



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley

(10^e année – Sec. IV)

le mercredi 28 février 2024

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 29 février 2024

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée: 60 minutes

©2024 University of Waterloo

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Les parties A et B du concours sont composées de questions à choix multiple. Chacune de ces questions est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. La réponse juste à chaque question de la partie C est un entier de 0 à 99 inclusivement. Après avoir décidé de votre réponse, remplissez les deux cercles appropriés sur la feuille-réponse. Une réponse à un chiffre (p. ex. $\langle 7 \rangle$) doit être codée avec un zéro non significatif ($\langle 07 \rangle$).
8. Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C. Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée. Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
9. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
10. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
11. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.

On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de l'expression $2 \times 0 + 2 \times 4$?

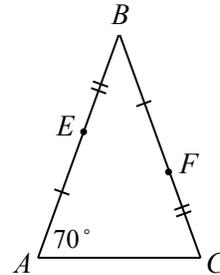
- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

2. Si $x = 3$, quelle est la valeur de l'expression $-(5x - 6x)$?

- (A) -33 (B) 3 (C) -1 (D) 33 (E) 11

3. Dans le triangle ABC , les points E et F sont respectivement situés sur AB et BC de manière que $AE = BF$ et $BE = CF$. Si $\angle BAC = 70^\circ$, quelle est la mesure de l'angle ABC ?

- (A) 40° (B) 50° (C) 60°
(D) 70° (E) 30°

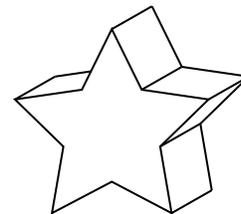


4. Lors du match de basketball de mercredi, les Comètes de Cayley ont marqué 90 points. Lors du match de vendredi, ils ont marqué 80 % des points qu'ils avaient marqués mercredi. Combien de points ont-ils marqués vendredi ?

- (A) 60 (B) 72 (C) 75 (D) 78 (E) 82

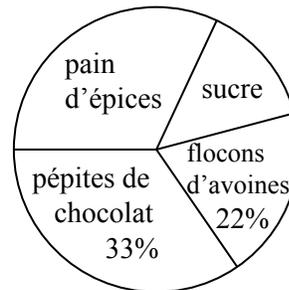
5. Dans la figure ci-contre, les deux bases identiques du prisme ont la forme d'une étoile. L'aire de chaque base en forme d'étoile est de 400 cm^2 . La largeur du prisme, c'est-à-dire la distance entre ses bases en forme d'étoile, est de 8 cm. Quel est le volume du prisme ?

- (A) 720 cm^3 (B) 1520 cm^3 (C) 3200 cm^3
(D) 3600 cm^3 (E) $28\,800 \text{ cm}^3$



6. L'an dernier, Louis a mangé différents types de biscuits selon les pourcentages indiqués dans le diagramme circulaire ci-contre. Il a mangé deux fois plus de biscuits au pain d'épices que de biscuits au sucre. Quel pourcentage des biscuits que Louis a mangé étaient des biscuits au pain d'épices ?

- (A) 25 % (B) 28 % (C) 30 %
(D) 35 % (E) 38 %



7. Si $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x}$, quelle est la valeur de x ?

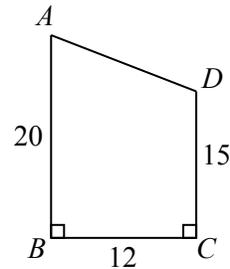
- (A) 9 (B) 6 (C) 18 (D) 2 (E) 3

8. Lequel des entiers suivants est égal à un carré parfait ?
 (A) 2^3 (B) 3^5 (C) 4^7 (D) 5^9 (E) 6^{11}
9. La somme de cinq entiers *impairs* consécutifs est 125. Le plus petit de ces nombres est :
 (A) 17 (B) 19 (C) 21 (D) 25 (E) 29
10. On jette deux dés réguliers. Quelle est la probabilité pour que la produit des nombres sur les faces supérieures soit égale à 12 ?
 (A) $\frac{3}{36}$ (B) $\frac{4}{36}$ (C) $\frac{6}{36}$ (D) $\frac{8}{36}$ (E) $\frac{9}{36}$

