Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2024

le jeudi 4 avril 2024
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 5 avril 2024
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) On obtient le 5$^{\text{e}}$ terme en ajoutant 6 au 4$^{\text{e}}$ terme. Donc, le 5$^{\text{e}}$ terme est $21 + 6 = 27$.

   (b) *Solution 1*

   On obtient le 6$^{\text{e}}$ terme en ajoutant 6 au 5$^{\text{e}}$ terme. Donc, le 6$^{\text{e}}$ terme est $27 + 6 = 33$.
   Donc, la moyenne des 4$^{\text{e}}$, 5$^{\text{e}}$ et 6$^{\text{e}}$ termes est égale à $\frac{21+27+33}{3} = \frac{81}{3} = 27$.

   Solution 2

   Le 4$^{\text{e}}$ terme est 6 de moins que le 5$^{\text{e}}$ terme et le 6$^{\text{e}}$ terme est 6 de plus que le 5$^{\text{e}}$ terme. Donc la moyenne des 4$^{\text{e}}$, 5$^{\text{e}}$ et 6$^{\text{e}}$ termes est égale au 5$^{\text{e}}$ terme, soit 27.

   (c) On obtient le $n^{\text{ième}}$ terme ($n \geq 2$) en ajoutant $n-1$ fois 6 au premier terme, 3. Par exemple, le 2$^{\text{e}}$ terme est $3+1\times 6$, le 3$^{\text{e}}$ terme est $3+2\times 6$, le 4$^{\text{e}}$ terme est $3+3\times 6$ et ainsi de suite.
   De façon générale, le $n^{\text{ième}}$ terme est égal à $3 + (n-1) \times 6$.
   Donc, le 20$^{\text{e}}$ terme est égal à $3 + 19 \times 6 = 3 + 114 = 117$.

   (d) *Solution 1*

   Puisque chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant 6 au terme précédent et que $\frac{1000}{6} \approx 166{,}7$, il serait logique de déterminer d'abord le 166$^{\text{e}}$ terme. Le 166$^{\text{e}}$ terme est égal à $3+165\times 6 = 993$ et le terme suivant est égal à $993+6 = 999$ (ce qui est inférieur à 1000).
   Donc, le plus petit terme qui est supérieur à 1000 est le 168$^{\text{e}}$ terme, soit $999 + 6 = 1005$.
   (Remarquons que $1005 = 3 + 167 \times 6$.)

   Solution 2

   D'après la partie (c), le $n^{\text{ième}}$ terme est égal à $3 + (n-1) \times 6$.
   On veut déterminer le plus petit terme qui est supérieur à 1000. Donc, on trouve d'abord la plus petite valeur de n qui vérifie $3 + (n-1) \times 6 > 1000$.
   On résout cette inéquation pour obtenir

$$\begin{aligned} 3 + (n-1) \times 6 &> 1000 \\ 3 + 6n - 6 &> 1000 \\ 6n - 3 &> 1000 \\ 6n &> 1003 \\ n &> \tfrac{1003}{6} \approx 167{,}2 \end{aligned}$$

   Puisque n doit être un entier, alors le premier terme qui est supérieur à 1000 est le 168$^{\text{e}}$ terme, soit $3 + 167 \times 6 = 1005$.

2. (a) Au magasin 2, 50 % des chemises qu'Ella a déposées étaient rouges. Donc, les chemises restantes, soit 50 %, étaient bleues.
   Cela signifie qu'elle a déposé un nombre égal de chemises rouges et bleues au magasin 2.
   Puisque toutes les 200 chemises bleues ont été déposées au magasin 2, alors Ella a déposé 200 chemises rouges au magasin 2. Ella avait chargé 800 chemises rouges dans son camion et en a déposé 200 au magasin 2. Donc, elle a déposé $800 - 200 = 600$ chemises rouges au magasin 1.

   (b) Au magasin 1, Ella a déposé 40 % de $5x$ chemises rouges, soit $0{,}40 \times 5x = 2x$ chemises rouges.
   Ella a déposé les $5x - 2x = 3x$ chemises rouges restantes au magasin 2, en plus des $5x$ chemises bleues. Au magasin 2, $\dfrac{5x}{3x+5x} = \dfrac{5}{8}$ des chemises déposées étaient bleues, ce qui représente $\frac{5}{8} \times 100~\% = 62{,}5~\%$ des chemises.

   (c) Ella n'a déposé aucune chemise bleue au magasin 1. Elle a donc déposé toutes les y chemises bleues au magasin 2. Étant donné qu'Ella a déposé un nombre égal de chemises rouges, bleues et vertes au magasin 2, cela signifie qu'elle a déposé y chemises vertes et y chemises

rouges au magasin 2.
Mercredi, Ella a déposé $3y$ chemises rouges, y chemises bleues et y chemises vertes, soit $5y$ chemises en tout.
Sur l'ensemble des chemises déposées mercredi, $\dfrac{y}{5y} = \dfrac{1}{5}$ étaient vertes, ce qui représente $\frac{1}{5} \times 100\ \% = 20\ \%$ du nombre total de chemises.

3. (a) Dans la Figure 2, chaque petit morceau possède une croûte de même longueur.
On doit donc déterminer la longueur de MN telle que chaque morceau ait la même aire.
L'aire du carré $ABCD$ est égale à $30 \times 30 = 900$. Donc, chacun des trois petits morceaux a une aire de $\frac{900}{3} = 300$.
Puisque $ABCD$ est un carré, alors $AD = BC = 30$. Donc, $AM = 15$.
Le morceau $AMNB$ est un trapèze (AB et MN sont perpendiculaires à AM et sont donc parallèles l'un à l'autre) et a donc une aire de $\frac{15}{2}(MN + 30)$. On résout pour obtenir $\frac{15}{2}(MN + 30) = 300$ ou $MN + 30 = \frac{300 \times 2}{15}$, d'où $MN + 30 = 40$, soit $MN = 10$.
On aurait également pu remarquer que le triangle BNC a une aire de 300 et une base de $BC = 30$ et on aurait donc pu calculer sa hauteur, soit $h = \frac{300}{15} = 20$. Donc, $MN = AB - h$ soit $MN = 30 - 20 = 10$.

(b) Dans la Figure 3, chaque petit morceau possède une croûte de même longueur.
Puisque la tranche de pain a des croûtes sur trois côtés, alors la longueur totale des croûtes est égale à $3 \times 30 = 90$.
La longueur de la croûte de chaque morceau est donc égale à $\frac{90}{5} = 18$.
Puisque l'un des morceaux est le triangle TPQ, alors la longueur de sa croûte, représentée par le côté PQ, est donc égale à $PQ = 18$.

(c) Le carré $ABCD$ a une aire de $30 \times 30 = 900$. Donc, chacun des 5 morceaux a une aire de $\frac{900}{5} = 180$.
Soit W un point placé sur BC tel que MW soit perpendiculaire à BC.
Puisque MW doit passer par S et T, alors TW est la hauteur du triangle TPQ.
Le triangle TPQ a une aire de 180. Donc, $\frac{1}{2} \times PQ \times TW = 180$ ou $\frac{1}{2} \times 18 \times TW = 180$, soit $TW = \frac{180}{9} = 20$.
Puisque MS et AU sont tous deux perpendiculaires à AM, alors MS et AU sont parallèles et donc $AMSU$ est un trapèze.
Les 5 morceaux ont la même longueur de croûte, donc $AU = PQ = 18$.
L'aire de $AMSU$ est égale à 180. On résout $\frac{AM}{2}(MS + AU) = 180$ pour obtenir $\frac{15}{2}(MS + 18) = 180$ ou $MS + 18 = 24$. Donc, $MS = 6$.
Puisque $MW = AB = 30$, alors $ST = 30 - MS - TW$ ou $ST = 30 - 6 - 20$, soit $ST = 4$.

4. (a) Puisque chaque joueur peut obtenir 3 entiers distincts, alors le nombre total de résultats possibles est égal à $3 \times 3 = 9$. De plus, ces résultats sont équiprobables.
Si Alice obtenait un 5, elle gagnerait si Binh obtenait un 1, mais elle perdrait si Binh obtenait un 8 ou un 10.
Si Alice obtenait un 9, elle gagnerait si Binh obtenait un 1 ou un 8, mais elle perdrait si Binh obtenait un 10.
Si Alice obtenait un 11, elle gagnerait si Binh obtenait un 1, un 8 ou un 10.
Ces résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous, où « A » indique qu'Alice a gagné et « B » que Binh a gagné.

Nombre qu'Alice a obtenu

Nombre que Binh a obtenu

B \ A	5	9	11
1	A	A	A
8	B	A	A
10	B	B	A

Parmi les 9 résultats possibles, Alice est la gagnante dans 6 cas. Donc, la probabilité pour qu'Alice remporte la partie est égale à $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

(b) Le disque de Carole comporte les entiers $\{1,\ 5,\ 10\}$. Soit $\{a, b, c\}$ le disque de Darsh avec $a < b < c$; a, b et c étant trois entiers distincts parmi 2, 3, 4, 6, 7, 8 et 9.
Chaque joueur peut obtenir 3 entiers distincts et donc le nombre total de résultats possibles est égal à $3 \times 3 = 9$. De plus, ces résultats sont équiprobables.
Donc, la probabilité pour que Darsh remporte la partie est supérieure à celle de Carole si l'entier qu'il obtient est supérieur à celui de Carole pour au moins 5 des 9 résultats possibles.

Si Carole obtenait un 1, alors Darsh gagnerait puisque chacun de ses entiers doit être supérieur à 1.
Lorsque Carole obtient un 1, il y a 3 résultats gagnants pour Darsh car il peut obtenir a, b ou c (chacun étant supérieur à 1).
Si Carole obtenait un 10, alors Darsh perdrait puisque chacun de ses entiers doit être inférieur à 10.
Il y a 3 résultats possibles lorsque Carole obtient un 10, chacun de ces résultats représentant une perte pour Darsh.
Jusque-là, Darsh remporte 3 des résultats possibles si Carole obtient un 1 ou un 10.
Cela indique que l'on peut déterminer la probabilité pour que Darsh remporte la partie en comparant a, b, c avec le 5 obtenu par Carole sur son disque.
Plus précisément, si au moins deux des entiers de Darsh sont supérieurs à 5, alors la probabilité pour que Darsh remporte la partie est supérieure à celle de Carole (et l'inverse est vrai si au moins deux de ses entiers sont inférieurs à 5).
Pourquoi est-ce le cas ? Lorsque Carole obtient un 1, Darsh remporte les 3 résultats possibles. Lorsque Carole obtient un 10, Darsh ne remporte aucun des résultats possibles. Lorsque Carole obtient un 5, Darsh remporte au moins 2 résultats possibles uniquement lorsque deux de ses entiers sont supérieurs à 5. Donc, Darsh remporte au moins $3+0+2 = 5$ résultats sur les 9 résultats possibles (et Carole remporte 4 résultats ou moins).
Pour déterminer le nombre de disques différents pour lesquels au moins deux des entiers de Darsh sont supérieurs à 5, on considère les deux cas suivants.

1[er] cas : Les trois entiers de Darsh sont tous supérieurs à 5.

Dans ce cas, Darsh remporte 6 résultats sur les 9 résultats possibles, comme dans le tableau ci-contre. Les entiers que Darsh peut choisir sont 6, 7, 8 et 9. Donc, il y a 4 disques possibles dans ce cas : {6, 7, 8}, {6, 7, 9}, {6, 8, 9} et {7, 8, 9}.

