Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2024

(10e année – Secondaire IV)

le mercredi 28 février 2024

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 29 février 2024

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a $2 \times 0 + 2 \times 4 = 0 + 8 = 8$.

Réponse : (E)

2. Lorsque $x = 3$, on a $-(5x - 6x) = -(-x) = x = 3$.
Par ailleurs, lorsque $x = 3$, on a $-(5x - 6x) = -(15 - 18) = -(-3) = 3$.

Réponse : (B)

3. Puisque $AE = BF$ et $BE = CF$, alors $AB = AE + BE = BF + CF = BC$.
Donc, le triangle ABC est isocèle avec $\angle BAC = \angle BCA = 70^\circ$.
Puisque les angles du triangle ABC ont une somme de 180°, alors

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$$

Réponse : (A)

4. Vendredi, les Comètes de Cayley ont marqué 80 % de 90 points.
Cela équivaut à $\frac{80}{100} \times 90 = \frac{8}{10} \times 90 = 8 \times 9 = 72$ points.
Par ailleurs, puisque 80 % équivaut à 0,8, alors 80 % de 90 est égal à $0{,}8 \times 90 = 72$.

Réponse : (B)

5. Le volume d'un prisme est égal à l'aire de sa base multipliée par sa profondeur.
Le prisme a deux bases identiques d'une aire de 400 cm^2 et une profondeur de 8 cm. Le prisme a donc un volume de $400 \text{ cm}^2 \times 8 \text{ cm} = 3200 \text{ cm}^3$.

Réponse : (C)

6. Les biscuits aux pépites de chocolat ou aux flocons d'avoines représentent 33 % + 22 %, soit 55 %, du nombre total de biscuits que Louis a mangés.
Cela signifie que les biscuits au pain d'épice ou au sucre représentent 100 % − 55 % = 45 % du nombre total de biscuits qu'il a mangés.
Puisque Louis a mangé deux fois plus de biscuits au pain d'épices que de biscuits au sucre, alors $\frac{2}{3}$ de 45 %, soit 30 %, étaient des biscuits au pain d'épices.

Réponse : (C)

7. On simplifie pour obtenir $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. Donc, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$ et donc $x = 2$.

Réponse : (D)

8. Puisque $4 = 2^2$, alors $4^7 = (2^2)^7 = 2^{14} = (2^7)^2$, ce qui signifie que 4^7 est un carré parfait.
On peut vérifier, à l'aide d'une calculatrice si nécessaire, que les racines carrées des autres choix de réponse ne sont pas des entiers. Donc, aucun de ces choix ne peut être exprimé comme le carré d'un entier.

Réponse : (C)

9. Soit x le plus petit des cinq entiers impairs.
Puisqu'il y a une différence de 2 entre toute paire d'entiers impairs consécutifs, les quatre autres entiers impairs sont $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$ et $x + 8$.
Donc, $x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) + (x + 8) = 125$.
On a donc $5x + 20 = 125$ ou $5x = 105$, d'où $x = 21$.
Donc, le plus petit des cinq entiers est 21. (Cela signifie que les cinq entiers impairs sont 21, 23, 25, 27, 29.)

Réponse : (C)

10. Lorsqu'on jette deux dés réguliers, on peut obtenir $6 \times 6 = 36$ paires de nombres.
Parmi celles-ci, les paires 2×6, 3×4, 4×3 et 6×2 ont chacune un produit de 12. (Si l'un des nombres obtenus est 1 ou 5, le produit ne peut pas être 12.)
Puisqu'il y a 4 paires de nombres dont le produit est 12, la probabilité pour que le produit soit 12 est égale à $\frac{4}{36}$.

Réponse : (B)

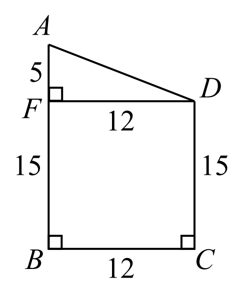
11. Puisque Arturo a un nombre égal de billets de 5 \$, de 10 \$ et de 20 \$, alors on peut séparer ses billets en groupes de manière que chaque groupe contienne un billet de 5 \$, un billet de 10 \$ et un billet de 20 \$.
Les billets de chaque groupe ont une valeur de $5\,\$ + 10\,\$ + 20\,\$ = 35\,\$$.
Puisque la valeur totale des billets d'Arturo est de 700 \$, il y a donc $\dfrac{\$700}{\$35} = 20$ groupes.
Donc, Arturo a 20 billets de 5 \$.

