Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2024

(7e et 8e années – Secondaire I et II)

le mercredi 15 mai 2024
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 mai 2024
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2023 University of Waterloo

7[e] année

1. En additionnant les chiffres de 2024, on obtient $2 + 0 + 2 + 4 = 8$.

   Réponse : (B)

2. On pose $n = 5$ pour obtenir $n + 2 = 5 + 2 = 7$.

   Réponse : (C)

3. Si une figure a un axe de symétrie vertical, alors lorsqu'elle est pliée le long de cet axe vertical, les deux moitiés de la figure sont identiques l'une à l'autre. Parmi les choix de réponse, un tel axe vertical existe uniquement pour (E).

   Réponse : (E)

4. Sous forme de pourcentage, un quart équivaut à 25%. Donc, exactement un quart des élèves ont choisi mercredi.

   Réponse : (C)

5. Le carré a des côtés de longueur 5 et a donc une aire de $5 \times 5 = 25$.

   Réponse : (E)

6. Puisque l'angle PQR est un angle plat, sa mesure est de 180°. Donc, les angles 146° et x° ont une somme de 180°, d'où la valeur de x est donc égale à $180 - 146 = 34$.

   Réponse : (E)

7. Le temps total de Kamila est égal à la somme de 3 minutes et 45 secondes et de 4 minutes et 35 secondes. En additionnant 45 secondes et 35 secondes, on obtient $45 + 35 = 80$ secondes. Puisqu'il y a 60 secondes dans 1 minute, alors 80 secondes équivalent à 1 minute et 20 secondes. Donc, le temps total de Kamila était de $3 + 4 + 1 = 8$ minutes complètes plus 20 secondes, soit un total de 8 minutes et 20 secondes.

   Réponse : (D)

8. *Solution 1*

   La régularité est composée de 5 symboles et $23 = 4 \times 5 + 3$. Donc, le groupe de 5 symboles se répète 4 fois, suivi de 3 symboles supplémentaires. Le 3[e] symbole de la régularité est ⊠. Donc, le 23[e] symbole est ⊠.

   Solution 2

   Si le groupe de 5 symboles est répété 4 fois, alors on a $5 \times 4 = 20$ symboles. Ensuite, il nous faut 3 symboles supplémentaires pour avoir 23 symboles. Puisque le 3[e] symbole de la régularité est ⊠, alors le 23[e] symbole est ⊠.

   Réponse : (C)

9. Puisque $\frac{42 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 21$, alors Olivia coupe sa corde en 21 bouts de 2 cm.

   Puisque $\frac{42 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = 14$, alors Jeanne coupe sa corde en 14 bouts de 3 cm.

   Donc, Olivia a $21 - 14 = 7$ bouts de corde de plus que Jeanne.

   Réponse : (A)

10. Dans la liste donnée, les nombres qui sont divisibles par 2 sont $2, 4, 6, 8$.
Les nombres qui sont divisibles par 3 sont $3, 6, 9$.
Les nombres qui sont divisibles à la fois par 2 et par 3 sont les nombres qui paraissent dans les deux listes précédentes. Le seul nombre qui parait dans ces deux listes est 6.
Donc, les nombres qui sont divisibles par 2 ou par 3 ou qui sont divisibles à la fois par 2 et par 3 sont $2, 3, 4, 6, 8, 9$.
Puisque $2, 3, 4, 6, 8, 9$ sont 6 des 9 nombres qui figurent dans la liste, alors la probabilité pour que le nombre choisi soit divisible par 2 ou par 3 ou qu'il soit divisible à la fois par 2 et par 3 est égale à $\frac{6}{9}$.

Réponse : (C)

11. On récrit l'expression de soustraction sous la forme d'une addition : $Q6 + 49 = 8P$.
Ensuite, on considère les chiffres des unités.
D'après l'énoncé du problème, la somme $6+9$ a P pour chiffre des unités, ce qui signifie que $P = 5$ (puisque $6 + 9 = 15$). On a donc $Q6 + 49 = 85$, d'où $Q6 = 85 - 49 = 36$ ou $Q = 3$.
Donc, $P + Q = 5 + 3 = 8$.
(On peut vérifier que $85 - 36 = 49$.)

Réponse : (D)

12. Le périmètre d'un rectangle est composé de deux largeurs et de deux longueurs.
Puisque chaque longueur est le double de la largeur, alors deux longueurs équivalent à quatre largeurs. Donc, le périmètre est égal à $2 + 4 = 6$ fois la largeur.
Puisque le rectangle a un périmètre de 120 cm, alors sa largeur est égale à $\frac{120 \text{ cm}}{6} = 20$ cm.

Réponse : (A)

13. Eloïse a dépensé 765 \$ au total et le coût moyen de chaque pompe à eau était de 85 \$.
Donc, Eloïse a acheté $\frac{765 \text{ \$}}{85 \text{ \$}} = 9$ pompes à eau.

Réponse : (C)

14. Puisque 385 a 5 pour chiffre des unités, alors 385 est divisible par 5. En divisant, on obtient $\frac{385}{5} = 77$.
Puisque $77 = 7 \times 11$, alors les trois facteurs premiers de 385 sont 5, 7 et 11, dont la somme est égale à $5 + 7 + 11 = 23$.

Réponse : (D)

15. Un cercle de rayon 2 a une aire de $\pi \times 2^2 = 4\pi$.
Si le rayon est triplé, alors le nouveau rayon est $3 \times 2 = 6$.
Un cercle de rayon 6 a une aire de $\pi \times 6^2 = 36\pi$.
Si l'on divise l'aire du cercle initial par l'aire du nouveau cercle, on obtient $\frac{4\pi}{36\pi} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Réponse : (C)

16. Après que Bernard a versé la moitié de son eau dans un autre récipient, il lui reste 150 mL d'eau dans son verre.
Juanita verse ensuite 20 % de son eau, soit $0{,}20 \times 300$ mL $= 60$ mL, dans le verre de Bernard.
Donc, le volume d'eau dans le verre de Bernard est égal à 150 mL $+ 60$ mL $= 210$ mL.