Nombre que Darsh a obtenu

Nombre que Carole a obtenu

C \ D	a	b	c
1	D	D	D
5	D	D	D
10	C	C	C

2[e] cas : Parmi les entiers de Darsh, deux sont supérieurs à 5 et un est inférieur à 5.

Dans ce cas, Darsh remporte 5 résultats sur les 9 résultats possibles, comme dans le tableau ci-contre. Il y a 6 paires possibles d'entiers qui sont supérieurs à 5, soit {6, 7}, {6, 8}, {6, 9}, {7, 8}, {7, 9} et {8, 9}. Pour chacune de ces 6 paires, il y a 3 choix possibles pour l'entier inférieur à 5, soit 2, 3 et 4. Donc, il y a $6 \times 3 = 18$ disques possibles dans ce cas.

Nombre que Darsh a obtenu

Nombre que Carole a obtenu

C \ D	a	b	c
1	D	D	D
5	C	D	D
10	C	C	C

Donc, Darsh peut créer $4 + 18 = 22$ disques différents pour lesquels la probabilité qu'il remporte la partie est supérieure à celle de Carole.

(c) On détermine d'abord la valeur de p, soit la probabilité pour que François gagne contre Eloïse.
Ces résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous, où ≪ F ≫ indique que François a gagné et ≪ E ≫ qu'Eloïse a gagné.

Nombre que François a obtenu

Nombre qu'Eloïse a obtenu

E \ F	2	10	18
5	E	F	F
8	E	F	F
15	E	E	F

On constate que François remporte 5 résultats sur les 9 résultats possibles, donc $p = \frac{5}{9}$.
Selon l'énoncé, $p = q = r$. Donc, $q = r = \frac{5}{9}$. C'est-à-dire que la probabilité pour qu'Eloïse gagne contre Geneviève est égale à $\frac{5}{9}$ et la probabilité que Geneviève gagne contre François est également $\frac{5}{9}$. Cela signifie qu'Eloïse remporte exactement 5 résultats sur les 9 résultats possibles lorsqu'elle joue contre Geneviève. De même, Geneviève remporte exactement 5 résultats sur les 9 résultats possibles lorsqu'elle joue contre François.
Examinons d'abord le jeu où Eloïse et Geneviève s'affrontent.
Le disque d'Eloïse comporte les entiers {5, 8, 15}. Le disque de Geneviève comporte les

entiers $\{x, y, z\}$ avec $x < y < z$; x, y, z étant trois entiers distincts parmi

$$1, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 19, 20$$

Chacun des 3 entiers d'Eloïse (5, 8, 15) remporte 0, 1, 2 ou 3 résultats possibles.
Par exemple, si Eloïse obtient 15 et $15 > z$, alors Eloïse remporte les 3 résultats possibles (15 bat x, y et z).
À l'inverse, si Eloïse obtient 15 et $15 < x$, alors Eloïse ne remporte aucun résultat possible.
On remarque que si un disque comporte les entiers $\{p,q,r\}$ avec $p < q < r$, alors le nombre de résultats gagnants lorsqu'on obtient r doit être supérieur ou égal au nombre de résultats gagnants lorsqu'on obtient q ; ce dernier doit être supérieur ou égal au nombre de résultats gagnants lorsqu'on obtient p. Pouvez-vous expliquer pourquoi ?

Il y a trois manières différentes pour qu'Eloïse remporte exactement 5 résultats sur les 9 résultats possibles contre Geneviève :

- Le plus grand entier d'Éloïse remporte exactement 3 résultats, son deuxième plus grand entier remporte exactement 2 résultats et son plus petit entier ne remporte aucun résultat,
- Le plus grand entier d'Éloïse remporte exactement 3 résultats et ses deux autres entiers remportent chacun exactement 1 résultat ou
- Les deux plus grands entiers d'Éloïse remportent chacun exactement 2 résultats et son plus petit entier remporte exactement 1 résultat.

