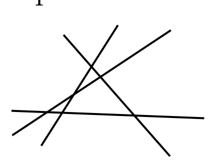
Solution 2
Supposons que Laurianne marque x paniers à 3 points chacun.
Puisqu'elle a marqué 10 paniers, alors elle a marqué $10 - x$ paniers à 2 points chacun.
Puisque Laurianne a marqué 26 points, alors $3x + 2(10 - x) = 26$, d'où $3x + 20 - x = 26$ ou $x = 6$.
Donc, Laurianne a marqué 6 paniers à 3 points.

Réponse : (B)

12. Dans la liste donnée, les nombres 11 et 13 sont les seuls nombres premiers et doivent donc être les numéros de Clara et Léo.
Dans la liste donnée, 16 est le seul carré parfait. Donc, le numéro de Guillaume est 16.
Les nombres restants sont 12, 14, 15.
Puisque les numéros de Hao et de Julie sont des nombres pairs, alors leurs numéros doivent être 12 et 14.
Donc, le numéro d'Ioana est 15.

Réponse : (B)

13. Chacune des 4 lignes peut couper chacune des 3 autres lignes au maximum une fois.
Quoique cela semble produire $4 \times 3 = 12$ points d'intersection, chaque point d'intersection est compté deux fois ; une fois pour chacune des deux lignes.
Donc, le nombre maximum de points d'intersection est égal à $\dfrac{4 \times 3}{2} = 6$.
Dans la figure ci-dessous, on voit qu'il est possible d'avoir 6 points d'intersection :



Réponse : (D)

14. Lorsque 10 nombres ont une moyenne de 17, leur somme est égale à $10 \times 17 = 170$.
Lorsque 9 nombres ont une moyenne de 16, leur somme est égale à $9 \times 16 = 144$.
Donc, le nombre qui a été supprimé est $170 - 144 = 26$.

Réponse : (A)

15. Puisque $CD = DE = EC$, alors le triangle CDE est équilatéral, ce qui signifie que $\angle DEC = 60^\circ$.
Puisque l'angle DEB est un angle plat, alors $\angle CEB = 180^\circ - \angle DEC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
Puisque $CE = EB$, alors le triangle CEB est isocèle avec $\angle ECB = \angle EBC$.
Puisque $\angle ECB + \angle CEB + \angle EBC = 180^\circ$, alors $2 \times \angle EBC + 120^\circ = 180^\circ$, d'où $2 \times \angle EBC = 60^\circ$ ou $\angle EBC = 30^\circ$.
Donc, $\angle ABC = \angle EBC = 30^\circ$.

Réponse : (A)

16. Puisque $x^2 < x$ et $x^2 \geq 0$, alors $x > 0$. Donc, x ne peut être négatif.
Donc, ni (D) ni (E) n'est la bonne réponse.
Puisque $x^2 < x$, alors on ne peut avoir $x > 1$ car sinon on aurait $x^2 > x$.
Donc, (A) n'est pas la bonne réponse. Donc, la bonne réponse est soit (B), soit (C).
Si $x = \dfrac{1}{3}$, alors $x^2 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$ et $\dfrac{x}{2} = \dfrac{1/3}{2} = \dfrac{1}{6}$.
Puisque $\dfrac{1}{6} > \dfrac{1}{9}$, alors (B) n'est pas la bonne réponse.
Donc, la bonne réponse doit être (C).
Pour vérifier, lorsque $x = \dfrac{3}{4}$, alors on a $x^2 = \dfrac{9}{16}$ et $\dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{8}$.
Puisque $\dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{8} = \dfrac{6}{16} < \dfrac{9}{16} = x^2$, alors $\dfrac{x}{2} < x^2$.
De plus, $x^2 = \dfrac{9}{16} < \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4} = x$.
On voit donc que $x = \dfrac{3}{4}$ remplit les conditions de l'énoncé.