Réponse : (D)

12. Puisque la masse de 2 Ixes est égale à la masse de 29 Ygrecs, alors la masse de 8×2 Ixes est égale à la masse de 8×29 Ygrecs.
Autrement dit, la masse de 16 Ixes est égale à la masse de 232 Ygrecs.
Puisque la masse de 1 Zed est égale à la masse de 16 Ixes, alors la masse de 1 Zed est égale à la masse de 232 Ygrecs.

Réponse : (C)

13. Au point D, on abaisse une perpendiculaire DF à AB.
Puisque le quadrilatère $FDCB$ est rectangle en F, en C et en B, alors le quadrilatère $FDCB$ est un rectangle.
Cela signifie que $FB = DC = 15$ et que $FD = BC = 12$.
De plus, $AF = AB - FB = 20 - 15 = 5$.



Le triangle AFD est rectangle en F.
D'après le théorème de Pythagore, $AD^2 = AF^2 + FD^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$.
Puisque $AD > 0$, alors $AD = 13$. (Certains reconnaîtront directement le triplet pythagoricien 5-12-13.)
Donc, le périmètre de $ABCD$ est égal à $20 + 12 + 15 + 13 = 60$.

Réponse : (E)

14. Puisque les 10 nombres ont une moyenne de 87, alors leur somme est égale à $10 \times 87 = 870$.
Si l'on soustrait les nombres 51 et 99 de cette somme, on obtient la somme des 8 nombres restants, soit $870 - 51 - 99$ or 720.
Ces huit nombres ont une moyenne de $\dfrac{720}{8} = 90$.

Réponse : (A)

15. La somme des longueurs des segments de droites horizontaux de la Figure 2 est égale à $4x$. Cela s'explique par le fait que les côtés supérieurs des quatre petits rectangles contribuent ensemble $2x$ à la somme de leurs périmètres et que les côtés inférieurs contribuent également $2x$ à la somme de leurs périmètres.
De même, la somme des longueurs des segments de droites verticaux de la Figure 2 est égale à $4y$.
Autrement dit, les périmètres des quatre rectangles de la Figure 2 ont une somme de $4x + 4y$.
On a donc $4x + 4y = 24$, d'où $x + y = 6$.

Réponse : (A)

16. Étant donné que
$$\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}} = \frac{1}{8}$$
alors en élevant chaque membre au carré, on obtient
$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{64}$$
En simplifiant le membre de gauche, on obtient
$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1)}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times n} = \frac{1}{64}$$
soit
$$\frac{1 \times (2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1))}{(2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1)) \times n} = \frac{1}{64}$$
On a donc $\frac{1}{n} = \frac{1}{64}$, d'où $n = 64$.

Réponse : (B)

17. Les entiers de 1000 à 9999 sont tous des entiers strictement positifs à quatre chiffres de la forme $abcd$.
On veut que chacun des chiffres a, b, c et d soit pair.
Il y a 4 choix pour le chiffre a, soit 2, 4, 6 et 8. (a ne peut égaler 0.)
Il y a 5 choix pour chacun des chiffres b, c et d, soit 0, 2, 4, 6 et 8.
Puisque le choix de chaque chiffre se fait de manière indépendante par rapport aux choix des autres chiffres, alors il y a $4 \times 5 \times 5 \times 5$ ou 500 tels entiers.