Soit ces trois scénarios respectivement les scénarios 3/2/0, 3/1/1 et 2/2/1.
On remarque que dans chaque cas, la somme des nombres de résultats gagnants est 5 et que ce sont les seules manières possibles pour qu'il y ait exactement 5 résultats gagnants.
Si le scénario 3/2/0 est l'issue du jeu entre Eloïse et Geneviève, alors Eloïse remporte les 3 résultats lorsqu'elle obtient 15, remporte 2 résultats lorsqu'elle obtient 8 et ne remporte aucun résultat lorsqu'elle obtient 5.
Rappelons que le disque de Geneviève comporte les entiers $\{x, y, z\}$ avec $x < y < z$. Cela signifie que si l'issue du jeu est le scénario 3/2/0, alors les six entiers des deux disques, en ordre croissant, sont :

$$5 < x < y < 8 < z < 15$$

Autrement dit, puisque 15 est supérieur à x, à y et à z, alors Eloïse remporte 3 résultats lorsqu'elle obtient 15. Puisque 8 est supérieur à x et à y, alors Eloïse remporte 2 résultats lorsqu'elle obtient 8. Puisque 5 est inférieur à x, à y et à z, alors Eloïse ne remporte aucun résultat lorsqu'elle obtient 5.
Donc, si Geneviève crée son disque avec $x = 6$, $y = 7$ et $z = 9$, 11, 12, 13 ou 14, alors la probabilité pour qu'Eloïse gagne contre Geneviève est égale à $\frac{5}{9}$ puisque Eloïse remportera exactement 5 résultats sur les 9 résultats possibles.

Si l'issue du jeu est le scénario 3/1/1, alors les six entiers des deux disques, en ordre croissant, sont :

$$x < 5 < 8 < y < z < 15$$

Dans ce cas, un résultat de 15 gagne 3 fois et des résultats de 5 et 8 gagnent chacun exactement une fois.
Donc, si Genevièvre crée son disque avec $x = 1, 3$ ou 4 et que y et z (avec $y < z$) sont choisis parmi 9, 11, 12, 13, 14, alors la probabilité pour qu'Eloïse gagne contre Geneviève est égale à $\frac{5}{9}$.

Enfin, si le scénario 2/2/1 est l'issue du jeu entre Eloïse et Geneviève, alors les six entiers des deux disques, en ordre croissant, sont :

$$x < 5 < y < 8 < 15 < z$$

donc $x = 1, 3$ ou 4, $y = 6$ ou 7 et $z = 16, 17, 19$ ou 20.

Ces résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Eloïse $\{5, 8, 15\}$ bat Geneviève $\{x, y, z\}$

Cas	Scénario	Ordre des entiers	x possible	y possible	z possible
1	3/2/0	$5 < x < y < 8 < z < 15$	6	7	9,11,12,13,14
2	3/1/1	$x < 5 < 8 < y < z < 15$	$1, 3, 4$	9,11,12,13,14	9,11,12,13,14
3	2/2/1	$x < 5 < y < 8 < 15 < z$	$1, 3, 4$	$6, 7$	$16, 17, 19, 20$

(Remarquons que dans le 2^{e} cas, les valeurs de y ne sont possibles que si $y < z$.)
Il faut également que le disque de Geneviève soit conçu de telle sorte que la probabilité pour que Geneviève batte François soit égale à $\frac{5}{9}$.
Dans le jeu où Geneviève et François s'affrontent, on utilise le même processus et la même notation que ceux que l'on a utilisé dans le jeu entre Eloïse et Geneviève.
De plus, d'après le tableau ci-dessus, on doit choisir x, y, z de manière que

$$x = 1, 3, 4 \text{ ou } 6 \text{ et } y = 6, 7, 9, 11, 12, 13 \text{ ou } 14 \text{ et } z = 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 19, \text{ou } 20$$

en notant à nouveau qu'il faut avoir $x < y < z$.
Dans le tableau ci-dessous, on exclut toutes les autres valeurs possibles de x, y, z qui ne figurent pas dans la liste ci-dessus.

Geneviève $\{x, y, z\}$ bat François $\{2, 10, 18\}$

Cas	Scénario	Ordre des entiers	x possible	y possible	z possible
4	3/2/0	$x < 2 < 10 < y < 18 < z$	1	11,12,13,14	19,20
5	3/1/1	$2 < x < y < 10 < 18 < z$	3,4,6	6,7,9	19,20
6	2/2/1	$2 < x < 10 < y < z < 18$	3,4,6	11,12,13,14	11,12,13,14,16,17

(Remarquons que dans les 5^{e} et 6^{e} cas, les valeurs de x et de y ne sont possibles que si $x < y < z$.)
Pour concevoir un disque qui permet à Eloïse de gagner contre Geneviève avec une probabilité de $\frac{5}{9}$ et à Geneviève de gagner contre François avec la même probabilité, on doit déterminer les valeurs de x, y, z qui satisfont au moins l'un des 1er, 2^{e} ou 3^{e} cas tout en satisfaisant simultanément au moins l'un des 4^{e}, 5^{e} ou 6^{e} cas.

On détermine d'abord s'il existe des valeurs de x, y, z qui satisfont le 1er cas tout en satisfaisant simultanément au moins l'un des 4^{e}, 5^{e} ou 6^{e} cas.
Pour satisfaire le 1er cas, on doit avoir $y = 7$ et $z = 9, 11, 12, 13$ ou 14. Cependant, aucun des 4^{e}, 5^{e} ou 6^{e} cas ne correspond à ces restrictions sur y et z. Il n'y a donc pas de disques qui soient conçus de telle sorte qu'Eloïse gagne contre Geneviève avec le scénario 3/2/0.

Ensuite, on détermine s'il existe des valeurs de x, y, z qui satisfont le 2^{e} cas tout en satisfaisant simultanément au moins l'un des 4^{e}, 5^{e} ou 6^{e} cas.
Pour satisfaire le 2^{e} cas, on doit avoir $z = 9, 11, 12, 13$ ou 14. Cependant, aucun des 4^{e} et 5^{e} cas ne correspond à ces restrictions sur z. Il nous reste donc à considérer les 2^{e} et 6^{e} cas.
Si $x = 3$ ou 4, et $y = 11, 12, 13$ ou 14, et $z = 11, 12, 13$ ou 14, alors les restrictions sur les 2^{e} et 6^{e} cas sont satisfaites.

En rappelant que $y < z$, il y a 6 paires (y, z) qui satisfont ces restrictions : $(y, z) = (11, 12), (11, 13), (11, 14), (12, 13), (12, 14), (13, 14)$.
Pour chacune de ces 6 paires, il y a 2 choix possibles pour x (x peut égaler 3 ou 4) et il y a donc $6 \times 2 = 12$ disques que Geneviève pourrait créer.

Enfin, on détermine s'il y a des valeurs de x, y, z qui satisfont le 3$^{\text{e}}$ cas tout en satisfaisant simultanément au moins l'un des 4$^{\text{e}}$, 5$^{\text{e}}$ ou 6$^{\text{e}}$ cas.
Pour satisfaire le 3$^{\text{e}}$ cas, on doit avoir $y = 6$ ou 7. Cependant aucun des 4$^{\text{e}}$ et 6$^{\text{e}}$ cas ne correspond à ces restrictions sur y. Il nous reste donc à considérer les 3$^{\text{e}}$ et 5$^{\text{e}}$ cas.
Si $x = 3$ ou 4, et $y = 6$ ou 7, et $z = 19$ ou 20, alors les restrictions sur les 3$^{\text{e}}$ et 5$^{\text{e}}$ cas sont satisfaites.
Puisque x, y et z peuvent prendre 2 valeurs chacun, alors Geneviève peut créer $2 \times 2 \times 2 = 8$ disques (remarquons que chacun des 8 disques a $x < y < z$).

Puisque les $12 + 8 = 20$ disques sont différents les uns des autres, alors Geneviève peut créer 20 disques différents pour que $p = q = r = \frac{5}{9}$.