Réponse : (C)

17. Pendant les deux premières heures de son voyage, Mélanie a parcouru $2\text{ h} \times 100\text{ km/h} = 200\text{ km}$.
Ensuite, en roulant à une vitesse de 80 km/h, elle a parcouru 200 km en $\dfrac{200\text{ km}}{80\text{ km/h}} = 2{,}5\text{ h}$.
En tout, Mélanie a parcouru $200\text{ km} + 200\text{ km} = 400\text{ km}$.
En tout, le voyage de Mélanie a duré $2\text{ h} + 2{,}5\text{ h} = 4{,}5\text{ h}$.
Donc, la vitesse moyenne de Mélanie pendant son voyage est égal à $\dfrac{400\text{ km}}{4{,}5\text{ h}} \approx 88{,}89\text{ km/h}$.
Parmi les choix de réponse, 88,89 km/h est le plus près de 89 km/h.

Réponse : (B)

18. D'après l'énoncé,

$$\text{S} + \text{E} + \text{T} = 2 \qquad \text{H} + \text{A} + \text{T} = 7 \qquad \text{T} + \text{A} + \text{S} + \text{T} + \text{E} = 3 \qquad \text{M} + \text{A} + \text{T} = 4$$

Puisque $\text{T} + \text{A} + \text{S} + \text{T} + \text{E} = 3$ et $\text{S} + \text{E} + \text{T} = 2$, alors $\text{T} + \text{A} = 3 - 2 = 1$.
Puisque $\text{H} + \text{A} + \text{T} = 7$ et $\text{T} + \text{A} = 1$, alors $\text{H} = 7 - 1 = 6$.
Puisque $\text{M} + \text{A} + \text{T} = 4$ et $\text{H} = 7$, alors $\text{M} + (\text{A} + \text{T}) + \text{H} = 4 + 6 = 10$.
Donc, le mot MATH a une valeur de 10.

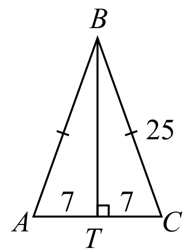
Remarquons qu'il est aussi possible de déterminer des valeurs spécifiques de S, E, T, A à partir desquelles on peut obtenir les valeurs correctes des mots. Un tel ensemble de valeurs est A $= 1$, T $= 0$, S $= 4$ et E $= -2$. Bien que ces valeurs ne soient pas uniques, les valeurs de M et H (3 et 6 respectivement) le sont.

Réponse : (E)

19. Le périmètre du triangle ABC est égal à $(3x + 4) + (3x + 4) + 2x = 8x + 8$.
Le périmètre du rectangle $DEFG$ est égal à

$$2 \times (2x - 2) + 2 \times (3x - 1) = 4x - 4 + 6x - 2 = 10x - 6$$

Puisque ces périmètres sont égaux, alors $10x - 6 = 8x + 8$, d'où $2x = 14$ ou $x = 7$.
Donc, le triangle ABC est tel que $AC = 2 \times 7 = 14$ et $AB = BC = 3 \times 7 + 425$.
Au point B, on abaisse une perpendiculaire BT à AC.



Puisque le triangle ABC est isocèle, alors T est le milieu de AC. Donc, $AT = TC = 7$.
D'après le théorème de Pythagore, $BT = \sqrt{BC^2 - TC^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{576} = 24$.
Donc, l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BT = \frac{1}{2} \times 14 \times 24 = 168$.

Réponse : (C)

20. Puisque N est un entier strictement positif de 1 000 000 à 10 000 000, alors $25 \times N$ est un entier strictement positif de 25 000 000 à 250 000 000. Donc, $25 \times N$ a soit 8 chiffres, soit 9 chiffres.
Supposons que la valeur de $25 \times N$ a 9 chiffres, avec la possibilité que le premier chiffre soit 0.
Puisque $25 \times N$ est un multiple de 25, ses deux derniers chiffres doivent être 00, 25, 50 ou 75.
Pour un ensemble fixe des trois premiers chiffres, xyz, le multiple de 25 ayant la plus grande somme des chiffres doit être $xyz\,999\,975$ car les quatre chiffres suivants sont les plus grands possibles (tous sont 9) et les deux derniers chiffres ont la plus grande somme possible parmi les fins admissibles pour les multiples de 25.
Donc, pour répondre à la question, il faut trouver l'entier de la forme $xyz\,999\,975$ qui est compris entre 25 000 000 et 250 000 000 et dont la somme $x + y + z$ est aussi grande que possible.
On sait que la valeur maximale de x est 2, que la valeur maximale de y est 9 et que la valeur maximale de z est 9.
Cela signifie que $x + y + z \leq 2 + 9 + 9 = 20$.
On ne peut avoir 299 999 975 car ce nombre n'est pas situé dans l'intervalle donné.
Cependant, on pourrait avoir $x + y + z = 19$ si $x = 1$, $y = 9$ et $z = 9$.
Donc, dans l'intervalle donné, l'entier 199 999 975 est le multiple de 25 dont la somme des chiffres est aussi grande que possible. Cette somme est égale à $1 + 6 \times 9 + 7 + 5 = 67$.
Remarquons que $199\,999\,975 = 25 \times 7\,999\,999$. Donc, 199 999 975 est bien un multiple de 25. Remarquons également que $N = 7\,999\,999$ est situé entre 1 000 000 et 10 000 000.

Réponse : (C)

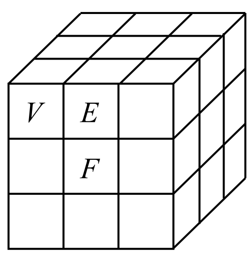
21. Puisque la deuxième colonne contient le nombre 1, alors l'étape (ii) n'a jamais été appliquée sur la deuxième colonne, sinon chaque nombre dans cette colonne serait d'au moins 2.
Pour obtenir les 1, 3 et 2 dans la deuxième colonne, on doit donc avoir appliqué l'étape (i) 1 fois sur la rangée 1, 3 fois sur la rangée 2 et 2 fois sur la rangée 3.
On a donc :

1	1	1
3	3	3
2	2	2

Il n'est pas possible d'appliquer l'étape (i) davantage, au risque de voir augmenter les nombres dans la colonne 2. Donc, $a = 1 + 3 + 2 = 6$.
Pour obtenir le tableau final à partir du tableau actuel en appliquant uniquement l'étape (ii), il faut augmenter de 6 chaque nombre dans la colonne 1 (ce qui signifie appliquer l'étape (ii) 3 fois) et augmenter de 4 chaque nombre dans la colonne 3 (ce qui signifie appliquer l'étape (ii) 2 fois). Donc, $b = 3 + 2 = 5$.
Donc, $a + b = 11$.

Réponse : 11

22. Les 27 petits cubes qui forment le grand cube de dimensions $3 \times 3 \times 3$ peuvent être répartis en 4 catégories : 1 petit cube au centre même du grand cube (qui n'est pas visible dans la figure ci-dessous), 8 petits cubes aux sommets du grand cube (à titre d'exemple, l'un de ces cubes est indiqué par la lettre V dans la figure ci-dessous), 12 petits cubes situés sur les arêtes du grand cube, mais pas aux sommets (à titre d'exemple, l'un de ces cubes est indiqué par la lettre E) et 6 petits cubes au centre de chaque face du grand cube (à titre d'exemple, l'un de ces cubes est indiqué par la lettre F).



Le petit cube au centre du grand cube contribue 0 à l'aire totale du grand cube.
Les 8 cubes situés aux sommets contribuent chacun 3 à l'aire totale du grand cube puisque 3 de leurs faces sont exposées sur l'extérieur du grand cube.
Les 12 cubes situés sur les arêtes du grand cube (mais non aux sommets de ce dernier) contribuent chacun 2 à l'aire totale du grand cube.
Les 6 cubes situés au centre de chaque face du grand cube contribuent chacun 1 à l'aire totale de ce dernier.
Parmi les 27 petits cubes qui forment le grand cube, 10 sont rouges.
Pour minimiser l'aire qui est rouge, on doit disposer les cubes rouges de manière à minimiser leur contribution à l'aire totale du grand cube. Pour ce faire, on place 1 cube rouge au centre (ce cube contribue 0 à l'aire totale du grand cube), 6 cubes rouges au centre des faces (chacun de ces cubes contribue 1 à l'aire totale du grand cube) et les 3 cubes rouges restants sur les arêtes (chacun de ces cubes contribue 2 à l'aire totale du grand cube).
Donc, l'aire qui est rouge est égale à $1 \times 0 + 6 \times 1 + 3 \times 2 = 12$.