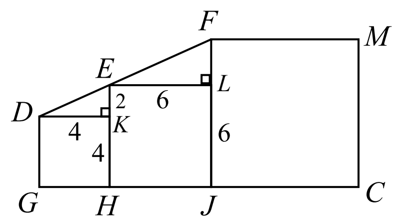
Réponse : (A)

18. La droite d'équation $y = 3x + 5$ a une pente de 3 et une ordonnée à l'origine de 5.
Puisque la droite a une ordonnée à l'origine de 5, elle passe par le point $(0, 5)$.
Lorsque la droite subit une translation de 2 unités vers la droite, sa pente ne change pas et la nouvelle droite passe par le point $(2, 5)$.
Une droite de pente m passant par le point (x_1,y_1) a pour équation $y - y_1 = m(x - x_1)$. Donc, la droite ayant une pente de 3 et passant par $(2, 5)$ a pour équation $y-5 = 3(x-2)$ ou $y-5 = 3x-6$, soit $y = 3x - 1$.

On aurait également pu remarquer que lorsque la droite d'équation $y = 3x+5$ subit une translation de 2 unités vers la droite, alors son image a pour équation $y = 3(x - 2) + 5$, soit $y = 3x - 1$.

Réponse : (B)

19. Puisque les bases des carrés $DKHG$, $ELJH$ et $FMCJ$ sont situés sur une même droite, alors DK, EL et FM sont parallèles.
Puisque DK et EL sont parallèles, alors $\angle EDK = \angle FEL$.
Puisque le triangle EKD est rectangle en K et que le triangle FLE est rectangle en L, alors les triangles EKD et FLE sont semblables.



Le carré $DKHG$ a une aire de 16. Il a donc des côtés de longueur $\sqrt{16} = 4$.
Le carré $ELJH$ a une aire de 36. Il a donc des côtés de longueur $\sqrt{36} = 6$.
Puisque $EH = 6$ et $KH = 4$, alors $EK = 2$.
Donc, le triangle EKD est tel que $EK = 2$ et $DK = 4$. Autrement dit, $EK : DK = 1 : 2$.
Puisque le triangle FLE est semblable au triangle EKD, alors $FL : LE = 1 : 2$.
Puisque $EL = 6$, alors $FL = 3$. Puisque $LJ = 6$ et $FL = 3$, alors $FJ = FL + LJ = 9$.
Donc, le carré $FMCJ$ a une aire de 9^2, soit 81.

Réponse : (D)

20. Soit d la longueur de la course en mètres.
Supposons également que Jiwei a terminé la première course en t s.
Puisque Hari a terminé la course en $\frac{4}{5}$ du temps qu'il a fallu à Jiwei pour la terminer, alors Hari a terminé la course en $\frac{4}{5}t$ s.
Puisque la vitesse équivaut à la distance divisée par le temps, alors la vitesse moyenne de Jiwei était de $\frac{d}{t}$ m/s et la vitesse moyenne de Hari était de $\frac{d}{4t/5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{d}{t}$ m/s.
Pour que Jiwei termine en même temps que Hari, sa vitesse moyenne doit passer de $\frac{d}{t}$ m/s à $\frac{5}{4} \cdot \frac{d}{t}$ m/s. Cela représente une augmentation d'un quart par rapport à la vitesse initiale, soit une augmentation de 25 %. Donc, $x = 25$.

Réponse : (B)

21. Puisque la deuxième colonne contient le nombre 1, alors l'étape (ii) n'a jamais été appliquée sur la deuxième colonne, sinon chaque nombre dans cette colonne serait d'au moins 2.
Pour obtenir les 1, 3 et 2 dans la deuxième colonne, on doit donc avoir appliqué l'étape (i) 1 fois sur la rangée 1, 3 fois sur la rangée 2 et 2 fois sur la rangée 3.
On a donc :

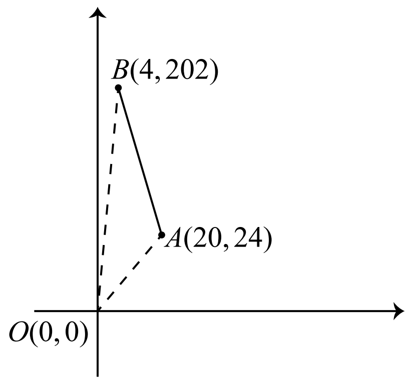
1	1	1
3	3	3
2	2	2

Il n'est pas possible d'appliquer l'étape (i) davantage, au risque de voir augmenter les nombres dans la colonne 2. Donc, $a = 1 + 3 + 2 = 6$.