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Arturo a un nombre égal de billets de 5 \$, de 10 \$ et de 20 \$. La valeur totale de ces billets est de 700 \$. Combien de billets de 5 \$ Arturo a-t-il ?
 (A) 16 (B) 24 (C) 12 (D) 20 (E) 28
12. La boutique Cayley vend trois types de jouets : des Ixes, des Ygrecs et des Zeds. Tous les Ixes sont identiques, tous les Ygrecs sont identiques et tous les Zeds sont identiques. La masse de 2 Ixes est égale à celle de 29 Ygrecs. La masse de 1 Zed est égale à celle de 16 Ixes. À combien de Ygrecs correspond la masse de 1 Zed ?
 (A) 3,625 (B) 1,103 (C) 232 (D) 464 (E) 928

13. Dans la figure ci-contre, la quadrilatère $ABCD$ est tel que $AB = 20$, $BC = 12$ et $CD = 15$. De plus, AB et CD sont perpendiculaires à BC . Quel est le périmètre du quadrilatère $ABCD$?
 (A) 47 (B) 59 (C) 84
 (D) 72 (E) 60



14. Dix nombres ont une moyenne de 87. Deux de ces nombres sont 51 et 99. Quelle est la moyenne des huit autres nombres ?
 (A) 90 (B) 89 (C) 88 (D) 91 (E) 92
15. Dans la Figure 1, on voit un rectangle de largeur x et de longueur y . Ce rectangle est découpé le long des lignes pointillées horizontales et verticales de la Figure 1 pour produire quatre rectangles plus petits, comme dans la Figure 2.

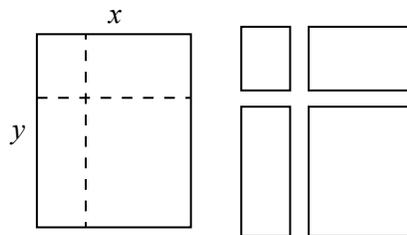


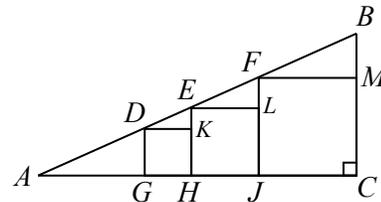
Figure 1

Figure 2

- Les périmètres des quatre rectangles de la Figure 2 ont une somme de 24. Quelle est la valeur de $x + y$?
 (A) 6 (B) 8 (C) 9,6 (D) 12 (E) 16

16. Supposons que $\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}} = \frac{1}{8}$. (L'expression sous la racine carrée est le produit de $n - 1$ fractions.) Quelle est la valeur de n ?
 (A) 81 (B) 64 (C) 16 (D) 256 (E) 100
17. Chacun des quatre chiffres de l'entier 2024 est pair. Combien y'a-t-il d'entiers de 1000 à 9999 dont tous les chiffres sont pairs ?
 (A) 500 (B) 625 (C) 96 (D) 54 (E) 256
18. La droite d'équation $y = 3x + 5$ subit une translation de 2 unités vers la droite. Quelle est l'équation de la droite résultante ?
 (A) $y = 3x + 3$ (B) $y = 3x - 1$ (C) $y = 3x + 11$
 (D) $y = 3x + 7$ (E) $y = 5x + 5$

19. Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en C . Les points D, E et F sont situés sur AB , les points G, H et J sont situés sur AC , le point K est situé sur EH , le point L est situé sur FJ et le point M est situé sur BC de manière que $DKHG, ELJH$ et $FM CJ$ soient tous des carrés. Le carré $DKHG$ a une aire de 16 tandis que le carré $ELJH$ a une aire de 36. Quelle est l'aire du carré $FM CJ$?



- (A) 64 (B) 52 (C) 100
 (D) 81 (E) 75
20. Jiwei et Hari ont participé à une course. Hari a terminé la course en $\frac{4}{5}$ du temps qu'il a fallu à Jiwei pour la terminer. Lors de leur prochaine course sur la même distance, Jiwei a augmenté sa vitesse moyenne de $x\%$ par rapport à la première course, tandis que Hari a couru à la même vitesse moyenne que lors de la première course. Dans cette deuxième course, Hari a terminé en même temps que Jiwei. Quelle est la valeur de x ?
 (A) 20 (B) 25 (C) 35 (D) 40 (E) 50

Partie C (8 points par bonne réponse).

