Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2023

le mardi 4 avril 2023
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 5 avril 2023
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Puisque les 5 nombres n, $2n$, $3n$, $4n$ et $5n$ ont une moyenne de 18, on obtient l'équation $\dfrac{n+2n+3n+4n+5n}{5}=18$.

   Donc, $\dfrac{15n}{5}=18$, d'où $3n=18$ ou $n=6$.

   (b) *Solution 1*
   Lorsque l'on additionne, membre par membre, les équations $2x+y=5$ et $x+2y=7$, on obtient $(2x+y)+(x+2y)=5+7$, d'où $3x+3y=12$.

   Donc, la moyenne de x et y est égale à $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{3x+3y}{6}=\dfrac{12}{6}=2$.

   Solution 2
   Puisque $2x+y=5$, alors $4x+2y=10$.
   On soustrait, membre par membre, l'équation $x+2y=7$ de l'équation $4x+2y=10$ pour obtenir $(4x+2y)-(x+2y)=10-7$, d'où $3x=3$ ou $x=1$.
   Donc, $y=5-2x=3$.
   La moyenne de x et y est donc égale à $\dfrac{1+3}{2}=2$.

   (c) Puisque les trois nombres t^2, $2t$ et 3 ont une moyenne de 9, alors $\dfrac{t^2+2t+3}{3}=9$.
   Donc, $t^2+2t+3=27$, d'où $t^2+2t-24=0$ ou $(t+6)(t-4)=0$.
   Puisque $t<0$, alors $t=-6$.

2. (a) Puisque $Q(5,3)$ est le milieu de $P(1,p)$ et $R(r,5)$, alors $\dfrac{1+r}{2}=5$ et $\dfrac{p+5}{2}=3$.
   On a donc $1+r=10$, d'où $r=9$ et $p+5=6$, d'où $p=1$.
   Donc, $p=1$ et $r=9$.

   (b) *Solution 1*
   Le point $P(3,6)$ est situé à 6 unités au-dessus de l'axe des abscisses.
   Une droite de pente 3 a un déplacement vertical de 6 unités vers le haut pour chaque déplacement horizontal de 2 unités vers la droite. Donc, pour se déplacer de $P(3,6)$ jusqu'à l'axe des abscisses le long de cette droite, on se déplace de 6 unités vers le bas et de 2 unités vers la gauche. Donc, cette droite a une abscisse à l'origine de $3-2=1$.
   Une droite ayant une pente de -1 a un déplacement horizontal de 6 unités vers la gauche pour chaque déplacement vertical de 6 unités vers le haut. Donc, pour se déplacer de $P(3{,}6)$ jusqu'à l'axe des abscisses le long de cette droite, on se déplace de 6 unités vers le bas et de 6 unités vers la droite. Donc, cette droite a une abscisse à l'origine de $3+6=9$.
   La distance entre les abscisses à l'origine des deux droites est égale à $9-1=8$.

   Solution 2
   Une droite de pente 3 qui passe au point $P(3,6)$ a pour équation $y-6=3(x-3)$ ou $y=3x-3$.
   L'abscisse à l'origine de cette droite a pour ordonnée $y=0$, d'où on a donc $0=3x-3$ ou $3x=3$, soit $x=1$.
   Une droite de pente -1 qui passe au point $P(3,6)$ a pour équation $y-6=(-1)(x-3)$ ou $y=-x+9$.
   L'abscisse à l'origine de cette droite a pour ordonnée $y=0$, d'où on a donc $0=-x+9$ ou $x=9$.
   La distance entre les abscisses à l'origine des deux droites est égale à $9-1=8$.

(c) La droite d'équation $y = 2x + 7$ a une pente de 2.
La droite d'équation $y = tx + t$ a une pente de t.
Puisque ces droites sont perpendiculaires, le produit de leurs pentes est égal à -1. Donc, $2t = -1$, d'où $t = -\frac{1}{2}$.
Il faut ensuite trouver le point d'intersection des droites d'équations $y = 2x + 7$ et $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.
On reporte l'une des équations dans l'autre pour obtenir $2x + 7 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{2}x = -\frac{15}{2}$, d'où $x = -3$.
Donc, $y = 2x + 7 = 2(-3) + 7 = 1$. Donc, les droites se coupent en $(-3, 1)$.