Réponse : (A)

17. Puisque chaque secteur non ombré est 3 fois plus grand que chaque secteur ombré, alors la taille combinée de 3 secteurs ombrés est égale à la taille d'un secteur non ombré.
Donc, la taille combinée de tous les secteurs est égale à $12 + 1 = 13$ secteurs non ombrés.
Si l'on imagine que le disque est divisé en 13 secteurs égaux, dont un seul est ombré, alors la probabilité pour que la flèche s'arrête dans un secteur ombré est égale à $\frac{1}{13}$.
Réponse : (D)

18. Il y a 3 couleurs différentes et 4 numéros différents. Il y a donc $3 \times 4 = 12$ types différents de robots qui peuvent être assemblés. (Ces derniers sont R1, R2, R3, R4, B1, B2, B3, B4, G1, G2, G3, G4, où R, B, G représentent les 3 couleurs rouge, bleu, vert.)
Puisqu'il y a 12 types différents de robots, il est possible que les 12 premiers robots assemblés soient tous différents les uns des autres.
Dans ce cas, le 13[e] robot assemblé serait le premier robot à avoir la même couleur et le même numéro qu'un robot assemblé précédemment assemblé. Donc, la plus grande valeur possible de n est 13.
Notes :
(i) Il est possible que deux robots identiques soient assemblés avant le 13[e] robot. Cependant, dans le but de déterminer la valeur maximale de n, on cherche le point le plus tardif où cela peut arriver.
(ii) Il doit y avoir deux robots identiques parmi les 13 premiers robots assemblés, donc $n < 14$.
(iii) Cette solution s'appuie sur le *principe du pigeonnier* – un concept qui bénéficierait d'une exploration plus approfondie.
Réponse : (C)

19. Soit $a, b, 10, c, d$ une liste de 5 entiers en ordre croissant dont la médiane est 10.
Puisque a est le plus petit entier de la liste et d le plus grand et que la liste a une étendue de 7, alors d est 7 de plus que a.
Puisque a et d ont une différence de 7, alors pour trouver la plus petite valeur possible de a, on peut trouver la plus petite valeur possible de d et en soustraire 7.
Les 5 entiers de la liste sont différents les uns des autres, donc la plus petite valeur possible de c est 11 (c doit être supérieur à la médiane 10) et la plus petite valeur possible de d est donc 12.
Puisque d est 7 de plus que a, alors le plus petit entier possible de la liste est $12 - 7 = 5$.
(Voici une telle liste : $5, b, 10, 11, 12$, b étant supérieur à 5 et inférieur à 10.)
Réponse : (B)

20. En partant du réglage numéro 1 et en montant de 6 réglages à la fois, le bureau peut s'arrêter aux réglages 7, 13, 19, 25 et 31.
En partant du réglage numéro 31 et en descendant de 4 réglages à la fois, le bureau peut s'arrêter aux réglages 27, 23, 19, 15, 11, 7 et 3.
Le bureau commence initialement au réglage impair 1.
En montant de 6 réglages à la fois, le bureau peut uniquement s'arrêter sur des réglages impairs (car lorsque l'on additionne un nombre pair à un nombre impair, on obtient un nombre impair).
De même, en descendant de 4 réglages à la fois, le bureau peut uniquement s'arrêter sur des réglages impairs.
Donc, il est impossible que le bureau s'arrête sur un réglage pair.
Jusque-là, on a démontré que le bureau est capable de s'arrêter aux réglages

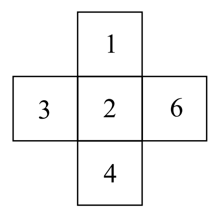
$$1, 3, 7, 11, 13, 15, 19, 23, 25, 27, 31$$

et que le bureau ne peut s'arrêter sur des réglages pairs.
Ensuite, on doit démontrer que le bureau peut s'arrêter aux réglages impairs restants, soit 5, 9,

17, 21 et 29.
Puisque le bureau peut s'arrêter au réglage 13, alors il peut s'arrêter aux réglages 9 et 5 en appuyant respectivement 1 et 2 fois sur le bouton de descente.
De même, puisque le bureau peut s'arrêter au réglage 25, alors il peut s'arrêter aux réglages 21 et 17.
Enfin, puisque le bureau peut s'arrêter au réglage 23, alors il peut s'arrêter au réglage 29 en appuyant une fois sur le bouton de montée.
Le bureau peut s'arrêter à tous les réglages impairs de 1 à 31 et peut donc s'arrêter sur 16 réglages différents.

Réponse : (B)

21. Les trois entiers différents choisis de 1 à 6 et dont la somme est 7 doivent être 1, 2 et 4. Donc, la colonne verticale contient les entiers 1, 2, 4 dans un certain ordre.
(Voyez-vous pourquoi aucune autre combinaison de trois entiers n'a une somme de 7 ?)
Les trois entiers différents choisis de 1 à 6 et dont la somme est 11 doivent être 1, 4, 6 ou 2, 4, 5 ou 2, 3, 6.
Si les entiers dans la rangée horizontale sont 1, 4, 6, alors la colonne verticale et la rangée horizontale ont deux entiers en commun, à savoir 1 et 4.
Puisque les cinq cases doivent contenir cinq entiers différents, alors les deux listes ne peuvent avoir deux entiers en commun. Donc, la rangée horizontale ne peut contenir les entiers 1, 4 et 6.
De même, la rangée horizontale ne peut contenir les entiers 2, 4 et 5.
Donc, les entiers dans la rangée horizontale sont 2, 3, 6. De plus, puisque 2 est l'entier commun aux deux listes, il doit figurer dans la case du milieu.
L'entier qui ne figure dans aucune case est 5.
Dans la figure ci-contre, on voit une disposition possible des entiers.



Réponse : (E)

22. On détermine d'abord le nombre de cure-dents intérieurs que l'on doit utiliser pour former un quadrillage 20×24.
Un quadrillage de 20 rangées contient 19 lignes horizontales de cure-dents intérieurs, chacune contenant 24 cure-dents (puisqu'il y a 24 colonnes).
Donc, il y a $19 \times 24 = 456$ cure-dents intérieurs en position horizontale.
Un quadrillage de 24 colonnes contient 23 lignes horizontales de cure-dents intérieurs, chacune contenant 20 cure-dents (puisqu'il y a 20 rangées).
Donc, il y a $23 \times 20 = 460$ cure-dents intérieurs en position verticale.
Au total, il y a $456 + 460 = 916$ cure-dents intérieurs.