Réponse : 12

23. On veut compter le nombre de codes de 4 chiffres $abcd$ qui répondent aux critères.
D'après le premier critère, au moins l'un des chiffres doit être 4, mais $b \neq 4$ et $d \neq 4$.
Donc, soit $a = 4$, soit $c = 4$. D'après le quatrième critère, on pourrait avoir à la fois $a = 4$ et $c = 4$.

Supposons que $a = 4$ et que $c = 4$.
Le code a donc la forme $4b4d$.
D'après les deuxième et troisième critères, les chiffres restants sont 2 et 7 et il n'y a pas d'autres restrictions quant à l'emplacement du 2 et du 7.
Donc, dans ce cas, le code est soit 4247, soit 4742. Il y a donc 2 codes possibles.

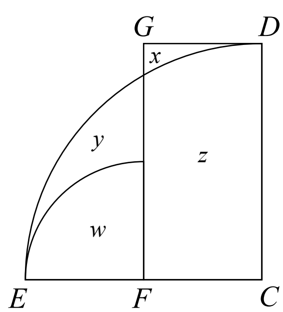
Supposons que $a = 4$ et que $c \neq 4$. (Rappelons que $b \neq 4$ et $d \neq 4$.)
Le code a donc la forme $4bcd$.
Les chiffres restants comprennent un 2 (qui peut être placé dans n'importe laquelle des positions restantes), un 7 et soit un 1, soit un 6.
Il y a 3 positions dans lesquelles le 2 peut être placé, après quoi il y a 2 positions dans lesquelles le 7 peut être placé, après quoi il y a 2 chiffres qui peuvent être placés dans la position restante.
Donc, dans ce cas, il y a $3 \times 2 \times 2 = 12$ codes possibles.

Supposons que $c = 4$ et que $a \neq 4$.
Le code a donc la forme $ab4d$.
Les chiffres restants comprennent un 2 (avec la restriction que $a \neq 2$), un 7 et soit un 1, soit un 6.
Il y a 2 positions dans lesquelles le 2 peut être placé, après quoi le 7 peut être placé dans l'une ou l'autre des 2 positions restantes, après quoi il y a 2 chiffres qui peuvent être placés dans la position restante.
Donc, dans ce cas, il y a $2 \times 2 \times 2 = 8$ codes possibles.

Donc, il y a $2 + 12 + 8 = 22$ codes possibles en tout.

Réponse : 22

24. On nomme les deux autres régions comme dans la figure ci-dessous :



Si l'on commence par l'aire du grand quart de cercle (qui est égale à $y + w + z$) et que l'on soustrait ensuite l'aire du petit quart de cercle (qui est égale à w), on a $y + z$.
Si l'on soustrait l'aire du rectangle (qui est égale à $x + z$), on a $y - x$.
Autrement dit, $y - x$ est égal à l'aire du grand quart de cercle moins l'aire du petit quart de cercle moins l'aire du rectangle.
Le grand quart de cercle a un rayon de 30 et a donc une aire de $\frac{1}{4}\pi \times 30^2 = 225\pi$.
Le rayon du petit quart de cercle est la moitié de celui du grand quart de cercle car F est le milieu de CE.
Donc, le petit quart de cercle a un rayon de 15 et a donc une aire de $\frac{1}{4}\pi \times 15^2 = \frac{225}{4}\pi$.
La largeur du rectangle est égale à FC, ce qui est égal à la moitié de CE, soit 15.
La hauteur du rectangle est égale à 30. Le rectangle a donc une aire de $15 \times 30 = 450$.

Donc, $y - x = 225\pi - \frac{225}{4}\pi - 450 = \frac{900}{4}\pi - \frac{225}{4}\pi - 450 = \frac{675}{4}\pi - 450 \approx 80{,}1$.
Cela indique que $y-x$ est positif (ce que la figure suggère également), ce qui signifie que $d = y-x$ et que l'entier le plus près de d est 80.

RÉPONSE : 80

25. On écrit $a = 3^r$, $b = 3^s$ et $c = 3^t$, r, s et t étant chacun un entier de 1 à 8.
Puisque $a \leq b \leq c$, alors $r \leq s \leq t$.
Remarquons que

$$\frac{ab}{c} = \frac{3^r 3^s}{3^t} = 3^{r+s-t} \qquad \frac{ac}{b} = \frac{3^r 3^t}{3^s} = 3^{r+t-s} \qquad \frac{bc}{a} = \frac{3^s 3^t}{3^r} = 3^{s+t-r}$$

Puisque $t \geq s$, alors $r + t - s = r + (t - s) \geq r > 0$. Donc, $\dfrac{ac}{b}$ est toujours un entier.

Puisque $t \geq r$, alors $s + t - r = s + (t - r) \geq s > 0$. Donc, $\dfrac{bc}{a}$ est toujours un entier.

Puisque $\dfrac{ab}{c} = 3^{r+s-t}$, alors $\dfrac{ab}{c}$ est un entier uniquement lorsque $r + s - t \geq 0$ ou $t \leq r + s$.
Cela signifie que l'on doit compter le nombre de triplets (r, s, t) tels que $r \leq s \leq t$ (r, s et t étant chacun un entier de 1 à 8) et que $t \leq r + s$.

Supposons que $r = 1$. Alors $1 \leq s \leq t \leq 8$ et $t \leq s + 1$.
Si $s = 1$, alors t peut égaler 1 ou 2. Si $s = 2$, alors t peut égaler 2 ou 3. Cette régularité se poursuit de sorte que lorsque $s = 7$, t peut égaler 7 ou 8. Cependant, lorsque $s = 8$, t doit égaler 8 puisque $t \leq 8$.
Dans ce cas, il y a $2 \times 7 + 1 = 15$ paires de valeurs admissibles de s et t et il y a donc 15 triplets (r, s, t).

Supposons que $r = 2$. Alors $2 \leq s \leq t \leq 8$ et $t \leq s + 2$.
Cela signifie que lorsque $2 \leq s \leq 6$, t peut égaler s, $s + 1$ ou $s + 2$.
Lorsque $s = 7$, t peut égaler 7 ou 8 et lorsque $s = 8$, t doit égaler 8.
Dans ce cas, il y a $5 \times 3 + 2 + 1 = 18$ triplets.

Supposons que $r = 3$. Alors $3 \leq s \leq t \leq 8$ et $t \leq s + 3$.
Cela signifie que lorsque $3 \leq s \leq 5$, t peut égaler s, $s + 1$, $s + 2$ ou $s + 3$.
Lorsque $s = 6, 7, 8$, il y a respectivement 3, 2 et 1 valeurs de t.
Dans ce cas, il y a $3 \times 4 + 3 + 2 + 1 = 18$ triplets.

Supposons que $r = 4$. Alors $4 \leq s \leq t \leq 8$ et $t \leq s + 4$.
Cela signifie que lorsque $s = 4$, il y a 5 choix pour t.
Comme dans les cas précédents, lorsque $s = 5, 6, 7, 8$, il y a respectivement 4, 3, 2 et 1 choix pour t.
Dans ce cas, il y a $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ triplets.

Si l'on poursuit ce processus, lorsque $r = 5$, il y a $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ triplets, lorsque $r = 6$, il y a $3 + 2 + 1 = 6$ triplets, lorsque $r = 7$, il y a $2 + 1 = 3$ triplets et lorsque $r = 8$, il y a 1 triplet.
Le nombre total de triplets (r, s, t) est égal à $15 + 18 + 18 + 15 + 10 + 6 + 3 + +1 = 86$.
Puisque les triplets (r, s, t) correspondent aux triplets (a, b, c), alors le nombre de triplets (a, b, c) est égal à $N = 86$.

RÉPONSE : 86