Pour obtenir le tableau final à partir du tableau actuel en appliquant uniquement l'étape (ii), il faut augmenter de 6 chaque nombre dans la colonne 1 (ce qui signifie appliquer l'étape (ii) 3 fois) et augmenter de 4 chaque nombre dans la colonne 3 (ce qui signifie appliquer l'étape (ii) 2 fois). Donc, $b = 3 + 2 = 5$.
Donc, $a + b = 11$.

Réponse : 11

22. Soit O l'origine, A le point ayant pour coordonnées $(20, 24)$ et B le point ayant pour coordonnées $(4, 202)$.
La pente de OA est $\frac{24}{20} = 1{,}2$. La pente de OB est $\frac{202}{4} = 50{,}5$.



La droite d'équation $y = mx$ passe au point (0,0).
Si $m < 0$, alors la droite d'équation $y = mx$ ne passe pas par le premier quadrant.
Si $0 \leq m < 1{,}2$, la droite d'équation $y = mx$ a une pente inférieure à celle de OA et donc ne coupe pas le segment de droite AB.
Si $m > 50{,}5$, la droite d'équation $y = mx$ a une pente supérieure à celle de OB et donc ne coupe pas le segment de droite AB.
Donc, la droite d'équation $y = mx$ coupe le segment de droite AB pour les entiers m qui vérifient $2 \leq m \leq 50$.
Il y a 49 tels entiers m.

Réponse : 49

23. Pour calculer l'aire totale des région ombrées, on additionne l'aire du rectangle et les aires des quatre demi-cercles et on soustrait l'aire du grand cercle.
Le rectangle de dimensions 6×8 a une aire de 48.
Les deux demi-cercles de diamètre 6 forment un cercle de diamètre 6, soit de rayon 3. Donc, les aires de ces deux demi-cercles ont une somme de $\pi \times 3^2$, soit 9π.
Les deux demi-cercles de diamètre 8 forment un cercle de diamètre 8, soit de rayon 4. Donc, les aires de ces deux demi-cercles ont une somme de $\pi \times 4^2$, soit 16π.
Puisque le grand cercle passe par les quatre sommets du rectangle, alors la diagonale du rectangle est également le diamètre du cercle. (Cela est dû au fait que la diagonale sous-tend un angle de $90°$ à chacun des autres sommets et est donc un diamètre.)
La longueur de la diagonale est égale à $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$. Donc, le grand cercle a un rayon de 5 et une aire de $\pi \times 5^2 = 25\pi$.
Donc, cela signifie que l'aire totale des régions ombrées est égale à $48 + 9\pi + 16\pi - 25\pi$, soit 48.
L'entier le plus près de 48 est donc 48.

Réponse : 48

24. Si Rasheeqa marche directement de A à B à C, cela lui prendrait $2 + 3 = 5$ minutes.
Remarquons que Rasheeqa ne peut pas marcher de A à C en moins de 5 minutes, donc t ne peut pas être égal à 1, 2, 3 ou 4.
Rasheeqa peut prolonger la durée de sa promenade par des multiples de 3 minutes en se promenant sur le chemin circulaire qui commence et qui se termine à B.
Cela signifie que le temps total de Rasheeqa, en minutes, peut être $5, 8, 11, 14, \ldots, 98, 101$.
Rasheeqa peut également marcher de A à B à A à B à C.
Cela lui prendrait $2 + 3 + 2 + 3 = 10$ minutes.
Cela représente donc le minimum de temps que durerait une promenade dans laquelle le chemin de B à A est emprunté.
Rasheeqa peut, à nouveau, prolonger la durée de cette promenade de 10 minutes par des multiples de 3 minutes en se promenant sur le chemin circulaire qui commence et qui se termine à B.
Cela signifie que le temps total de Rasheeqa, en minutes, peut être $10, 13, 16, 19, \ldots, 97, 100, 103$.
Rasheeqa peut également marcher de A à B à A à B à A à B à C.
Cela lui prendrait $2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 = 15$ minutes.
Cela représente donc le minimum de temps que durerait une promenade dans laquelle le chemin de B à A est emprunté deux fois.
Rasheeqa peut, à nouveau, prolonger la durée de cette promenade de 15 minutes par des multiples de 3 minutes en se promenant sur le chemin circulaire qui commence et qui se termine à B.
Cela signifie que le temps total de Rasheeqa, en minutes, peut être $15, 18, 21, 24, \ldots, 96, 99, 102$.
En examinant ces listes, on voit que t peut égaler 5, 8, 10, 11, 13, 14, 15 et chaque entier t avec $16 \leq t \leq 100$.
Parmi les entiers strictement positifs t avec $1 \leq t \leq 100$, on voit que t ne peut pas égaler 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12.
Puisque t ne peut pas être égal à 8 valeurs, alors il y a $100 - 8 = 92$ valeurs possibles de t.