Par la suite, on détermine le nombre total de cure-dents que l'on doit utiliser pour former un quadrillage 20×24.
Il y a 21 lignes horizontales de cure-dents, chacune contenant 24 cure-dents.
Il y a 25 lignes verticales de cure-dents, chacune contenant 20 cure-dents.
Donc, le nombre total de cure-dents que l'on doit utiliser pour former un quadrillage 20×24 est égal à $21 \times 24 + 25 \times 20 = 1004$.
(On aurait également pu déterminer qu'il y a 88 cure-dents extérieurs et qu'il y a donc $916 + 88 = 1004$ cure-dents au total.)

Donc, dans le quadrillage 20×24, le pourcentage de cure-dents qui sont des cure-dents intérieurs est égal à $\frac{916}{1004} \times 100\%$, soit 91 % à l'entier près.

Réponse : (E)

23. Étant donné que les six faces du prisme sont peintes, alors les cubes de dimensions $1 \times 1 \times 1$ qui ne présentent aucune trace de peinture sont ceux qui sont situés à l'intérieur du prisme.
Pour qu'il existe de tels cubes, chacune des trois dimensions du prisme (longueur, largeur, hauteur) doit être au moins 3.
De plus, ces cubes intérieurs non peints forment eux-mêmes un prisme rectangulaire.
(Il est conseillé de confirmer par soi-même ces affirmations avant de poursuivre.)
Le prisme intérieur contient 50 cubes de dimensions $1 \times 1 \times 1$, ce qui signifie que son volume est égal à 50.
On cherche donc trois entiers strictement positifs qui représentent les dimensions de ce prisme intérieur (longueur, largeur, hauteur) et dont le produit est 50.
Les diviseurs positifs de 50 (1, 2, 5, 10, 25, 50) nous orientent vers quatre configurations possibles : $1 \times 1 \times 50$, $1 \times 2 \times 25$, $1 \times 5 \times 10$ et $2 \times 5 \times 5$.
Ces configurations sont les seules manières d'exprimer 50 sous la forme d'un produit de trois entiers strictement positifs.
Pour déterminer les dimensions du prisme initial, on considère chaque configuration du prisme intérieur.
Prenons par exemple le prisme intérieur de dimensions $1 \times 1 \times 50$.
Rappelons que ce prisme est formé lorsque tous les cubes extérieurs (peints) sont retirés.
Cela signifie que des cubes de dimensions $1 \times 1 \times 1$ ont été retirés du haut et du bas du prisme intérieur $1 \times 1 \times 50$, des côtés gauche et droit, ainsi que des deux extrémités (l'avant et l'arrière).
Cela signifie que les dimensions du prisme initial sont chacune 2 de plus que les dimensions du prisme intérieur. (Essayez de visualiser cela.)
On remplit le tableau suivant pour déterminer les dimensions et le volume du prisme initial pour chaque cas :

Dimensions du prisme intérieur	Dimensions du prisme initial	Volume du prisme initial
$1 \times 1 \times 50$	$3 \times 3 \times 52$	$V = 3 \times 3 \times 52 = 468$
$1 \times 2 \times 25$	$3 \times 4 \times 27$	$V = 3 \times 4 \times 27 = 324$
$1 \times 5 \times 10$	$3 \times 7 \times 12$	$V = 3 \times 7 \times 12 = 252$
$2 \times 5 \times 5$	$4 \times 7 \times 7$	$V = 4 \times 7 \times 7 = 196$

Donc, la moyenne de toutes les valeurs possibles de V est égale à $\frac{468+324+252+196}{4} = \frac{1240}{4} = 310$.

Réponse : (B)

24. Chaque entier minuscule de trois chiffres appartient exactement à l'un des trois cas suivants.

1er cas : Le chiffre des unités est 0

Si le chiffre des unités d'un entier minuscule est 0, alors le chiffre des dizaines doit également être 0, sinon, le chiffre des unités et le chiffre des dizaines pourraient être échangés pour donner un entier plus petit.
Dans ce cas, il n'y a pas de restrictions sur le chiffre des centaines et il y a donc 9 tels entiers minuscules. Ces derniers sont : 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900.

2e cas : Le chiffre des unités n'est pas 0, mais le chiffre des dizaines est 0

Si le chiffre des centaines est x et le chiffre des unités est z, alors les entiers dans ce cas sont de la forme $x0z$ avec $z \neq 0$. (Si x est supérieur à z, alors si l'on échange x et z, on obtient un entier plus petit.)
Les entiers de cette forme sont minuscules exactement quand x est supérieur ou égal à 1 et inférieur ou égal à z. Si $x = 1$, alors z peut être égal à n'importe quel entier de 1 à 9 et il y a donc 9 tels entiers minuscules. Ces derniers sont : $101, 102, 103, \ldots, 108, 109$.

Si $x = 2$, alors z peut être égal à n'importe quel entier de 2 à 9 et il y a donc 8 tels entiers minuscules. Ces derniers sont : $202, 203, 204, \ldots, 208, 209$.
En continuant de cette manière, il y a 7 entiers minuscules lorsque $x = 3$, 6 lorsque $x = 4$, 5 lorsque $x = 5$, 4 lorsque $x = 6$, 3 lorsque $x = 7$, 2 lorsque $x = 8$ et finalement 1 lorsque $x = 9$.
Dans ce cas, il y a $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ entiers minuscules.

3^{e} cas : Le chiffre des unités et le chiffre des dizaines ne sont pas 0

Si le chiffre des centaines est x (x étant supérieur ou égal à 1), le chiffre des dizaines est y et le chiffre des unités est z, alors les entiers dans ce cas sont de la forme xyz. Les entiers de cette forme sont minuscules uniquement lorsque x est inférieur ou égal à y et y est inférieur ou égal à z.
Pour $x = 1$, on compte le nombre de tels entiers minuscules dans le tableau suivant.

Valeur de x	Valeur de y	Valeurs possibles de z	Nombre d'entiers minuscules
$x = 1$	$y = 1$	$z = 1,2,3,4,\ldots,9$	9
$x = 1$	$y = 2$	$z = 2,3,4,\ldots,9$	8
$x = 1$	$y = 3$	$z = 3,4,\ldots,9$	7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x = 1$	$y = 8$	$z = 8,9$	2
$x = 1$	$y = 9$	$z = 9$	1

Lorsque $x = 1$, il y a $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ entiers minuscules dans ce cas.
On peut compter le nombre d'entiers minuscules pour $x = 2$.

Valeur de x	Valeur de y	Valeurs possibles de z	Nombre d'entiers minuscules
$x = 2$	$y = 2$	$z = 2,3,4,\ldots,9$	8
$x = 2$	$y = 3$	$z = 3,4,\ldots,9$	7
$x = 2$	$y = 4$	$z = 4,\ldots,9$	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x = 2$	$y = 8$	$z = 8,9$	2
$x = 2$	$y = 9$	$z = 9$	1

Lorsque $x = 2$, il y a $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ entiers minuscules dans ce cas.
Remarquons que chaque fois que la valeur de x augmente de 1, la plus petite valeur possible de y augmente de 1 (pour correspondre à la valeur de x) et donc la plus petite valeur possible de z augmente également de 1 (pour correspondre à la valeur de y).
Cela signifie que lorsque $x = 3$, le nombre d'entiers minuscules dans la première rangée du tableau correspondant est 1 de moins que celui de la première rangée du tableau pour $x = 2$. C'est-à-dire qu'il y a 7 entiers minuscules dans la première rangée du tableau pour $x = 3$.
Donc, lorsque $x = 3$, il y a $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ entiers minuscules. Lorsque $x = 4$, il y a $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ entiers minuscules.

On continue de cette manière pour obtenir le nombre d'entiers minuscules pour le 3e cas.

Valeur de x	Nombre d'entiers minuscules
$x = 1$	$9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45$
$x = 2$	$8+7+6+5+4+3+2+1 = 36$
$x = 3$	$7+6+5+4+3+2+1 = 28$
$x = 4$	$6+5+4+3+2+1 = 21$
$x = 5$	$5+4+3+2+1 = 15$
$x = 6$	$4+3+2+1 = 10$
$x = 7$	$3+2+1 = 6$
$x = 8$	$2+1 = 3$
$x = 9$	1

Donc, dans ce cas, le nombre d'entiers minuscules de trois chiffres est égal à

$$45 + 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 165$$

et donc le nombre total d'entiers minuscules de trois chiffres est égal à $9 + 45 + 165 = 219$.

Réponse : (E)

25. Remarquons d'abord que 2 est le seul nombre premier pair.
Si x, y et z sont chacun des nombres premiers impairs, alors $x + y$ et $x + z$ sont des nombres premiers pairs (puisque la somme de deux nombres impairs est paire).
Cependant, $x + y$ et $x + z$ sont tous deux au moins égaux à $2 + 3 = 5$ et chacun doit donc être un nombre premier impair.
Cela signifie que x, y, z ne peuvent pas tous être des nombres premiers impairs et donc exactement l'un d'entre eux est égal à 2 (puisqu'ils sont tous différents les uns des autres et 2 est le seul nombre premier pair).
Si $y = 2$, alors x et z sont tous deux impairs et donc $x + z$ est pair, ce qui n'est pas possible.
De même, si $z = 2$, alors x et y sont tous deux impairs et donc $x + y$ est pair, ce qui n'est pas possible. Donc, $x = 2$.
On reporte $x = 2$ dans les expressions de la liste de nombres premiers :

$$w, 2, y, z, 2 + y, 2 + z, 234 + z, 234 - z,$$

et on remarque que $w + x + y = 234$ devient $w + y = 232$.
Puisque z et $2 + z$ sont des nombres premiers dont la différence est 2, alors on considère les nombres premiers impairs consécutifs tels que z est inférieur à 50.
Ces nombres sont : 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13, 17 et 19, 29 et 31, 41 et 43.
Donc, z est égal à l'un des nombres suivants : 3, 5, 11, 17, 29, 41.
Si $z = 3$, alors $234 - z = 231$. Ce nombre est divisible par 3 et n'est donc pas un nombre premier.
Si $z = 11$, alors $234 + z = 245$. Ce nombre est divisible par 5 et n'est donc pas un nombre premier.
Si $z = 17$, alors $234 - z = 217$. Ce nombre est divisible par 7 et n'est donc pas un nombre premier.
Si $z = 29$, alors $234 - z = 205$. Ce nombre est divisible par 5 et n'est donc pas un nombre premier.
Si $z = 41$, alors $234 + z = 275$. Ce nombre est divisible par 5 et n'est donc pas un nombre premier.
Enfin, si $z = 5$, alors $234 - z = 229$ et $234 + z = 239$. Ces deux nombres sont premiers.
On aurait également pu remarquer que si z a 1 pour chiffre des unités, alors $234 + z$ a 5 pour

chiffres des unités et si z a 9 pour chiffre des unités, alors $234 - z$ a également 5 pour chiffre des unités. Dans ce cas, $234+z$ et $234-z$ seraient tous deux divisibles par 5, ce qui n'est pas possible puisqu'ils sont tous deux des nombres premiers. On aurait donc pu éliminer $z = 11, 29, 41$ comme possibilités et ne considérer que $z = 3, 5, 17$, comme on l'a fait ci-dessus.
Dans le tableau ci-dessous, on résume ce que l'on sait jusque-là sur les 8 nombres premiers différents.

w	x	y	z	$x+y$	$x+z$	$234+z$	$234-z$
	2		5	$2+y$	7	239	229

Comme on la démontré précédemment, puisque y et $2 + y$ sont des nombres premiers impairs consécutifs (avec y inférieur à 50), alors y est égal à l'un des nombres suivants : 3, 11, 17, 29, 41 (rappelons que $z = 5$ et que les 8 nombres doivent tous être différents).
Puisque $w + y = 232$, alors $w = 232 - y$.
Pour quelle(s) valeur(s) de y l'équation $w = 232 - y$ produit-elle un nombre premier différent de ceux dans notre liste ?
Si $y = 3$, alors $w = 229$ ce qui n'est pas possible puisque $234 - z = 229$.
Si $y = 11$, alors $w = 221$ qui est divisible par 13 et n'est donc pas un nombre premier.
Si $y = 17$, alors $w = 215$ qui est divisible par 5 et n'est donc pas un nombre premier.
Si $y = 29$, alors $w = 203$ qui est divisible par 7 et n'est donc pas un nombre premier.
Enfin, si $y = 41$, alors $w = 191$, qui est un nombre premier.
Dans le tableau ci-dessous, on a la liste finale des 8 nombres premiers différents.

w	x	y	z	$x+y$	$x+z$	$234+z$	$234-z$
191	2	41	5	43	7	239	229

La valeur de $w - y$ est $191 - 41 = 150$.

