Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

le mercredi 13 novembre 2024
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)
le jeudi 14 novembre 2024
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures ©2024 University of Waterloo

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

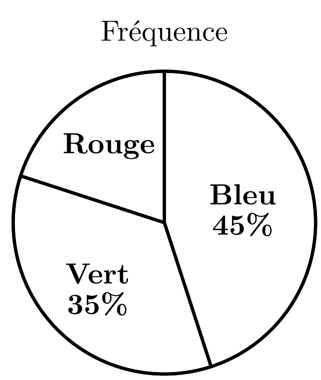
Remarques :

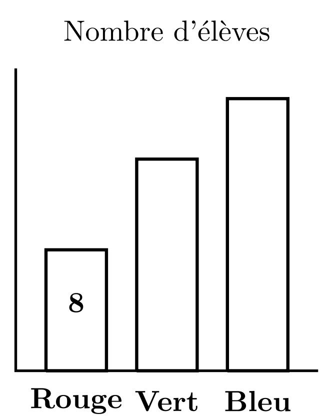
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

PARTIE A

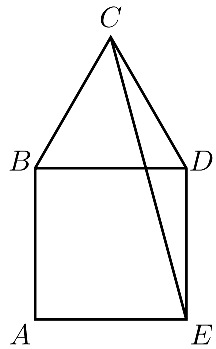
Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Un récipient cubique a pour dimensions 4 cm $\times$ 4 cm $\times$ 4 cm. Le récipient est placé sur une table horizontale de manière à reposer à plat sur l'une de ses faces. On verse de l'eau dans le récipient de manière que l'eau ait une profondeur de 2 cm. Quel est le volume d'eau dans le récipient, en cm^3 ?
2. On a demandé à un groupe d'élèves de choisir leur couleur préférée parmi les trois couleurs suivantes : rouge, vert et bleu. Malheureusement, certains résultats de l'enquête ont été perdus. Toutes les données restantes sont représentées à la fois dans le diagramme circulaire et dans le diagramme à bandes ci-dessous. Combien d'élèves ont été interrogés au total ?





3. Dans la figure ci-dessous, $ABDE$ est un carré et le triangle BCD est équilatéral. Quelle est la mesure de l'angle ECB ?



4. Les entiers strictement positifs a et b vérifient $2a < b$. La somme $\frac{a}{4}+\frac{b}{2}$ est supérieure à 27 et inférieure à 28. Quelle est la plus grande valeur possible de a ?

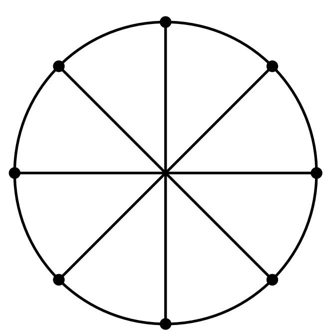
5. Lakshmi crée un tableau qui comporte 95 rangées et 7 colonnes. Elle place un entier strictement positif dans chacune des $95 \times 7 = 665$ cases du tableau selon les règles suivantes :
   — Chaque entier dans la première colonne (la plus à gauche) est 5.
   — Les cases de la deuxième colonne contiennent les entiers consécutifs de 5 à 99, placés en ordre croissant de haut en bas (5 figure donc dans la première case de la colonne tandis que 99 figure dans la dernière case de la colonne).
   — Dans les colonnes restantes, chaque entier est égal à la somme des entiers dans les deux cases situées directement à sa gauche dans la même rangée.

   Les trois première rangées du tableau sont représentées ci-dessous.

5	5	10	15	25	40	65
5	6	11	17	28	45	73
5	7	12	19	31	50	81
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

   Combien d'entiers différents de deux chiffres paraissent exactement 5 fois dans le tableau ?

6. On place huit points à égales distances sur un cercle et on relie les paires de points par 4 diamètres, comme dans la figure ci-dessous. Les huit points doivent être nommées, au hasard, au moyen des entiers de 1 à 8. Chaque entier ne peut être utilisé qu'une seule fois. Quelle est la probabilité pour qu'au moins l'un des quatre diamètres ait un multiple de 3 à l'une de ses extrémités et un multiple de 2 à l'autre extrémité ?

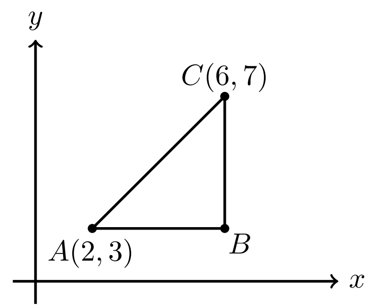


PARTIE B

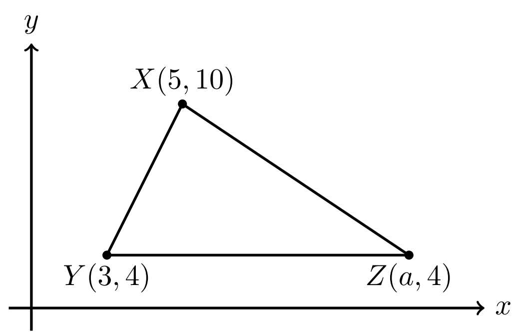
Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Renseignement utile pour la Partie B :
La somme des k premiers carrés parfaits est égale à $\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.
Autrement dit, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