Réponse : 92

25. Les motifs qu'Ellie peut construire peuvent comprendre 3, 4, 5 ou 6 X.
Un motif ne peut pas comprendre moins de 3 X (car il faut avoir 3 X pour compléter un motif) et ne peut pas comprendre 7 X (car le 7ème X serait placé soit à côté de 6 X, soit entre 5 X et 1 X, soit entre 4 X et 2 X, soit entre 3 X et 3 X. Or, chacun de ces cas constitue déjà un motif complet).
Examinons les cas suivants, qui sont définis par le nombre de X dans chaque motif.

<u>1er cas : 3 X</u>
En utilisant des O pour représenter les carrés vides, il y a 5 façons de placer 3 X consécutifs :

XXXOOOO, OXXXOOO, OOXXXOO, OOOXXXO, OOOOXXX

<u>2e cas : 4 X</u>
Il y a 4 façons de placer 4 X consécutifs :

XXXXOOO, OXXXXOO, OOXXXXO, OOOXXXX

(Il est possible d'avoir 4 X consécutifs sans s'être arrêté après le 3ème X si les X sont placés, par exemple, dans l'ordre 1er X, 2e X, 4e X, 3e X.)

On peut également avoir 4 X en utilisant un groupe de 3 X (il faut qu'il y ait au moins 3 X consécutifs) et un X individuel (que l'on place soit avant ou après le groupe de 3 X). Il y a 12 façons de réaliser cela :

XXXOXOO, XXXOOXO, XXXOOOX, OXXXOXO, OXXXOOX, OOXXXOX, XOXXXOO, XOOXXXO, XOOOXXX, OXOXXXO, OXOOXXX, OOXOXXX

<u>3e cas : 5 X</u>
Il y a 3 façons de placer 5 X consécutifs :

XXXXXOO, OXXXXXO, OOXXXXX

(On peut placer 5 X consécutifs dans l'ordre 1er X, 2e X, 4e X, 5e X, 3e X.)
On peut également avoir 5 X en utilisant un groupe de 3 X et un groupe de 2 X, ou en utilisant un groupe de 4 X et un X individuel, ou en utilisant un groupe de 3 X et deux X individuels. Il y a 15 façons de réaliser cela :

XXXOXXO, XXXOOXX, OXXXOXX, XXOXXXO, XXOOXXX, OXXOXXX, XXXXOXO, XXXXOOX, OXXXXOX, XOXXXXO, XOOXXXX, OXOXXXX, XXXOXOX, XOXXXOX, XOXOXXX

<u>4e cas : 6 X</u>
On ne peut pas placer 6 X consécutifs, car il y aurait 3 X consécutifs avant que le 6ème X ne soit placé.
On peut cependant avoir 6 X s'ils sont en groupes de 5 et 1 ou en groupes de 4 et 2. (On ne peut avoir des groupes de 3 et 3. Voyez-vous pourquoi ?)
Il y a 4 façons de réaliser cela :

XXXXXOX, XXXXOXX, XOXXXXX, XXOXXXX

Ellie peut donc construire $5 + 4 + 12 + 3 + 15 + 4 = 43$ motifs en tout.

Réponse : 43