3. (a) Puisque $64 = 2^6$, ses diviseurs positifs sont 1, 2, 4, 8, 16, 32 et 64.
Ces diviseurs ont une somme de $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$.

(b) Supposons que Fiona ait écrit les quatre entiers x, $x + 1$, $x + 2$ et $x + 3$.
Lorsque Laure efface l'un de ces entiers, la somme des trois entiers restants est égale à l'une des expressions suivantes :

$$\begin{aligned}(x+1)+(x+2)+(x+3) &= 3x+6\\ x+(x+2)+(x+3) &= 3x+5\\ x+(x+1)+(x+3) &= 3x+4\\ x+(x+1)+(x+2) &= 3x+3\end{aligned}$$

On sait que ces entiers ont une somme de 847.
Remarquons que $847 = 3 \cdot 282 + 1$, ce qui est un de plus qu'un multiple de 3. Puisque $3x+3$ et $3x + 6$ sont toujours des multiples de 3 et que $3x + 5$ est 2 de plus qu'un multiple de 3, alors on doit avoir $3x + 4 = 847$, d'où $3x = 843$ ou $x = 281$. (Un autre moyen aurait été de supposer que chacune des sommes ci-dessus était égale à 847 pour ensuite déterminer dans quel(s) cas on aurait obtenu une solution entière pour x.)
Donc, Fiona a érit les quatre entiers 281, 282, 283, 284 et Laure a effacé $x + 2 = 283$.

(c) D'après l'énoncé du problème, les 7 termes de la suite arithmétique sont :

$$d^2,\ \ d^2+d,\ \ d^2+2d,\ \ d^2+3d,\ \ d^2+4d,\ \ d^2+5d,\ \ d^2+6d$$

Puisque ces 7 termes ont une somme de 756, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}d^2+(d^2+d)+(d^2+2d)+(d^2+3d)+(d^2+4d)+(d^2+5d)+(d^2+6d) &= 756\\ 7d^2+21d &= 756\\ d^2+3d &= 108\\ d^2+3d-108 &= 0\\ (d+12)(d-9) &= 0\end{aligned}$$

on a donc $d = -12$ ou $d = 9$.
Les suites arithmétiques correspondantes sont

$$144, 132, 120, 108, 96, 84, 72 \qquad \text{et} \qquad 81, 90, 99, 108, 117, 126, 135$$

4. (a) En 1 heure, Liang peint $\frac{1}{3}$ de la pièce.

Donc, en 2 heures, Liang peint $\frac{2}{3}$ de la pièce.

Edmundo doit peindre $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ de la pièce.

En 1 heure, Edmundo peint $\frac{1}{4}$ de la pièce.

Puisque $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ et $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, cela signifie qu'Edmundo peint pendant $\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{12} \div \frac{3}{12} = \frac{4}{3}$ d'heure.

Donc, Edmundo peint pendant 80 minutes.

(b) Sous forme de fraction, A % est égal à $\dfrac{A}{100}$.

Lorsqu'un investissement augmente de A %, on peut trouver sa nouvelle valeur en multipliant par $1 + \dfrac{A}{100}$.

Lorsqu'un investissement diminue de A %, on peut trouver sa nouvelle valeur en multipliant par $1 - \dfrac{A}{100}$.

Lorsqu'un investissement de 400 \$ augmente de A %, la nouvelle valeur de l'investissement est égale à 400 \$ $\left(1 + \dfrac{A}{100}\right)$.

Lorsque cette valeur diminue de A %, la nouvelle valeur de l'investissement est égale à 400 \$ $\left(1 + \dfrac{A}{100}\right)\left(1 - \dfrac{A}{100}\right)$.

Donc,

$$\begin{aligned}
400\ \$ \left(1 + \frac{A}{100}\right)\left(1 - \frac{A}{100}\right) &= 391\ \$ \\
\left(1 + \frac{A}{100}\right)\left(1 - \frac{A}{100}\right) &= \frac{391}{400} \\
1 - \frac{A^2}{100^2} &= 1 - \frac{9}{400} \\
\frac{A^2}{100^2} &= \frac{9}{400} \\
\frac{A^2}{100^2} &= \frac{3^2}{20^2} \\
\frac{A}{100} &= \frac{3}{20} \qquad \text{(puisque } A > 0\text{)} \\
A &= 100 \cdot \frac{3}{20} = 15
\end{aligned}$$

Donc, $A = 15$.

5. (a) La fonction quadratique $f(x) = x^2 + (2n-1)x + (n^2 - 22)$ n'admet aucune racine réelle uniquement lorsque son discriminant, Δ, est négatif.
Le discriminant de cette fonction est égal à

$$\begin{aligned}\Delta &= (2n-1)^2 - 4(1)(n^2-22)\\ &= (4n^2-4n+1) - (4n^2-88)\\ &= -4n+89\end{aligned}$$

On a $\Delta < 0$ exactement lorsque $-4n+89 < 0$ ou $4n > 89$.
Cette inéquation est équivalente à $n > \frac{89}{4} = 22\frac{1}{4}$.
Donc, le plus petit entier strictement positif qui vérifie cette inéquation (et donc celui pour lequel $f(x)$ n'admet aucune racine réelle) est $n = 23$.

(b) En utilisant la loi des cosinus dans le triangle PQR, on a

$$\begin{aligned}PR^2 &= PQ^2 + QR^2 - 2\cdot PQ\cdot QR\cdot\cos(\angle PQR)\\ 21^2 &= a^2+b^2-2ab\cos(60^\circ)\\ 441 &= a^2+b^2-2ab\cdot\tfrac{1}{2}\\ 441 &= a^2+b^2-ab\end{aligned}$$

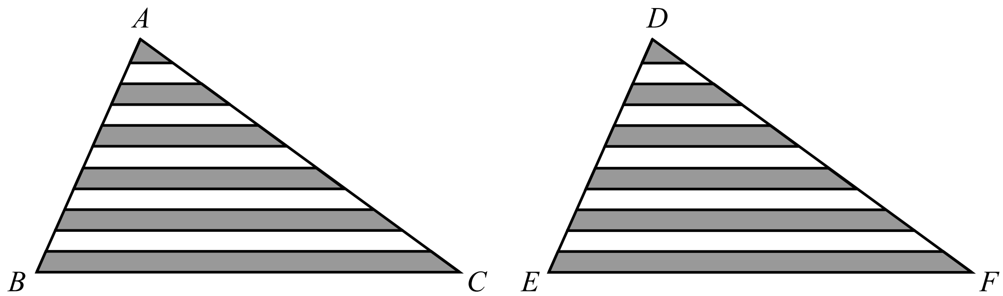
En utilisant la loi des sinus dans le triangle STU, on a $\dfrac{ST}{\sin(\angle TUS)} = \dfrac{TU}{\sin(\angle TSU)}$, d'où $\dfrac{a}{4/5} = \dfrac{b}{\sin(30^\circ)}$.
Donc, $\dfrac{a}{4/5} = \dfrac{b}{1/2}$, d'où $a = \frac{4}{5}\cdot 2b = \frac{8}{5}b$, que l'on reporte dans l'équation précédente pour obtenir :

$$\begin{aligned}441 &= \left(\tfrac{8}{5}b\right)^2 + b^2 - \left(\tfrac{8}{5}b\right)b\\ 441 &= \tfrac{64}{25}b^2 + b^2 - \tfrac{8}{5}b^2\\ 441 &= \tfrac{64}{25}b^2 + \tfrac{25}{25}b^2 - \tfrac{40}{25}b^2\\ 441 &= \tfrac{49}{25}b^2\\ 225 &= b^2\end{aligned}$$

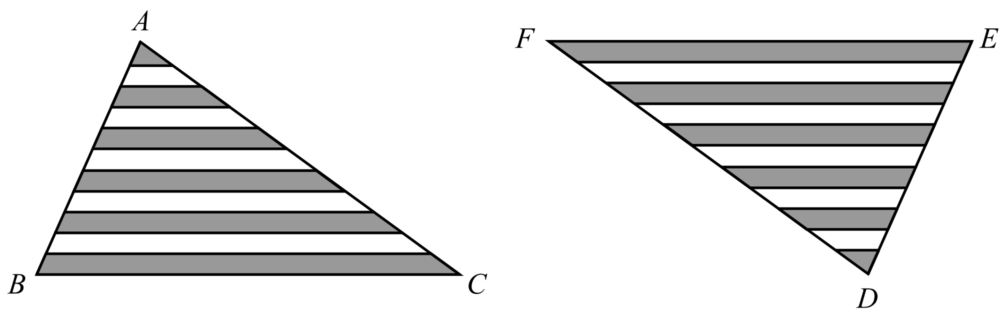
Puisque $b > 0$, alors $b = 15$, d'où $a = \frac{8}{5}b = \frac{8}{5}\cdot 15 = 24$.

6. (a) *Solution 1*

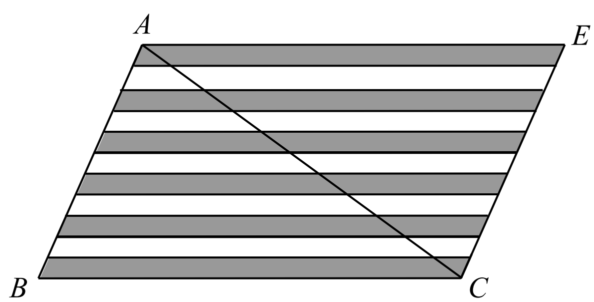
On crée deux copies du triangle donné, que l'on nomme les triangles ABC et DEF, comme dans les figures ci-dessous :



L'aire combinée de ces deux triangles est égale à $2 \cdot 770$ cm^2 $= 1540$ cm^2. De plus, les deux triangles ont la même aire ombrée.
Ensuite, on fait pivoter le triangle DEF de 180° :



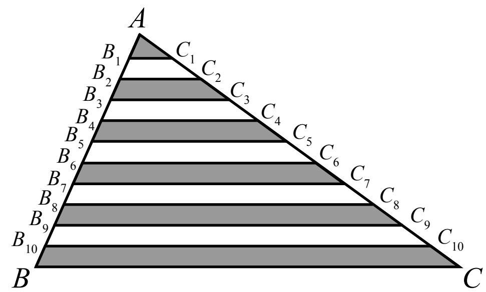
et on joint les deux triangles ensemble :



On remarque que BC et AE (qui était FE) sont de même longueur (puisqu'ils étaient des copies l'un de l'autre) et sont parallèles (car BC et AE sont des rotations de 180° l'un par rapport à l'autre). Il en va de même pour AB et EC.
Donc, $ABCE$ est un parallélogramme..
De plus, $ABCE$ est divisé en 11 parallélogrammes identiques (6 ombrés et 5 non ombrés) par les lignes horizontales. (Puisque les sections des deux triangles sont de même hauteur, les lignes horizontales des deux côtés de AC sont alignées.)
L'aire totale du parallélogramme $ABCE$ est égale à 1540 cm^2.
Donc, l'aire ombrée de $ABCE$ est égale à $\frac{6}{11} \cdot 1540$ cm^2 $= 840$ cm^2.
Puisque cette aire ombrée est divisée de manière égale entre les deux moitiés du parallélogramme, l'aire combinée des régions ombrées du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} \cdot 840$ cm^2 $= 420$ cm^2.

