Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

le mercredi 13 novembre 2024
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)
le jeudi 14 novembre 2024
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

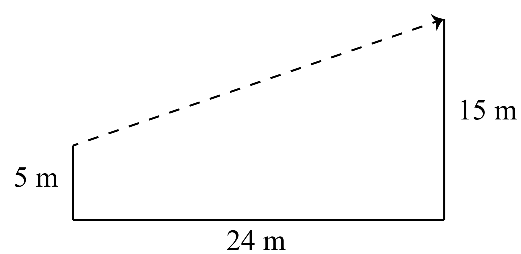
Remarques :

1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

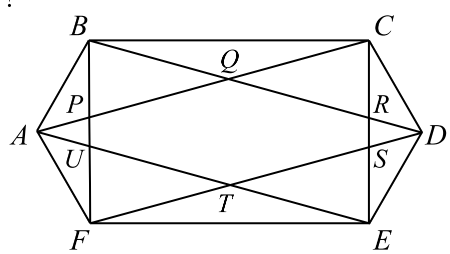
1. Quel entier est égal à $\sqrt{10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 11 + 11^2}$?
2. Deux arbres verticaux, l'un de 5 m de hauteur et l'autre de 15 m de hauteur, sont situés à une distance horizontale de 24 m l'un de l'autre. Un oiseau vole, en ligne droite, du sommet de l'arbre le plus petit au sommet de l'arbre le plus grand à une vitesse constante de 4 m/s. Combien de temps l'oiseau met-il pour effectuer son vol ?



3. À la fin du match de soccer d'hier entre l'équipe Igrec et l'équipe Zed, l'équipe Igrec avait marqué 3 buts et l'équipe Zed en avait marqué 2. À la mi-temps, l'équipe Igrec avait marqué y buts et l'équipe Zed z buts. Si $y \geq 0$ et $z \geq 0$, combien de possibilités y a-t-il pour le couple d'entiers (y, z) ?

   (Au soccer, le score de chaque équipe est toujours un entier non négatif qui ne peut qu'augmenter au fil du match).
4. Combien y a-t-il de quadruplets (a, b, c, d) d'entiers strictement positifs, avec $d \leq 8$, tels que d soit égal au produit de a, b et c ? (Autrement dit, combien de tels quadruplets vérifient $abc = d$?)

5. Dans la figure ci-dessous, $ABCDEF$ est un hexagone dont les six angles intérieurs sont égaux (c'est-à-dire $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEF = \angle EFA = \angle FAB$). De plus, $BC = EF = 6$ et $AB = CD = DE = FA = 2$. Les segments de droites AC, BD, CE, DF, EA, FB forment un plus petit hexagone $PQRSTU$, tel qu'illustré dans la figure ci-dessous. Si l'aire de l'hexagone $PQRSTU$ est égale à $\frac{\sqrt{n}}{t}$, n et t étant des entiers strictement positifs et t étant aussi petit que possible, quel est le couple (n, t) ?



6. Une *liste Gleeson* est une liste d'entiers strictement positifs distincts, placés en ordre croissant, dont la somme est 2024. Par exemple, $70, 700, 1254$ est une liste Gleeson de longueur 3 et $2, 4, 6, 10, 15, 987, 1000$ est une liste Gleeson de longueur 7. Soit M la longueur maximale possible d'une liste Gleeson. Combien y a-t-il de listes Gleeson de longueur M ?

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. (a) Déterminer l'entier x qui vérifie $2^{x+1} = 64$.

   (b) Déterminer les valeurs de t et u qui vérifient le système d'équations suivant :

$$2^{t+u} = 2^8$$
$$5^{u-3} = 5^2$$

   (c) Déterminer les entiers m et r qui vérifient $2^{2m+r}5^{3m-r} = 2^7 5^3$.

   (d) Démontrer qu'il n'existe aucun couple (p, q) d'entiers tel que $2^{p+q}5^{p-q} = 80$.

2. (a) L'équation quadratique $x^2 - 2x - 1 = 0$ admet deux solutions, soit $x = r$ et $x = s$. Déterminer les entiers b et c pour lesquels l'équation quadratique $x^2 + bx + c = 0$ admet les solutions $x = 2r + s$ et $x = r + 2s$.

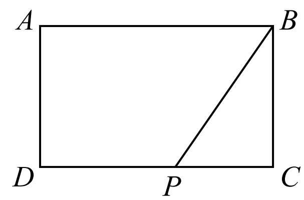
   (b) Soit m et p des nombres réels tels que le polynôme $f(x) = x^2 + mx + p$ admet deux racines réelles positives distinctes. Démontrer que le polynôme $g(x) = x^2 - (m^2 - 2p)x + p^2$ admet deux racines réelles positives distinctes.

   (c) Soit $A_1 = -6$, $B_1 = 10$ et $C_1 = -5$. Pour chaque entier strictement positif $n \geq 2$, soit :

$$A_n = 2B_{n-1} - (A_{n-1})^2$$
$$B_n = (B_{n-1})^2 - 2A_{n-1}C_{n-1}$$
$$C_n = -(C_{n-1})^2$$

   Démontrer que le polynôme $f_{100}(x) = x^3 + A_{100}x^2 + B_{100}x + C_{100}$ admet trois racines réelles positives distinctes.

3. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un rectangle tel que $AB > BC$. Le point P est situé sur CD de manière que $PD = PB$.



(a) Soit $PD = 53$ et $BC = 28$. Déterminer la longueur de AB.

(b) Soit $AB = 101$. Si la longueur de BC est un entier, démontrer que la longueur de PD ne peut être un entier.

(c) Soit $BC = m$, m étant un entier strictement positif. Supposons également que, pour cette valeur de m, il existe exactement 7 entiers strictement positifs n tels que lorsque $AB = n$, la longueur de PD est un entier. Déterminer toutes les valeurs possibles de m avec $1 \leq m \leq 100$.