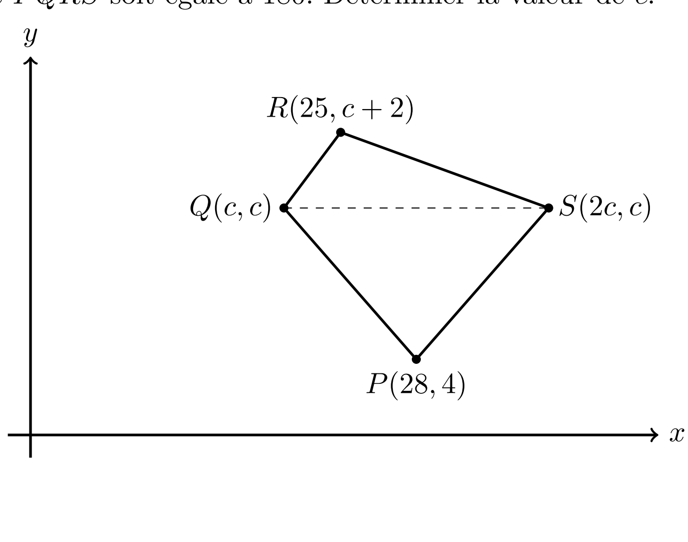
1. (a) Dans la figure ci-contre, $A(2,3)$ et $C(6,7)$ sont deux sommets du triangle ABC. Sachant que AB est horizontal et que BC est vertical, déterminer l'aire du triangle rectangle ABC.



(b) Dans la figure ci-dessous, le triangle XYZ a pour sommets $X(5,10)$, $Y(3,4)$ et $Z(a,4)$, a étant un nombre réel tel que $a > 3$, ce qui signifie que le côté YZ est horizontal. Sachant que le triangle XYZ a une aire de 24, déterminer la valeur de a.



(c) Le quadrilatère $PQRS$ a pour sommets $P(28,4)$, $Q(c,c)$, $R(25,c+2)$ et $S(2c,c)$. La diagonale QS est horizontale et divise $PQRS$ en deux triangles, comme dans la figure ci-dessous. Il existe un entier strictement positif c tel que l'aire du quadrilatère $PQRS$ soit égale à 180. Déterminer la valeur de c.



2. (a) Béatrice a couru 30 km. Elle a couru les 20 premiers kilomètres à une vitesse de 12 km/h et les 10 derniers kilomètres à une vitesse de 10 km/h. Déterminer le temps total, en heures, que Béatrice a mis pour courir 30 km.

   (b) Carole a marché 10 km en 2 heures et 18 minutes. Elle a marché les x premiers kilomètres à une vitesse de 6 km/h et les $(10 - x)$ derniers kilomètres à une vitesse de 4 km/h. Déterminer la valeur de x.

   (c) Damien a fait du vélo pendant 3 heures. Il a parcouru a km à une vitesse de 24 km/h, puis b km à une vitesse de 16 km/h. Déterminer le nombre de couples (a, b) d'entiers strictement positifs pour lesquels cela est possible.

   (d) Arold a participé à une épreuve d'endurance qui a duré 5 heures. Il a couru r km à une vitesse de 12 km/h, puis il a parcouru j km en faisant du jogging à une vitesse de 8 km/h, puis il a marché w km à une vitesse de 4 km/h. Déterminer le nombre de triplets (r, j, w) d'entiers strictement positifs pour lesquels cela est possible.

3. Considérons une liste d'entiers consécutifs placés en ordre croissant. La *somme à 3 signes* de cette liste est obtenue en additionnant les entiers dans l'ordre, mais en soustrayant chaque troisième entier. Par exemple, la somme à 3 signes de la liste 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 est calculée ainsi : $3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 + 9 = 16$.

   (a) Déterminer la somme à 3 signes de 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

   Pour un entier strictement positif n, une *tranche* de la liste 1, 2, 3, …, $n - 1$, n correspond à une liste composée d'au moins 1 et d'au plus n entiers consécutifs, chacun étant compris entre 1 et n inclusivement, placés en ordre croissant. Par exemple, la liste 1, 2 et la liste 2, 3, 4 sont des tranches de la liste 1, 2, 3, 4, 5. À titre d'exemple supplémentaire, la liste 1, 2, 3 comporte au total six tranches. Ces dernières sont présentées dans la colonne de gauche du tableau ci-dessous, tandis que leurs sommes à 3 signes figurent dans la colonne de droite.

Tranche	Somme à 3 signes
1, 2, 3	$1 + 2 - 3 = 0$
1, 2	$1 + 2 = 3$
2, 3	$2 + 3 = 5$
1	1
2	2
3	3

   Pour un entier strictement positif n, le *nombre Ghimire* de n, représenté par G_n, est la somme des sommes à 3 signes de toutes les tranches de 1, 2, 3, …, $n - 1$, n. Par exemple, d'après le tableau ci-dessus, $G_3 = 0 + 3 + 5 + 1 + 2 + 3 = 14$.

   (b) Pour chaque entier $n \geq 1$, démontrer que $\dfrac{G_{3n} - 2G_{3n-1} + G_{3n-2}}{3}$ est un carré parfait.

   (c) Déterminer le reste lorsque $G_{2025} - G_{2024}$ est divisé par 27.

Concours
canadien de
mathématiques
de niveau
intermédiaire
2024
(français)