Réponse : (B)

8e année

1. Pour avoir 25 cents, il faut $\dfrac{25 \text{ cents}}{5 \text{ cents}} = 5$ pièces de 5 cents.

   Réponse : (E)

2. Si une figure a un axe de symétrie vertical, alors lorsqu'elle est pliée le long de cet axe vertical, les deux moitiés de la figure sont identiques l'une à l'autre. Parmi les choix de réponse, un tel axe vertical existe uniquement pour (E).

   Réponse : (E)

3. Parmi les nombres donnés, seuls 1,32 et 1,03 sont supérieurs à 1. Puisque le chiffre des dixièmes de 1,32, à savoir 3, est supérieur au chiffre des dixièmes de 1,03, à savoir 0, alors 1,32 est le plus grand nombre de la liste.

   Réponse : (B)

4. Si 50 % de n est égal à 2024, alors la moitié de n est égale à 2024. Donc n est égal au double de 2024, soit 4048. (On peut vérifier que 50 % de 4048, ou la moitié de 4048, est bien égale à 2024.)

   Réponse : (D)

5. D'après le diagramme à bandes, Richard a parcouru 2 km lundi, 4 km mardi, 6 km mercredi, 5 km jeudi et 3 km vendredi.
   Donc, la distance totale qu'il a parcourue pendant les cinq jours est égale à $2+4+6+5+3 = 20$ km.

   Réponse : (D)

6. Lorsque 11 est augmenté de 2, le résultat est 13.
   Ensuite, lorsque l'on multiplie 13 par 3, le résultat final est $13 \times 3 = 39$.

   Réponse : (B)

7. Si $15 + a = 10$, alors $a = 10 - 15$. Donc, $a = -5$.

   Réponse : (B)

8. Puisque l'angle ABC est un angle plat, sa mesure est de $180°$. Donc, $40° + x° + x° = 180°$.
   On résout cette équation pour obtenir $40 + x + x = 180$ ou $2x = 140$, d'où $x = 70$.

   Réponse : (D)

9. Le rapport du nombre de cuillères au nombre de fourchettes est de 1 : 2, ce qui signifie que pour chaque cuillère dans le tiroir, il y a 2 fourchettes.
   Cela signifie que les cuillères et les fourchettes dans le tiroir peuvent être séparées en groupes de 3 (1 cuillère et 2 fourchettes) et donc le nombre total de cuillères et de fourchettes dans le tiroir doit être un multiple de 3.
   Chacun des choix de réponse suivants est un multiple de 3 : 12, 6, 18 et 3.
   Le seul choix de réponse qui n'est pas un multiple de 3 est 10. Donc, le nombre total de cuillères et de fourchettes dans le tiroir ne peut pas être égal à 10.

   Réponse : (D)

10. Le grand carré ayant des côtés de longueur 6 a une aire de $6 \times 6 = 36$.
    Les carrés ombrés ayant des côtés de longueur 3, 2 et 1 ont respectivement les aires suivantes : $3 \times 3 = 9$, $2 \times 2 = 4$ et $1 \times 1 = 1$. L'aire totale des régions ombrées est égale à $9 + 4 + 1 = 14$.
    L'aire totale de la région non ombrée est égale à la différence entre l'aire du grand carré et celle des régions ombrées, soit $36 - 14 = 22$.

    Réponse : (C)

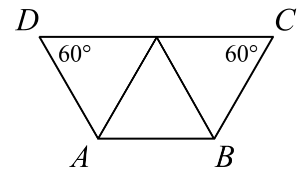
11. On prolonge la suite pour obtenir 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123. Donc, le plus petit nombre supérieur à 100 qui figure dans la suite est 123.

Réponse : (E)

12. Puisque 385 a 5 pour chiffre des unités, alors 385 est divisible par 5. En divisant, on obtient $\frac{385}{5} = 77$.
Puisque $77 = 7 \times 11$, alors les trois facteurs premiers de 385 sont 5, 7 et 11, dont la somme est égale à $5 + 7 + 11 = 23$.

Réponse : (D)

13. On divise d'abord le trapèze $ABCD$ en trois triangles équilatéraux, comme dans la figure ci-contre. (On vous encourage à confirmer qu'il n'existe pas une autre manière de diviser le trapèze $ABCD$ en trois triangles équilatéraux.)



Puisque le triangle équilatéral au milieu partage un côté avec chacun des deux autres triangles équilatéraux, alors les côtés des trois triangles équilatéraux sont de même longueur.
Cinq de ces côtés forment le périmètre de $ABCD$.
Puisque $ABCD$ a un périmètre de 840 cm, alors les triangles équilatéraux ont des côtés de longueur $\frac{840 \text{ cm}}{5} = 168$ cm.
Puisque AB est le côté d'un triangle équilatéral, alors $AB = 168$ cm.

Réponse : (C)

14. Un pot de crème glacée contient suffisament de crème glacée pour préparer 6 cornets de crème glacée.
Donc, 2 pots de crème glacée contiennent suffisament de crème glacée pour préparer $2 \times 6 = 12$ cornets de crème glacée.
Puisque l'on a utilisé 5 pots de crème glacée pour préparer 12 cornets, cela signifie qu'il reste $5 - 2 = 3$ pots de crème glacée après que les 12 cornets de crème glacée ont été préparés.
Un pot de crème glacée contient suffisament de crème glacée pour préparer 4 coupes glacées.
Donc, on peut préparer $3 \times 4 = 12$ coupes glacées à partir des 3 pots restants.

Réponse : (C)

15. Étant donné qu'il y a un reste de 8 lorsqu'on divise n par 10, alors n est 8 de plus qu'un multiple de 10.
Cela signifie que n a 8 pour chiffre des unités, ce qui est 3 de plus que 5. Donc, si l'on divise n par 5, le reste est 5.
On peut vérifier que lorsqu'on divise des nombres qui sont 8 de plus qu'un multiple de 10 (tels que 8, 18, 28, 38) par 5, il y a un reste de 3.

Réponse : (D)

16. Avant que le trou ne soit percé, le bloc de bois avait un volume de $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} = 112 \text{ cm}^3$.
Le trou cylindrique a un rayon de 1 cm et une hauteur égale à celle du bloc de bois, soit 7 cm.
Le trou cylindrique a donc un volume de $\pi \times (1 \text{ cm})^2 \times 7 \text{ cm} = 7\pi \text{ cm}^3$.
Le volume du bloc de bois après que l'on a percé le trou est égal à $112 - 7\pi \approx 90{,}01 \text{ cm}^3$, soit 90 cm^3 au centimètre cubique près.

Réponse : (A)

17. Il y a 3 couleurs différentes et 4 numéros différents. Il y a donc $3 \times 4 = 12$ types différents de robots qui peuvent être assemblés. (Ces derniers sont R1, R2, R3, R4, B1, B2, B3, B4, G1, G2, G3, G4, où R, B, G représentent les 3 couleurs rouge, bleu, vert.)
Puisqu'il y a 12 types différents de robots, il est possible que les 12 premiers robots assemblés soient tous différents les uns des autres.
Dans ce cas, le 13^e robot assemblé serait le premier robot à avoir la même couleur et le même numéro qu'un robot assemblé précédemment assemblé. Donc, la plus grande valeur possible de n est 13.
Notes :
(i) Il est possible que deux robots identiques soient assemblés avant le 13^e robot. Cependant, dans le but de déterminer la valeur maximale de n, on cherche le point le plus tardif où cela peut arriver.
(ii) Il doit y avoir deux robots identiques parmi les 13 premiers robots assemblés, donc $n < 14$.
(iii) Cette solution s'appuie sur le *principe du pigeonnier* – un concept qui bénéficierait d'une exploration plus approfondie.

Réponse : (C)

18. Un tour complet fait 360°.
La flèche est initialement positionnée sur un rayon d'un secteur.
Puisque le disque est divisé en 5 secteurs égaux, chaque rotation de $\dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ déplace la flèche au rayon suivant qui marque la limite entre les secteurs.
En tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, la secteur D est le 4^e secteur.
Cela signifie que si l'angle de rotation est supérieur à $3 \times 72^\circ = 216^\circ$ et inférieur à $4 \times 72^\circ = 288^\circ$, alors la flèche s'arrête dans le secteur D.
Puisque chacun des choix de réponse est supérieur à 360° et inférieur à 720°, la flèche a dû effectuer plus d'un tour complet et moins de deux tours complets.
Lors du deuxième tour, la flèche s'arrêtera dans le secteur D si l'angle de rotation est supérieur à $216^\circ + 360^\circ = 576^\circ$ et inférieur à $288^\circ + 360^\circ = 648^\circ$.
Un seul des choix de réponse se trouve dans cet intervalle, soit 630°.

Réponse : (C)

19. *Solution 1*
Dans cette solution, on procède à rebours à partir de chaque choix de réponse. Puisque l'on doit trouver le plus petit entier possible de la liste, on commence par le plus petit des cinq choix, soit 39.

Si le plus petit entier de la liste est 39, alors le plus grand entier de la liste est $39 + 14 = 53$ (car les trois entiers ont une étendue de 14).
Si les trois entiers ont une moyenne de 50, alors leur somme est égale à $50 \times 3 = 150$. Parmi les trois entiers, deux sont 39 et 53. Donc le troisième entier (celui du milieu) est $150 - 39 - 53 = 58$. Puisque 58 est supérieur à 53, cela n'est pas possible (l'étendue de ces trois entiers est $58 - 39 = 19$ et non 14).

Si le plus petit entier de la liste est 40, alors le plus grand entier de la liste est $40 + 14 = 54$.
Si deux des entiers sont 40 et 54, alors le troisième entier (celui du milieu) est $150 - 40 - 54 = 56$. Comme 56 est supérieur à 54, cela n'est pas possible (l'étendue de ces trois entiers est $56 - 40 = 16$ et non 14).

Si le plus petit entier de la liste est 41, alors le plus grand entier de la liste est $41 + 14 = 55$.
Si deux des entiers sont 41 et 55, alors le troisième entier (celui du milieu) est $150 - 41 - 55 = 54$.

On peut confirmer que les trois entiers 41, 54, 55 ont bien une étendue de 14 et une moyenne de 50.
On a donc démontré que 41 est le plus petit entier parmi les choix de réponse qui satisfait les critères. Donc, 41 est le plus petit entier possible de la liste.

Solution 2
Soit a,b,c la liste de 3 entiers en ordre croissant.
Puisque a est le plus petit entier de la liste et c le plus grand et que la liste a une étendue de 14, alors c est 14 de plus que a, soit $c = a + 14$.
Les trois entiers ont une moyenne de 50, donc $\frac{a+b+c}{3} = 50$ ou $a + b + c = 150$.
On pose $c = a+14$ dans l'équation précédente pour obtenir $a+b+a+14 = 150$ ou $2a+b = 136$.
Pour trouver la plus petite valeur possible de a, on doit déterminer la plus grande valeur possible de b. On sait que $a < b$ et $b < c$, donc $b < a + 14$.
Puisque $2a$ est pair pour toutes les valeurs possibles de a et que 136 est pair, alors b doit être pair (car $2a + b = 136$).
On choisit d'abord une valeur arbitraire de b que l'on utilise pour déterminer a et c.
Si $b = 52$, alors $2a = 136 - 52 = 84$, donc $a = 42$ et $c = 42 + 14 = 56$.
Dans ce cas, les trois entiers sont $42, 52, 56$.
On augmente progressivement la valeur de b pour déterminer la plus petite valeur possible de a.
Si $b = 54$, alors $2a = 136 - 54 = 82$, donc $a = 41$ et $c = 41 + 14 = 55$.
Dans ce cas, les trois entiers sont $41, 54, 55$.
Si $b = 56$, alors $2a = 136 - 56 = 80$, donc $a = 40$ et $c = 40 + 14 = 54$.
Dans ce cas, les trois entiers sont $40, 56, 54$, ce qui n'est pas possible car $56 > 54$.
Si l'on continue à augmenter la valeur de b, on obtiendra des valeurs de c qui sont inférieures à b.
Si l'on diminue la valeur de b, on obtiendra des valeurs de a qui sont supérieures à 41.
Donc, le plus petit entier possible de la liste est 41.

Réponse : (E)

20. Étant donné que 21 fruits ne sont pas des pommes, alors la somme du nombre de poires et du nombre de bananes est égale à 21.
Étant donné que 25 fruits ne sont pas des poires, alors la somme du nombre de pommes et du nombre de bananes est égale à 25.
Étant donné que 28 fruits ne sont pas des bananes, alors la somme du nombre de pommes et du nombre de poires est égale à 28.
Si l'on additionne ces trois sommes $21 + 25 + 28$, on compte deux fois le nombre de poires, deux fois le nombre de bananes et deux fois le nombre de pommes (puisque chaque nombre parait dans exactement deux des trois énoncés ci-dessus).
C'est-à-dire que $21 + 25 + 28 = 74$ est le double du nombre total de fruits. Donc, il y a $\frac{74}{2} = 37$ fruits dans la boîte.

Réponse : (D)

21. On exprime le produit $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ sous la forme d'un produit de facteurs premiers :

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = (2 \times 3) \times 5 \times (2 \times 2) \times 3 \times 2$$

Ce produit a 4 facteurs 2, 2 facteurs 3 et 1 facteur 5. Donc, ce produit est égal à $2^4 \times 3^2 \times 5^1$.
La valeur de $a + b + c$ est égale à $4 + 2 + 1 = 7$.

Réponse : (B)

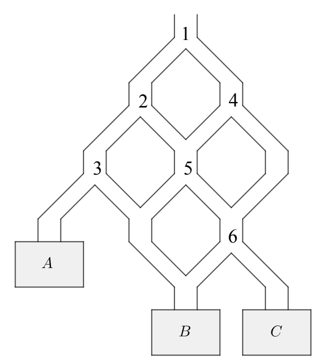
22. Le rapport du nombre de pièces de 25 cents au nombre de pièces de 10 cents au nombre de pièces de 5 cents est de 9 : 3 : 2.
Donc, le nombre de pièces de 25 cents est égal à $9k$, le nombre de pièces de dix cents est égal à $3k$ et le nombre de pièces de 5 cents est égal à $2k$, k étant un entier strictement positif.
La valeur des pièces de 25 cents dans le bocal, en cents, est égale à $25 \times 9k = 225k$.
La valeur des pièces de 10 cents dans le bocal, en cents, est égale à $10 \times 3k = 30k$.
Les pièces de 25 cents et de 10 cents ont une valeur totale de 17,85 \$ ou 1785 cents.
Donc, $225k + 30k = 1785$ ou $255k = 1785$, d'où $k = \frac{1785}{255} = 7$.
Il y a donc $2k = 14$ pièces de 5 cents. Donc la valeur totale des pièces de 5 cents est égale à 0,05 \$ $\times$ 14 = 0,70 \$.

Réponse : (C)

23. Les cinq entiers strictement positifs les plus petits qui sont des multiples de d sont d, $2d$, $3d$, $4d$ et $5d$.
Donc, la plus petite somme possible de cinq entiers strictement positifs distincts dont le plus grand diviseur commun est d est égale à $d + 2d + 3d + 4d + 5d = 15d$.
On sait que leur somme est au moins égale à $15d$. De plus, on sait que leur somme est égale à 264, d'où on a donc $15d \leq 264$.
Donc, $d \leq \frac{264}{15}$ ou $d \leq 17{,}6$.
Chacun des cinq entiers est divisible par d, donc la somme des cinq entiers, 264, est divisible par d.
Donc, on veut trouver le plus grand diviseur possible de 264 qui est inférieur ou égal à 17.
Puisque $264 = 2^3 \times 3 \times 11$, les diviseurs de 264 qui sont inférieurs ou égaux à 17 sont : $1, 2, 3, 4, 6, 8, 11$ et 12. Donc la plus grande valeur possible de d est 12.
La somme des chiffres de la plus grande valeur possible de d est $1 + 2 = 3$.
(Remarquons que 12, 24, 36, 48 et 144 sont cinq tels entiers dont le plus grand diviseur commun est 12 et dont la somme est 264.)

Réponse : (B)

24. Le chemin bifurque à 6 endroits différents, que l'on numérote de 1 à 6, comme dans la figure ci-contre.



On détermine d'abord la probabilité pour qu'une balle tombe dans le bac A.
Il y a exactement un chemin qui mène au bac A.
Ce chemin est celui qui se dirige vers le bas et à gauche à chacune des bifurcations 1, 2 et 3.
À chacune de ces bifurcations, la probabilité pour qu'une balle se dirige vers la gauche est égale à $\frac{1}{2}$. Donc la probabilité pour qu'une balle tombe dans le bac A est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
Ensuite, on détermine la probabilité pour qu'une balle tombe dans le bac C.
Il y a exactement trois chemins qui mènent au bac C.
L'un de ces chemins se dirige vers le bas et à droite à chacune des trois bifurcations 1, 4 et 6.
Donc, la probabilité pour qu'une balle tombe dans le bac C en suivant ce chemin est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
Un deuxième chemin menant au bac C se dirige à droite à la bifurcation 1, à gauche à la bifurcation 4, à droite à la bifurcation 5 et à droite à la bifurcation 6.
La probabilité pour qu'une balle suive ce chemin est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.
Le troisième et dernier chemin menant au bac C se dirige à gauche à la bifurcation 1 et à droite à chacune des trois bifurcation 2, 5 et 6.

La probabilité pour qu'une balle suive ce chemin est égale à $\frac{1}{16}$.

La probabilité pour qu'une balle tombe dans le bac C est égale à la somme des probabilités de ces trois chemins, soit

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2+1+1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Ensuite, on détermine la probabilité pour qu'une balle tombe dans le bac B.

Il y a six chemins différents qui mènent au bac B et on pourrait déterminer la probabilité pour qu'une balle suive chacun de ces chemins comme on l'a fait pour les bacs A et C.

Toutefois, une approche plus efficace consiste à noter qu'une balle finira nécessairement dans l'un des trois bacs et donc la probabilité pour qu'elle tombe dans le bac B est égale à 1 moins la probabilité pour qu'elle tombe dans le bac A moins la probabilité pour qu'elle tombe dans le bac C, soit

$$1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{8-1-2}{8} = \frac{5}{8}$$

La probabilité pour que les deux balles tombent dans des bacs différents est égale à 1 moins la probabilité que les deux balles tombent dans le même bac.

La probabilité pour qu'une balle tombe dans le bac A est égale à $\frac{1}{8}$. Donc, la probabilité pour que deux balles tombent dans le bac A est égale à $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$.

La probabilité pour qu'une balle tombe dans le bac C est égale à $\frac{1}{4}$. Donc, la probabilité pour que deux balles tombent dans le bac C est égale à $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

La probabilité pour qu'une balle tombe dans le bac B est égale à $\frac{5}{8}$. Donc la probabilité pour que deux balles tombent dans le bac B est égale à $\frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$.

Donc, la probabilité pour que les deux balles tombent dans des bacs différents est égale à

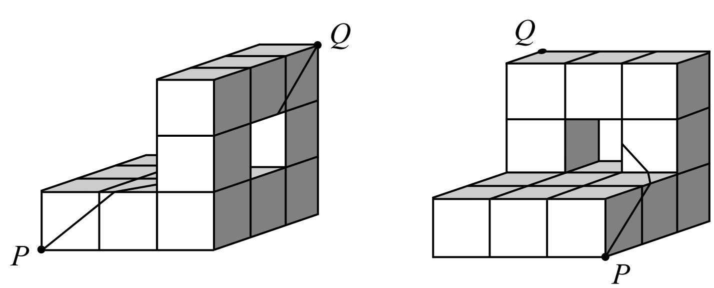
$$1 - \frac{1}{64} - \frac{1}{16} - \frac{25}{64} = \frac{64-1-4-25}{64} = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$$

Réponse : (A)

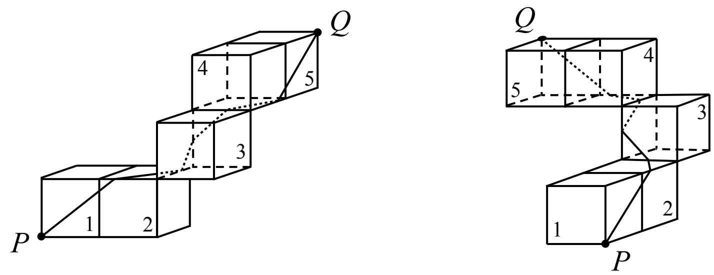
25. La plus petite valeur possible de d est près de 6,40.

Sur une surface plane, la distance la plus courte entre deux points est égale à la longueur de la ligne droite reliant les deux points. Puisque la fourmi doit marcher sur la surface de la figure, alors pour déterminer la distance en ligne droite entre P et Q, on peut « aplanir » la figure.

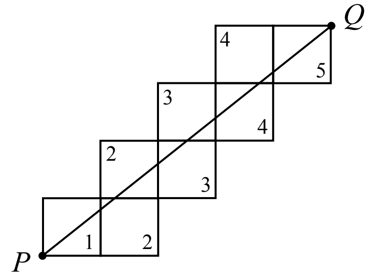
Les figures ci-dessous présentent deux perspectives différentes d'un chemin en ligne droite dont la longueur est la plus près de 6,40.



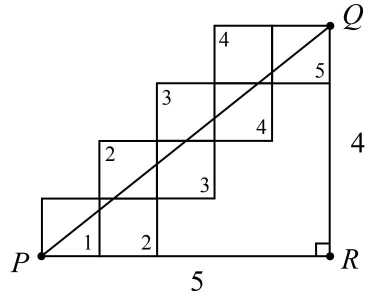
Dans les figures ci-dessous, on a retiré tous les cubes à l'exception des 5 cubes sur lesquels marche la fourmi afin de mieux observer ce chemin.



Pour voir que ce chemin est une ligne droite reliant P et Q, on dessine une partie du développement des figures précédentes. Ce développement partiel met en évidence les faces sur lesquelles marche la fourmi. Chaque face numérotée dans la figure ci-dessous appartient au cube portant le même numéro dans les figures ci-dessus.



Pour déterminer la longueur de PQ, on place R de manière que PR soit perpendiculaire à QR, comme dans la figure ci-dessous. Le triangle PQR est un triangle rectangle avec $PR = 5$ et $QR = 4$. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a $PQ = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$. Donc, la distance d est la plus près de 6,40.



Puisque 6,40 est la plus petite valeur parmi les cinq choix de réponse et que l'on a démontré qu'il existe un chemin de cette longueur de P à Q sur la surface de la structure, alors la plus petite valeur possible de d est 6,40.

Les quatre autres choix de réponse, 6,43, 6,48, 6,66 et 6,71 correspondent à des chemins différents que la fourmi pourrait emprunter pour aller de P à Q. Par exemple, il existe un deuxième chemin en ligne droite pour lequel PQ est approximativement 6,71. Pouvez-vous identifier ce chemin ? De même, pouvez-vous identifier les trois autres chemins de P à Q dont les longueurs sont égales à 6,43, 6,48 et 6,66 ? Il existe également des chemins différents de celui illustré ci-dessus pour lesquels $PQ = \sqrt{41}$. Pouvez-vous les identifier ?

Réponse : (B)