Chaque bonne réponse est un entier de 0 à 99 inclusivement.

Une réponse à un chiffre (p. ex. « 7 ») doit être codée avec un zéro non significatif (« 07 »).

Remarque: L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 12345 est 45. L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 6307 est 7, que l'on code 07.

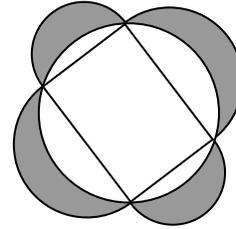
21. Les neuf cases d'un tableau 3×3 contiennent initialement des 0. On modifie le tableau selon les étapes suivantes :
- (i) ajouter 1 aux trois nombres de n'importe quelle rangée ;
 - (ii) ajouter 2 aux trois nombres de n'importe quelle colonne.

7	1	5
9	3	7
8	2	6

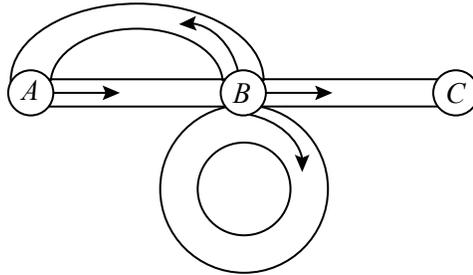
Après avoir appliqué l'étape (i) a fois et l'étape (ii) b fois, on obtient le tableau dans la figure ci-contre. Quelle est la valeur de $a + b$?

22. Pour combien d'entiers m la droite d'équation $y = mx$ coupe-t-elle le segment de droite dont les extrémités sont $(20, 24)$ et $(4, 202)$?

23. Quatre demi-cercles sont disposés de manière que leurs diamètres forment un rectangle de dimensions 6×8 . On trace un cercle qui passe par les quatre sommets du rectangle. Les régions à l'intérieur des quatre demi-cercles mais à l'extérieur du cercle sont ombrées, comme dans la figure ci-contre. Soit A l'aire totale des régions ombrées. Quel est l'entier le plus près de A ?

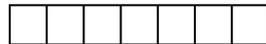


24. Il y a quatre chemins dans un parc, comme dans la figure ci-dessous. Il faut 2 minutes pour parcourir le chemin de A à B , 3 minutes pour parcourir le chemin de B à A , 3 minutes pour parcourir le chemin de B à C et 3 minutes pour faire le tour du chemin qui commence et se termine à B . Rasheeqa commence à se promener à partir du point A , en marchant uniquement dans les directions indiquées le long des chemins, sans s'arrêter, et termine sa promenade au point C .



Si la promenade dure au total t minutes, combien y a-t-il de valeurs possibles de t telles que $t \leq 100$?

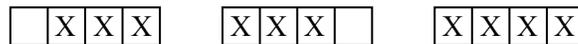
25. Ellie a une grille vide de dimensions 1×7 composée de carrés de dimensions 1×1 :



Elle suit les étapes suivantes pour construire un motif :

- (i) Placer un X dans n'importe quel carré vide.
- (ii) Si trois carrés consécutifs ou plus contiennent chacun un X, s'arrêter et ne pas ajouter d'autres X ; sinon, revenir à l'étape (i) et continuer le processus.

Par exemple, dans une plus petite grille de dimensions 1×4 , on peut construire 3 motifs différents :



(On peut obtenir le dernier motif en plaçant des X dans les carrés 1, 2, 4 et 3, dans cet ordre.) En appliquant ce processus à partir de la grille vide de 1×7 , combien de motifs différents Ellie peut-elle construire ?



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Cayley de 2024! Chaque année, plus de 265 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Galois qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- plus d'information à propos du concours Galois
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
- utiliser notre générateur de séries de problèmes gratuit pour créer des séries de problèmes afin de soutenir et d'enrichir le programme scolaire; veuillez noter que cette ressource n'est disponible qu'en anglais
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours