Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2024

le mardi 3 avril 2024
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 4 avril 2024
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Pour tout $x \neq 0$, on remarque que $\dfrac{x^4+3x^2}{x^2} = x^2+3$.

   Donc, lorsque $x=2$, on a $\dfrac{x^4+3x^2}{x^2} = x^2+3 = 2^2+3 = 7$.

   OU Lorsque $x=2$, on a $\dfrac{x^4+3x^2}{x^2} = \dfrac{2^4+3\cdot 2^2}{2^2} = \dfrac{28}{4} = 7$.

   (b) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, on a

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2+BC^2 \\ (t+1)^2 &= 10^2+(t-1)^2 \\ t^2+2t+1 &= 100+t^2-2t+1 \\ 4t &= 100 \end{aligned}$$

   Donc, $t=25$.
   On aurait également pu multiplier le triplet pythagoricien (5, 12, 13) par 2 pour obtenir le triplet pythagoricien (10, 24, 26). Remarquons que la différence entre $t+1$ et $t-1$ est de 2, tout comme celle entre 26 et 24, ce qui donne $t+1=26$, d'où $t=25$.

   (c) Puisque $\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{2y} = 14$, alors $\dfrac{4}{2y}+\dfrac{3}{2y} = 14$ ou $\dfrac{7}{2y} = 14$.

   Donc, $2y = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2}$, d'où $y = \dfrac{1}{4}$.

2. (a) Soit $a, b, c, 13, e, 36$ la suite de six termes.
   Puisque $36 = 13+e$, alors $e = 36-13 = 23$.
   Puisque $e = c+13$, alors $23 = c+13$, d'où $c = 10$.
   Puisque $13 = b+c$ et $c=10$, alors $b=3$.
   Puisque $c = a+b$ et $c=10$ et $b=3$, alors $a = 10-3 = 7$.
   Donc, le premier terme est 7.

   (b) D'après les renseignements donnés, on obtient $5r^2+5r^3 = (5r)^2$. Donc, $5r^2+5r^3 = 25r^2$.
   Puisque $r \neq 0$, on peut diviser par $5r^2$ pour obtenir $1+r=5$, d'où $r=4$.

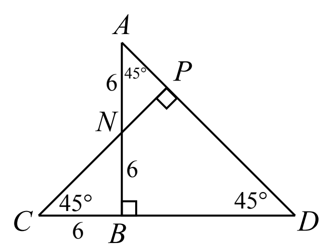
   (c) Soit w, x, y et z les notes respectives de Jacques au premier, deuxième, troisième et quatrième tests.
   Puisque Jacques a obtenu une moyenne de 65 sur les trois premiers tests, alors $\dfrac{w+x+y}{3} = 65$ ou $w+x+y = 195$.
   Puisque Jacques a obtenu une moyenne de 80 sur les trois derniers tests, alors $\dfrac{x+y+z}{3} = 80$ ou $x+y+z = 240$.
   Puisque sa note au quatrième test était le double de celle du premier test, alors $z = 2w$.
   Donc, $w+x+y = 195$ et $x+y+2w = 240$.
   On soustrait la première équation de la seconde pour obtenir $w = 45$. Donc, Jacques a obtenu une note de $z = 2w = 90$ au quatrième test.

3. (a) Puisque $y = r(x-3)(x-r)$ passe par $(0, 48)$, alors $48 = r(0-3)(0-r)$.
Donc, $48 = 3r^2$, d'où $r^2 = 16$ ou $r = \pm 4$.

(b) Le coût total d'un article à B \$ avec une taxe de vente de 13 % est égal à $(1{,}13B)$ \$.
Le coût total d'un article à B \$ avec une taxe de vente de 5 % est égal à $(1{,}05B)$ \$.
D'après les renseignements donnés, $(1{,}13B)\ \$ - (1{,}05B)\ \$ = 24\ \$$ ou $1{,}13B - 1{,}05B = 24$.
Donc, $0{,}08B = 24$, d'où $B = 300$.
On aurait aussi pu remarquer que la différence entre les prix totaux est égale à la différence entre les montants de la taxe payée, soit la différence entre 13 % du prix initial et 5 % du prix initial ; cette différence est égale à 8 % du prix initial. Si 8 % du prix initial est égal à 24 \$, alors 1 % du prix initial est égal à 3 \$. Donc, la valeur de B est égale à $3\ \$ \times 100 = 300\ \$$.

(c) Lorsque $n = 1$, $f(2n) = (f(n))^2$ devient $f(2) = (f(1))^2$.
Puisque $f(1) = 3$, alors $f(2) = 3^2 = 9$.
Lorsque $m = 1$, $f(2m+1) = 3f(2m)$ devient $f(3) = 3f(2)$.
Puisque $f(2) = 9$, alors $f(3) = 3 \cdot 9 = 27$.
Lorsque $n = 2$, $f(2n) = (f(n))^2$ devient $f(4) = (f(2))^2$.
Puisque $f(2) = 9$, alors $f(4) = 9^2 = 81$.
Donc, $f(2) + f(3) + f(4) = 9 + 27 + 81 = 117$.

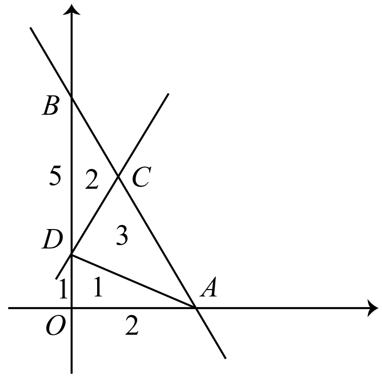
4. (a) Puisque le triangle ABD est rectangle en B et a $\angle ADB = 45^\circ$, alors $\angle BAD = 45^\circ$.
De même, le triangle CPD est rectangle et isocèle avec $\angle PCD = 45^\circ$.
De plus, les triangles APN et CBN sont également tous deux rectangles et isocèles.
Puisque $CB = 6$ et $NB = CB$, alors $NB = 6$.
Puisque $AB = 12$ et $NB = 6$, alors $AN = AB - NB = 6$.



Puisque le triangle APN est rectangle et isocèle, alors les longueurs de ses côtés sont dans le rapport $1 : 1 : \sqrt{2}$.
Donc, $AP = PN = \frac{1}{\sqrt{2}} AN = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.
OU Si $AP = PN = x$, alors d'après le théorème de Pythagore, on a $AN^2 = AP^2 + PN^2$ et donc $6^2 = 2x^2$, soit $AP^2 = x^2 = 18$.
Donc, l'aire du triangle APN est égale à $\frac{1}{2} \cdot AP \cdot PN = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 9$.

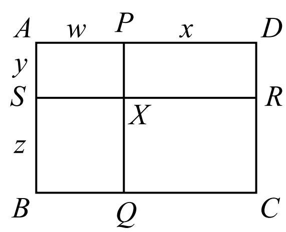
(b) La droite d'équation $y = -3x + 6$ a pour ordonnée à l'origine 6, ce qui signifie que $OB = 6$.
Pour trouver l'abscisse à l'origine de cette droite, on pose $y = 0$ et on obtient l'équation $-3x + 6 = 0$, d'où $3x = 6$ ou $x = 2$. Cela signifie que $OA = 2$.
Puisque le triangle ABO est rectangle en O, son aire est égale à $\frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6$.
Puisque l'aire du triangle ACD est la moitié de celle du triangle ABO, alors le triangle ACD a une aire de 3.
Remarquons ensuite que la droite d'équation $y = mx + 1$ a une ordonnée à l'origine de 1. Donc, $OD = 1$.
Cela signifie que l'aire du triangle ADO est égale à $\frac{1}{2} \cdot OD \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

On peut déterminer l'aire du triangle BCD en soustrayant les aires des triangles ACD et ADO de celle du triangle ABO. Donc, l'aire du triangle BCD est égale à $6 - 3 - 1 = 2$.



On considère la base BD (dont la longueur est $6 - 1 = 5$) du triangle BCD et la hauteur correspondante (soit la distance, h, de C à l'axe des ordonnées).
Donc, $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h = 2$, d'où $h = \frac{4}{5}$.
Cela signifie que C a pour abscisse $\frac{4}{5}$.
Puisque C est sur la droite d'équation $y = -3x + 6$, on a $y = -3 \cdot \frac{4}{5} + 6 = \frac{18}{5}$.
Donc, C a pour coordonnées $(\frac{4}{5}, \frac{18}{5})$.

5. (a) Soit $AP = w$, $PD = x$, $AS = y$ et $SB = z$.



La notation $|APXS|$ représente l'aire de $APXS$. Les autres aires sont notées de façon semblable.
Donc, $|APXS| = wy$, $|PDRX| = xy$, $|SXBQ| = wz$ et $|XRCQ| = xz$.
Donc,

$$|APXS| \cdot |XRCQ| = wy \cdot xz = xy \cdot wz = |PDRX| \cdot |SXQB|$$

Si $|APXS| = 2$, $|PDRX| = 3$ et $|SWQB| = 6$, alors $a = |XRQC| = \dfrac{2 \cdot 6}{3} = 4$.

Si $|APXS| = 2$, $|PDRX| = 6$ et $|SWQB| = 3$, alors $a = |XRQC| = \dfrac{2 \cdot 3}{6} = 1$.

Si $|APXS| = 6$, $|PDRX| = 2$ et $|SWQB| = 3$, alors $a = |XRQC| = \dfrac{6 \cdot 3}{2} = 9$.

Puisqu'on sait que a a trois valeurs possibles, alors ces valeurs sont 1, 4 et 9.
(Pouvez-vous expliquer pourquoi il y a exactement trois telles valeurs ?)

(b) Les abscisses à l'origine de la parabole d'équation $y = x^2 - 4tx + 5t^2 - 6t$ sont

$$x = \frac{4t \pm \sqrt{(-4t)^2 - 4(5t^2 - 6t)}}{2}$$

La distance, d, entre ces abscisses à l'origine est égale à leur différence, soit :

$$d = \frac{4t + \sqrt{(-4t)^2 - 4(5t^2 - 6t)}}{2} - \frac{4t - \sqrt{(-4t)^2 - 4(5t^2 - 6t)}}{2} = \sqrt{(-4t)^2 - 4(5t^2 - 6t)}$$

Donc, d est aussi grand que possible lorsque le discriminant est aussi grand que possible.
Le discriminant, Δ, est :

$$\Delta = (-4t)^2 - 4(5t^2 - 6t) = 16t^2 - 20t^2 + 24t = -4t^2 + 24t$$

On complète le carré,

$$\Delta = -4(t^2 - 6t) = -4(t^2 - 6t + 9 - 9) = -4(t^2 - 6t + 9) + 36 = -4(t-3)^2 + 36$$

Puisque $(t-3)^2 \geq 0$, alors $\Delta \leq 36$ et $\Delta = 36$ exactement lorsque $(t-3)^2 = 0$ ou $t = 3$.
Donc, le discriminant est aussi grand que possible lorsque $t = 3$, ce qui signifie que la distance entre les abscisses à l'origine est aussi grande que possible lorsque $t = 3$.

6. (a) Chaque multiple de 21 est de la forme $21k$, k étant un entier quelconque.
Pour qu'un tel multiple soit entre 10 000 et 100 000, il faut que $10\,000 < 21k < 100\,000$ ou $\frac{10\,000}{21} < k < \frac{100\,000}{21}$.
Puisque $\frac{10\,000}{21} \approx 476{,}2$ et $\frac{100\,000}{21} \approx 4761{,}9$ et k est un entier, alors $477 \leq k \leq 4761$. (Remarquons que k est un entier supérieur à 476,2 et doit donc doit être au moins 477 ; de même, k est au plus 4761.)
On veut également que $21k$ ait un 1 pour chiffre des unités.
Puisque le chiffre des unités de 21 est 1, alors le chiffre des unités du produit de 21 et k correspond au chiffre des unités de k lui-même. Donc, pour que $21k$ ait un 1 pour chiffre des unités, k doit avoir 1 pour chiffre des unités.
Donc, les valeurs possibles de k sont 481, 491, 501, ..., 4751, 4761.
Il y a 429 telles valeurs. Pour le voir, on constate que le fait de compter les entiers de cette liste revient à compter ceux de la liste 48, 49, 50, ..., 475, 476. On peut obtenir cette liste en supprimant les entiers de 1 à 47 de la liste des entiers de 1 à 476. Cette liste contient donc $476 - 47 = 429$ entiers.
Donc, $M = 429$.

(b) *Solution 1*
On peut séparer les N élèves du lycée Strickland en quatre groupes :

- a élèves qui sont dans le club de sciences physiques et dans le club de mathématiques
- b élèves qui sont dans le club de sciences physiques et qui ne sont pas dans le club de mathématiques
- c élèves qui ne sont pas dans le club de sciences physiques mais qui sont dans le club de mathématiques
- d élèves qui ne sont ni dans le club de sciences physiques ni dans le club de mathématiques

	Dans le club de maths	Pas dans le club de maths
Dans le club de sciences physiques	a	b
Pas dans le club de sciences physiques	c	d

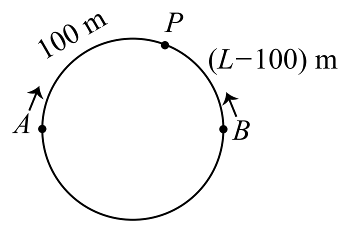
D'après les renseignements donnés, $\frac{2}{5}N$ élèves sont dans le club de sciences physiques.
Autrement dit, $a + b = \frac{2}{5}N$.
Parmi les élèves qui font partie du club de sciences physiques, le nombre d'élèves qui ne font pas partie du club de mathématiques est le double de ceux qui en font partie. Cela signifie que $b = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}N = \frac{4}{15}N$ et $a = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}N = \frac{2}{15}N$.
D'après les renseignements donnés, $\frac{1}{4}N$ élèves font partie du club de mathématiques.
Autrement dit, $a + c = \frac{1}{4}N$.
Puisque $a = \frac{2}{15}N$, alors $c = \frac{1}{4}N - \frac{2}{15}N = \frac{7}{60}N$.
Puisque $a + b + c + d = N$, alors $d = N - a - b - c = N - \frac{4}{15}N - \frac{2}{15}N - \frac{7}{60}N = \frac{29}{60}N$.
Enfin, on sait que $500 < N < 600$.
Puisque a, b, c et d sont tous des entiers, alors N doit être divisible par 60.
Donc, $N = 540$ et donc le nombre d'élèves qui ne font partie d'aucun des deux clubs est égal à $d = \frac{29}{60} \cdot 540 = 261$.

Solution 2
Puisqu'il y a N élèves au lycée Strickland, alors $\frac{2}{5}N$ élèves sont dans le club de sciences physiques et $\frac{1}{4}N$ sont dans le club de mathématiques.
Puisque $\frac{2}{5}N$ et $\frac{1}{4}N$ sont tous deux des entiers, alors N doit être divisible par 5 et par 4.
Puisque 5 et 4 n'admettent aucun diviseur commun supérieur à 1, alors N doit être divisible par $5 \cdot 4 = 20$.
Donc, on a $N = 20m$, m étant un entier strictement positif.
Dans ce cas, $\frac{2}{5}N = 8m$ élèves sont dans le club de sciences physiques et $\frac{1}{4}N = 5m$ élèves sont dans le club de mathématiques.
Parmi les $8m$ élèves du club de sciences physiques, le nombre d'élèves qui ne font pas partie du club de mathématiques est le double de ceux qui en font partie.
Autrement dit, $\frac{1}{3}$ des $8m$ élèves du club de sciences physiques font partie du club de mathématiques. Cela signifie que m doit être divisible par 3, puisque 3 est un nombre premier et que 8 n'est pas divisible par 3.
Donc, $m = 3k$, k étant un entier strictement positif, ce qui signifie que $N = 20m = 60k$ et $\frac{2}{5}N = 8m = 24k$ et $\frac{1}{4}N = 5m = 15k$.
Puisque $500 < N < 600$ et que N est un multiple de 60, alors $N = 540$, ce qui signifie que $k = 9$.
Donc, le nombre d'élèves dans le club de sciences physiques est égal à $24k = 216$, dont $\frac{1}{3} \cdot 216 = 72$ font partie du club de mathématiques et $\frac{2}{3} \cdot 216 = 144$ ne font pas partie du club de mathématiques.
De plus, le nombre d'élèves qui font partie du club de mathématiques est égal à $15k = 135$.
Enfin, on sait que :

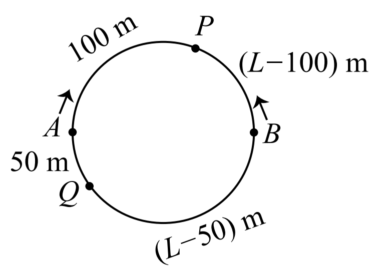
- il y a 540 élèves à l'école,
- 72 d'entre eux font partie des deux clubs,
- 144 d'entre eux font partie du club de sciences physiques mais ne font pas partie du club de mathématiques et
- $135 - 72 = 63$ font partie du club de mathématiques mais ne font pas partie du club de sciences physiques.

Donc, le nombre d'élèves qui ne font partie d'aucun des deux clubs est égal à $540 - 72 - 144 - 63 = 261$.

7. (a) Soit $2L$ la longueur de la piste en mètres, a la vitesse constante d'Arun en m/s et b la vitesse constante de Bella en m/s.
Lorsque Arun et Bella courent pendant le même intervalle de temps, le rapport des distances parcourues est égal au rapport de leurs vitesses.
Considérons l'intervalle de temps depuis le départ jusqu'à ce qu'ils se rencontrent pour la première fois. Dans la figure ci-dessous, A est le point de départ d'Arun, B est le point de départ de Bella et P est ce premier point de rencontre.



Puisque Arun a couru 100 m et qu'ensemble ils ont parcouru la moitié de la longueur de la piste, Bella a couru $(L - 100)$ m.
Donc, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{100}{L - 100}$.
Du premier point de rencontre P au second point de rencontre, que l'on appellera Q, Bella court 150 m.



Pendant ce temps, Arun court de P à B puis à Q.
Puisque Bella court $150-100 = 50$ m au-delà de A, alors $QB = (L-50)$ m (car $AB = L$ m et $AQ = 50$ m) et donc Arun court $(L-100)$ m$+(L-50)$ m, ce qui est égal à $(2L-150)$ m.
Donc, pour ce second intervalle de temps, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2L - 150}{150}$.
On a donc les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{100}{L-100} &= \frac{2L-150}{150} \\
100 \cdot 150 &= (L-100)(2L-150) \\
15\,000 &= 2L^2 - 350L + 15\,000 \\
350L &= 2L^2
\end{aligned}$$

Puisque $L \neq 0$, alors $2L = 350$. Donc, la longueur totale de la piste est de 350 m.

En vérifiant, si la longueur de la piste est de 350 m, alors la moitié de cette longueur est égale à 175 m.
Cela signifie que du départ jusqu'à P, Arun court 100 m tandis que Bella court 75 m.
De plus, de P à Q, Bella court 150 m et Arun court 200 m.
Remarquons que $\dfrac{100}{75} = \dfrac{200}{150}$. Donc, ces nombres sont cohérents avec les renseignements donnés.

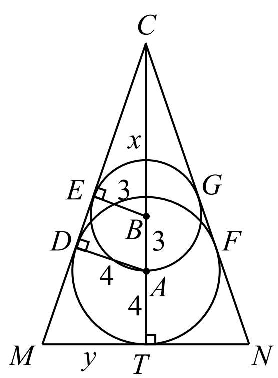
(b) À l'aide des lois des exposants, les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
4^{1+\cos^3\theta} &= 2^{2-\cos\theta}\cdot 8^{\cos^2\theta}\\
(2^2)^{1+\cos^3\theta} &= 2^{2-\cos\theta}\cdot (2^3)^{\cos^2\theta}\\
2^{2+2\cos^3\theta} &= 2^{2-\cos\theta}\cdot 2^{3\cos^2\theta}\\
2^{2+2\cos^3\theta} &= 2^{2-\cos\theta+3\cos^2\theta}\\
2+2\cos^3\theta &= 2-\cos\theta+3\cos^2\theta\\
2\cos^3\theta-3\cos^2\theta+\cos\theta &= 0\\
\cos\theta(2\cos^2\theta-3\cos\theta+1) &= 0\\
\cos\theta(2\cos\theta-1)(\cos\theta-1) &= 0
\end{aligned}$$

Donc, $\cos\theta = 0$ ou $\cos\theta = 1$ ou $\cos\theta = \frac{1}{2}$.
Puisque $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$, les solutions sont $\theta = 90^\circ, 270^\circ, 0^\circ, 360^\circ, 60^\circ, 300^\circ$.
En ordre croissant, les solutions à l'équation initiale sont :

$$\theta = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 360^\circ$$

8\. (a) On joint B à E et A à D.
Puisque MC est respectivement tangente aux cercles de centres A et B en D et E, alors AD et BE sont perpendiculaires à MC.
Puisque le cercle de centre B a un rayon de 3, alors $AB = 3$ et $BE = 3$.
Puisque le cercle de centre A a un rayon de 4, alors $AD = 4$ et $AT = 4$.
Soit $CB = x$ et $MT = y$.



On remarque que les triangles CEB, CDA et CTM sont tous semblables. En effet, ils sont rectangles respectivement en E, D et T et partagent un angle commun en C.
Puisque les triangles CEB et CDA sont semblables, alors $\dfrac{CB}{CA} = \dfrac{BE}{AD}$. Donc, $\dfrac{x}{x+3} = \dfrac{3}{4}$, d'où $4x = 3x + 9$ ou $x = 9$.
D'après le théorème de Pythagore, $CE = \sqrt{CB^2 - BE^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.
Puisque les triangles CEB et CTM sont semblables, alors $\dfrac{BE}{CE} = \dfrac{MT}{CT}$ et donc $\dfrac{3}{6\sqrt{2}} = \dfrac{y}{9+3+4}$, d'où $y = \dfrac{16\cdot 3}{6\sqrt{2}} = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

Enfin, l'aire du triangle MNC est égale à $\frac{1}{2} \cdot MN \cdot CT$.

Si l'on joignait B et G, on verrait que les triangles CEB et CGB sont congruents (chaque triangle est rectangle, tous deux ont la même hypoténuse et $BE = BG$). Cela signifie que $\angle BCE = \angle BCG$, ce qui signifie à son tour que $MT = TN$.

Puisque $MT = TN$, alors $MN = 2 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. Donc, l'aire du triangle MNC est égale à $\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 16$, soit $64\sqrt{2}$.

(b) Remarquons d'abord que :

$$\log_3 z = \frac{\log_{10} z}{\log_{10} 3} = \frac{2\log_{10} z}{2\log_{10} 3} = \frac{\log_{10}(z^2)}{\log_{10}(3^2)} = \frac{\log_{10}(z^2)}{\log_{10} 9} = \log_9(z^2)$$

De même, $\log_4 y = \log_{16}(y^2)$ et $\log_5 x = \log_{25}(x^2)$.

D'après le système d'équations initial, $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$.

On peut donc récrire le système d'équations initial sous la forme :

$$\begin{aligned} \log_9 x + \log_9 y + \log_9(z^2) &= 2 \\ \log_{16} x + \log_{16}(y^2) + \log_{16} z &= 1 \\ \log_{25}(x^2) + \log_{25} y + \log_{25} z &= 0 \end{aligned}$$

D'après les lois des logarithmes, on a :

$$\begin{aligned} \log_9(xyz^2) &= 2 \\ \log_{16}(xy^2z) &= 1 \\ \log_{25}(x^2yz) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent au système

$$\begin{aligned} xyz^2 &= 9^2 = 81 \\ xy^2z &= 16^1 = 16 \\ x^2yz &= 25^0 = 1 \end{aligned}$$

On multiplie ces trois équations ensemble pour obtenir $x^4y^4z^4 = 1296$, soit $(xyz)^4 = 6^4$.

Donc, $xyz = 6$.

Puisque $xyz^2 = 81$ et $xyz = 6$, alors $z = \frac{xyz^2}{xyz} = \frac{81}{6} = \frac{27}{2}$.

De même, $y = \frac{xy^2z}{xyz} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ et $x = \frac{x^2yz}{xyz} = \frac{1}{6}$.

Donc, $(x, y, z) = \left(\frac{1}{6}, \frac{8}{3}, \frac{27}{2}\right)$.

On peut vérifier par substitution que ce triplet vérifie bien le système d'équations initial.

9. (a) Supposons qu'une séquence de n pas comprend p pas dans la direction positive et m pas dans la direction négative.
Cela signifie que $n = p + m$ (nombre total de pas) et $d = p - m$ (position finale).
Puisque $n = 9$ et $d = 5$, alors $p + m = 9$ et $p - m = 5$, d'où $p = 7$ et $m = 2$.
Donc, on doit compter le nombre de séquences de 9 pas qui comprennent 7 pas dans la direction positive et 2 pas dans la direction négative.
Cela revient à créer une suite de 9 lettres, dont 7 sont des D et 2 sont des G.
Il y a $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ telles suites.
(On aurait aussi pu constater qu'il y a 36 suites en comptant : il y a 8 suites où le premier G parait dans la première position, 7 où le premier G parait dans la deuxième position et ainsi de suite.)

(b) *Solution 1*
Puisque $n = 9$ et $d = 3$, alors $p + m = 9$ et $p - m = 3$, d'où $p = 6$ et $m = 3$.
On peut donc considérer des suites de 9 lettres qui comprennent 6 D et 3 G.
Dans ce contexte, un changement de direction survient lorsque la suite passe d'un bloc d'une lettre à un bloc d'une autre lettre (c'est-à-dire à chaque fois que « DG » ou « GD » surviennent).
Pour que la suite change de direction un nombre pair de fois, il doit y avoir un nombre impair de blocs de lettres dans la suite.
Pour que le nombre de blocs soit impair, la suite doit commencer et finir par la même lettre.
Si la suite de 9 lettres commence et finit par un D, les 7 lettres entre les première et dernière lettres consistent en 4 D et 3 G ; il y a $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ telles suites.
Si la suite de 9 lettres commence et finit par un G, les 7 lettres entre les première et dernière lettres consistent en 6 D et 1 G ; il y a $\binom{7}{1} = 7$ telles suites.
Au total, il y a $35 + 7 = 42$ telles suites.

Solution 2
Comme dans la Solution 1, on veut compter le nombre de suites de 9 lettres qui comprennent 6 D et 3 G et qui ont un nombre impair de blocs.
Comme il y a 3 G, il peut y avoir au maximum 3 blocs de G et donc au maximum 7 blocs.

<u>1er cas : Il y a 3 blocs</u>
Supposons que l'ordre des blocs soit D-G-D.
Dans ce cas, il y a 3 G dans le bloc de G et 6 D répartis entre deux blocs de D.
On peut distribuer les D de 5 façons : $1 + 5$, $2 + 4$, $3 + 3$, $4 + 2$, $5 + 1$.
Cela signifie qu'il y a 5 telles suites.
Supposons que l'ordre des blocs soit G-D-G.
Le bloc de D comprend 6 D et il y a 3 G à répartir entre deux blocs.
On peut faire cela de 2 façons : $1 + 2$ ou $2 + 1$.
Cela signifie qu'il y a 2 telles suites.
Au total, il y a $5 + 2 = 7$ suites dans ce cas.

<u>2e cas : Il y a 7 blocs</u>
Comme il ne peut y avoir 4 blocs de G, l'ordre des blocs doit être D-G-D-G-D-G-D.
Chaque bloc de G comprend exactement 1 G et il y a 2 D supplémentaires à distribuer après avoir placé un D dans chaque bloc.

On peut placer ces deux D dans le même bloc de 4 façons et dans des blocs séparés de 6 façons (1^{er} et 2^{e}, 1^{er} et 3^{e}, 1^{er} et 4^{e}, 2^{e} et 3^{e}, 2^{e} et 4^{e}, 3^{e} et 4^{e}).
Donc, il y a 10 suites différentes dans ce cas.

3^{e} cas : Il y a 5 blocs
Supposons que l'ordre des blocs soit D-G-D-G-D.
Les deux blocs de G comprennent au total 3 G ; on peut distribuer ces G de 2 façons ($1+2$ ou $2+1$).
Les trois blocs de G comprennent au total 6 D.
En commençant avec un D dans chaque bloc, il y a 3 D supplémentaires à distribuer.
On peut placer les 3 D dans le même bloc de 3 façons : $3+0+0$, $0+3+0$, $0+0+3$.
On peut placer les 3 D dans deux blocs de 6 façons : $2+1+0$, $2+0+1$, $1+2+0$, $0+2+1$, $1+0+2$, $0+1+2$.
On peut placer les 3 D dans trois blocs différents d'une seule façon : $1+1+1$.
Donc, on peut distribuer les G de 2 façons et les D de $3+6+1=10$ façons. Il y a donc $2 \cdot 10 = 20$ telles suites.
Supposons que l'ordre des blocs soit G-D-G-D-G.
Chaque bloc de G comprend exactement 1 G et les deux blocs de D comprennent exactement 6 D.
On peut distribuer ces D ce 5 façons, comme on l'a vu dans le 1^{er} cas.
Cela signifie qu'il y a 5 telles suites.
Au total, il y a $20+5=25$ suites dans ce cas.

Donc, en tout, il y a $10+7+25=42$ telles suites.

(c) On considère les séquences de longueur n qui se terminent à $x=d$ avec $d \geq 0$.
Supposons qu'une telle séquence de pas comprend p pas dans la direction positive et m pas dans la direction négative.
Puisque $p+m=n$ (nombre total de pas) et $p-m=d$ (position finale), alors $2p=n+d$ (ce qui donne $p=\dfrac{n+d}{2}$) et $2m=n-d$ (ce qui donne $m=\dfrac{n-d}{2}$).
Cela signifie que toutes les séquences de longueur n qui se terminent à $x=d$ avec $d \geq 0$ sont caractérisées par les mêmes valeurs de p et m. On considère donc p et m comme fixes pour les analyses suivantes.
Avant de procéder au cas général, examinons quelques valeurs spécifiques.

Lorsque $n=1$, il y a exactement 1 séquence qui se termine avec $d \geq 0$. Cette séquence consiste en un pas vers la droite. Puisqu'il y a un nombre impair de séquences lorsque $n=1$, il ne peut y avoir une moitié des séquences présentant un nombre pair de changements de direction.

Lorsque $n=2$, on peut soit avoir $p=2$ et $m=0$ (ce qui donne $d=2$) soit $p=1$ et $m=1$ (ce qui donne $d=0$).
Lorsque $n=2$ et $d=2$, il n'y a qu'une seule séquence. Donc, il ne peut y avoir une moitié des séquences dans cette catégorie présentant un nombre pair de changements de direction.
Lorsque $n=2$ et $d=0$, il y a 2 séquences (DG ou GD), chacune ayant 1 changement de direction, donc il n'est pas vrai que la moitié des séquences dans cette catégorie présentent un nombre pair de changements de direction.

Donc, on suppose que $n \geq 3$. Comme $n=p+m$ et $p \geq m$, alors on a également $p \geq 2$.
On considère des suites de n lettres qui comprennent p D et m G.
Comme dans la Solution 1 de la partie (b), le nombre de changements de direction est

pair exactement lorsque le nombre de blocs de lettres est impair. Cela se produit lorsque la suite commence et se termine par la même lettre.

Pour qu'une telle suite commence et se termine par D, les $n-2$ lettres entre les première et dernière lettres consistent en $(p-2)$ D et m G. (Remarquons que $n-2 \geq 0$ et $p-2 \geq 0$ puisque $n \geq 2$ et $p \geq 0$.)

Pour qu'une telle suite commence et se termine par G, les $n-2$ lettres entre les première et dernière lettres consistent en p D et $(m-2)$ G. (Remarquons que $n-2 \geq 0$. Cependant, il est possible que $m-2 < 0$, auquel cas on adopte la convention qu'il y a 0 telles suites. Dans ce cas, on a $p = n-m = (n-2)-(m-2) > n-2$ et donc $\binom{n-2}{p} = 0$, ce qui rend les calculs suivants cohérents avec cette convention.)

Donc, il y a $\binom{n-2}{p-2} + \binom{n-2}{p}$ telles suites.

Ceci est vrai pour exactement la moitié de toutes les suites lorsque les équations équivalentes suivantes sont vérifiées :

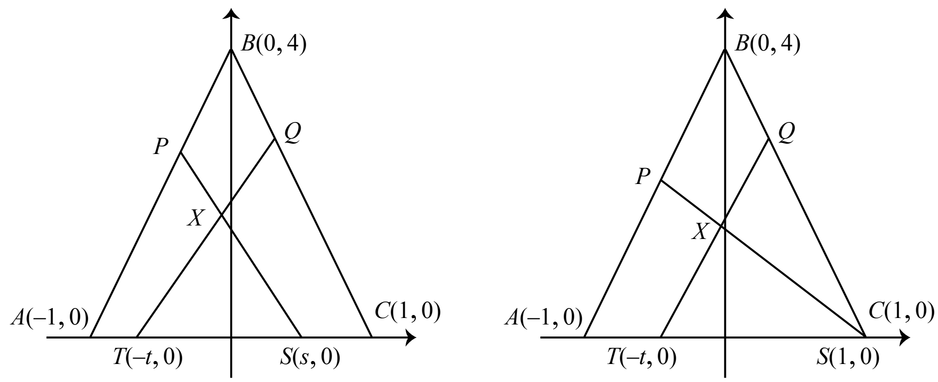
$$\begin{aligned}
\binom{n-2}{p-2} + \binom{n-2}{p} &= \frac{1}{2}\binom{n}{p} \\
\frac{(n-2)!}{(p-2)!m!} + \frac{(n-2)!}{p!(m-2)!} &= \frac{n!}{2 \cdot p!m!} \\
\frac{(n-2)!}{(p-2)!m!} + \frac{(n-2)!}{p!(m-2)!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot p!m!} \\
\frac{1}{(p-2)!m!} + \frac{1}{p!(m-2)!} &= \frac{n(n-1)}{2 \cdot p!m!} \\
\frac{p!}{(p-2)!} + \frac{m!}{(m-2)!} &= \frac{n(n-1)}{2} \\
2p(p-1) + 2m(m-1) &= n(n-1) \\
2p^2 + 2m^2 &= n^2 - n + 2p + 2m \\
(p^2 + 2mp + m^2) + (p^2 - 2mp + m^2) &= n^2 - (p+m) + 2p + 2m \\
(p+m)^2 + (p-m)^2 &= n^2 + (p+m) \\
n^2 + d^2 &= n^2 + n \\
d^2 &= n
\end{aligned}$$

Donc, exactement la moitié de ces suites ont un nombre pair de changements de direction lorsque $n = d^2$.

Pour résoudre le problème, on doit maintenant compter le nombre de carrés parfaits (c'est-à-dire les valeurs possibles de n) dans l'intervalle correct.

Puisque $2 \leq n \leq 2024$ et $d \geq 0$ et que n est un carré parfait, alors $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $44^2 = 1936$ et $45^2 = 2025$ indiquent qu'il existe 43 carrés parfaits entre 2 et 2024 et donc 43 tels couples (d, n) ; soit les couples (d, d^2) pour $d = 2, 3, ..., 43, 44$.

10. (a) Voici la configuration générale de ce problème ainsi que le cas spécifique dans (a) où $s = 1$:



Puisque SP et TQ divisent le triangle ABC en quatre régions de même aire, alors le triangle APS, qui est composé de deux de ces régions, a une aire égale à la moitié de celle du triangle ABC.
Comme S et C coïncident, alors P est le milieu de AB, ce qui signifie que P a pour coordonnées $(-\frac{1}{2}, 2)$.

On aurait également pu remarquer que puisque le triangle ABC a une aire de $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$, alors le triangle APS doit avoir une aire de 2.
Si P a pour ordonnée p, alors $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot p = 2$, d'où $p = 2$.
Puisque AB a une pente de 4 et une ordonnée à l'origine de 4, son équation est $y = 4x+4$.
Puisque P est situé sur AB et a pour ordonnée 2, son abscisse vérifie $2 = 4x + 4$. Donc, $4x = -2$ ou $x = -\frac{1}{2}$.
Donc, P a pour coordonnées $(-\frac{1}{2}, 2)$.

(b) Remarquons que le triangle ABC a une aire de $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$. Lorsque l'on divise le triangle en quatre régions de même aire, chaque région a une aire de 1.
Soit (s, t) un couple équilibré.
Cela est vrai uniquement lorsque :

- le triangle SXT a une aire de 1,
- le triangle APS a une aire de 2 et
- le triangle CQT a une aire de 2.

(Les puces 1 et 2 indiquent que le quadrilatère $APXT$ a une aire de 1.
Les puces 1 et 3 indiquent que le quadrilatère $CQXS$ a une aire de 1.
Puisque trois des régions ont une aire de 1, alors la quatrième région doit également avoir une aire de 1.)

Le triangle SXT a pour base $TS = s + t$. Soit h sa hauteur.
Donc, $\dfrac{1}{2}(s+t)h = 1$, d'où $h = \dfrac{2}{s+t}$.
Le triangle APS a pour base $AS = 1 + s$. Soit p sa hauteur.
Donc, $\dfrac{1}{2}(s+1)p = 2$, d'où $p = \dfrac{4}{s+1}$.
Le triangle CQT a pour base $TC = 1 + t$. Soit q sa hauteur.
Donc, $\dfrac{1}{2}(t+1)q = 2$, d'où $q = \dfrac{4}{t+1}$.
La droite passant par A et B a une pente de 4 et une ordonnée à l'origine de 4 et a donc pour équation $y = 4x + 4$.
La droite passant par C et B a une pente de -4 et une ordonnée à l'origine de 4 et a donc pour équation $y = -4x + 4$.

Puisque P est situé sur la droite d'équation $y = 4x + 4$ et que P a pour ordonnée $\dfrac{4}{s+1}$, alors l'abscisse de P vérifie $\dfrac{4}{s+1} = 4x + 4$, ce qui donne $\dfrac{1}{s+1} = x + 1$, d'où on a $x = \dfrac{1}{s+1} - 1 = \dfrac{1-s-1}{s+1} = -\dfrac{s}{s+1}$.
Donc, P a pour coordonnées $\left(-\dfrac{s}{s+1}, \dfrac{4}{s+1}\right)$.
Puisque Q est situé sur la droite d'équation $y = -4x + 4$ et que son ordonnée est $\dfrac{4}{t+1}$, alors l'abscisse de Q vérifie $\dfrac{4}{t+1} = -4x + 4$, ce qui donne $\dfrac{1}{t+1} = -x + 1$, d'où on a $x = 1 - \dfrac{1}{t+1} = \dfrac{t+1-1}{t+1} = \dfrac{t}{t+1}$.
Donc, Q a pour coordonnées $\left(\dfrac{t}{t+1}, \dfrac{4}{t+1}\right)$.
Ensuite, on détermine les coordonnées de X en trouvant les équations des droites passant par P et S et par Q et T.
La pente de la droite passant par S et P est :

$$\frac{\dfrac{4}{s+1} - 0}{-\dfrac{s}{s+1} - s} = \frac{4}{-s - s(s+1)} = -\frac{4}{s^2 + 2s}$$

Puisque cette droite passe par $S(s, 0)$, elle a pour équation $y = -\dfrac{4}{s^2+2s}(x - s)$.
La pente de la droite passant par T et Q est :

$$\frac{\dfrac{4}{t+1} - 0}{\dfrac{t}{t+1} - (-t)} = \frac{4}{t + t(t+1)} = \frac{4}{t^2 + 2t}$$

Puisque cette droite passe par $S(-t, 0)$, elle a pour équation $y = \dfrac{4}{t^2+2t}(x + t)$.
Pour trouver l'abscisse de X, on détermine le point d'intersection de la droite passant par S et P et de la droite passant par T et Q ; on a donc :

$$\begin{aligned}
-\frac{4}{s^2+2s}(x-s) &= \frac{4}{t^2+2t}(x+t) \\
\frac{4s}{s^2+2s} - \frac{4t}{t^2+2t} &= \left(\frac{4}{s^2+2s} + \frac{4}{t^2+2t}\right)x \\
4s(t^2+2t) - 4t(s^2+2s) &= (4(t^2+2t) + 4(s^2+2s))x \\
x &= \frac{st^2 - s^2t}{t^2+2t+s^2+2s}
\end{aligned}$$

Donc, on obtient l'ordonnée de X à partir de :

$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{t^2+2t}\left(\frac{st^2-s^2t}{t^2+2t+s^2+2s}+t\right) \\ &= \frac{4}{t^2+2t}\cdot\frac{st^2-s^2t+t^3+2t^2+ts^2+2st}{t^2+2t+s^2+2s} \\ &= \frac{4}{t^2+2t}\cdot\frac{t(t^2+2t)+s(t^2+2t)}{t^2+2t+s^2+2s} \\ &= \frac{4(s+t)}{t^2+2t+s^2+2s} \end{aligned}$$

Enfin, l'ordonnée de X est égale à la hauteur h mentionnée précédemment. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{2}{s+t} &= \frac{4(s+t)}{t^2+2t+s^2+2s} \\ \frac{1}{s+t} &= \frac{2(s+t)}{t^2+2t+s^2+2s} \\ t^2+2t+s^2+2s &= 2(s+t)^2 \\ t^2+2t+s^2+2s &= 2s^2+4st+2t^2 \\ -4st+2s+2t &= s^2+t^2 \end{aligned}$$

Donc, l'équation donnée est vérifiée lorsque $d=-4$, $e=f=2$ et $g=0$.

(c) On cherche des couples de la forme $(s,t)=(s,ks)$, s et k étant des nombres rationnels. À partir la relation de la partie (b),

$$\begin{aligned} s^2+k^2s^2 &= -4ks^2+2s+2ks \\ s^2(k^2+4k+1) &= (2k+2)s \\ s(k^2+4k+1) &= 2k+2 \qquad \text{(puisque } s>0) \\ s &= \frac{2k+2}{k^2+4k+1} \end{aligned}$$

Donc, $t=ks=\dfrac{2k^2+2k}{k^2+4k+1}$.
Puisque $k>0$, alors $s>0$.
On doit avoir $s\le t$. Cela est équivalent à

$$\begin{aligned} \frac{2k+2}{k^2+4k+1} &\le \frac{2k^2+2k}{k^2+4k+1} \\ 2k+2 &\le 2k^2+2k \qquad \text{(puisque } k^2+4k+1>0) \\ 2 &\le 2k^2 \\ 1 &\le k \qquad \text{(puisque } k>0) \end{aligned}$$

Donc, lorsque $k\ge 1$, on a $0<s\le t$.
Enfin, on doit avoir $t\le 1$. Cela est équivalent à

$$\begin{aligned} \frac{2k^2+2k}{k^2+4k+1} &\le 1 \\ 2k^2+2k &\le k^2+4k+1 \qquad \text{(puisque } k^2+4k+1>0) \\ k^2-2k-1 &\le 0 \end{aligned}$$

Les racines de $k^2 - 2k - 1 = 0$ sont $k = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.
Donc, $k^2 - 2k - 1 \leq 0$ lorsque $1 - \sqrt{2} \leq k \leq 1 + \sqrt{2}$.
Puisque $k > 0$, alors $t \leq 1$ lorsque $0 < k \leq 1 + \sqrt{2}$.
Donc, lorsque $1 \leq k \leq 1 + \sqrt{2}$, on a $0 < s \leq t \leq 1$.
Remarquons qu'il existe un nombre infini de nombres rationnels dans tout intervalle de longueur non nulle ; en particulier, il y a un nombre infini de nombres rationnels k qui vérifient $1 \leq k \leq 1 + \sqrt{2}$.
On doit confirmer que les valeurs de $\dfrac{2k+2}{k^2+4k+1}$ sont différentes pour différentes valeurs de k, ce qui confirmera qu'il existe un nombre infini de différentes valeurs de s à mesure que k prend un nombre infini de valeurs.
Pour ce faire, on démontrera que si $\dfrac{2k+2}{k^2+4k+1} = \dfrac{2j+2}{j^2+4j+1}$, alors $k = j$; ce fait nous permet de conclure que si $k \neq j$, alors $\dfrac{2k+2}{k^2+4k+1} \neq \dfrac{2j+2}{j^2+4j+1}$.
Lorsque $k > 0$ et $j > 0$, les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
\frac{2k+2}{k^2+4k+1} &= \frac{2j+2}{j^2+4j+1} \\
(2k+2)(j^2+4j+1) &= (2j+2)(k^2+4k+1) \\
(k+1)(j^2+4j+1) &= (j+1)(k^2+4k+1) \\
j^2k + 4jk + k + j^2 + 4j + 1 &= jk^2 + 4jk + j + k^2 + 4k + 1 \\
j^2k - jk^2 + 3j - 3k + j^2 - k^2 &= 0 \\
(j-k)(jk+j+k+3) &= 0
\end{aligned}$$

Puisque $jk + j + k + 3 > 0$, il doit s'ensuivre que $j - k = 0$, d'où $j = k$.
Cela signifie que si $k \neq j$, alors $\dfrac{2k+2}{k^2+4k+1} \neq \dfrac{2j+2}{j^2+4j+1}$. Donc, il y a un nombre infini de différentes valeurs de s.
Donc, les couples $(s,t) = \left(\dfrac{2k+2}{k^2+4k+1}, \dfrac{2k^2+2k}{k^2+4k+1}\right)$, k étant un nombre rationnel tel que $1 \leq k \leq 1 + \sqrt{2}$, constituent une famille infinie de solutions à l'équation de la partie (b).