Solution 2

Dans la figure ci-dessous, on nomme les points où les lignes horizontales touchent AB et AC :



On utilise la notation $|\triangle ABC|$ pour représenter l'aire du triangle ABC et on utilise une notation similaire pour représenter les aires d'autres triangles et quadrilatères.
Soit $\mathcal{A}$ égal à l'aire totale des régions ombrées.
Donc,

$$\mathcal{A} = |\triangle AB_1C_1| + |B_2B_3C_3C_2| + |B_4B_5C_5C_4| + |B_6B_7C_7C_6| + |B_8B_9C_9C_8| + |B_{10}BCC_{10}|$$

L'aire de chacun de ces quadrilatères est égale à la différence entre les aires de deux triangles. Par exemple,

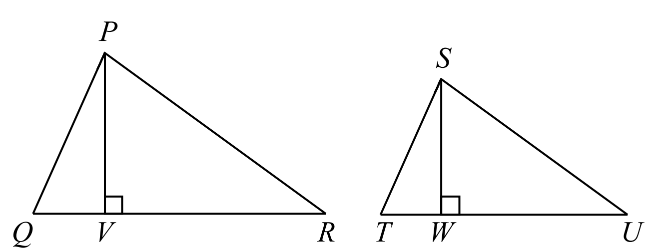
$$|B_2B_3C_3C_2| = |\triangle AB_3C_3| - |\triangle AB_2C_2| = -|\triangle AB_2C_2| + |\triangle AB_3C_3|$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = {} & |\triangle AB_1C_1| - |\triangle AB_2C_2| + |\triangle AB_3C_3| - |\triangle AB_4C_4| + |\triangle AB_5C_5| \\ & - |\triangle AB_6C_6| + |\triangle AB_7C_7| - |\triangle AB_8C_8| + |\triangle AB_9C_9| - |\triangle AB_{10}C_{10}| + |\triangle ABC|\end{aligned}$$

Chacun des triangles AB_1C_1, AB_2C_2, $\ldots$, $AB_{10}C_{10}$ est semblable au triangle ABC car leurs angles sont congrus.
Soit h la hauteur du triangle ABC.
Puisque les 11 régions sont de même hauteur, alors la hauteur du triangle AB_1C_1 est égale à $\frac{1}{11}h$, la hauteur du triangle AB_2C_2 est égale à $\frac{2}{11}h$ et ainsi de suite.
Lorsque deux triangles sont semblables, leurs hauteurs sont dans le même rapport que les longueurs de leurs côtés correspondants :

> Pour le voir, supposons que le triangle PQR est semblable au triangle STU. On abaisse des perpendiculaires du point P jusqu'au point V sur QR et du point S jusqu'au point W sur TU.



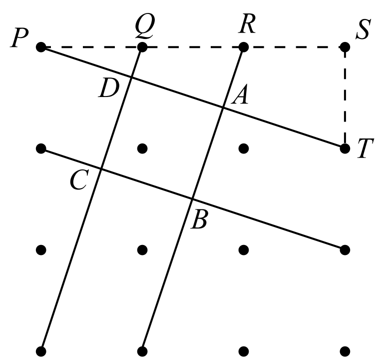
> Puisque $\angle PQR = \angle STU$, alors le triangle PQV est semblable au triangle STW (angle égal ; angle droit), ce qui signifie que $\dfrac{PQ}{ST} = \dfrac{PV}{SW}$. En d'autres termes, le rapport des côtés est égal au rapport des hauteurs.

Puisque la hauteur du triangle AB_1C_1 est égale à $\frac{1}{11}h$, alors $B_1C_1 = \frac{1}{11}BC$.
Donc, $|\triangle AB_1C_1| = \frac{1}{2} \cdot B_1C_1 \cdot \frac{1}{11}h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11}BC \cdot \frac{1}{11}h = \frac{1^2}{11^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h = \frac{1^2}{11^2}|\triangle ABC|$.
De même, puisque la hauteur du triangle AB_2C_2 est égale à $\frac{2}{11}h$, alors $B_2C_2 = \frac{2}{11}BC$.
Donc, $|\triangle AB_2C_2| = \frac{1}{2} \cdot B_2C_2 \cdot \frac{2}{11}h = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{11}BC \cdot \frac{2}{11}h = \frac{2^2}{11^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h = \frac{2^2}{11^2}|\triangle ABC|$.
Ce résultat continue pour chacun des triangles.
Donc,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \tfrac{1^2}{11^2}|\triangle ABC| - \tfrac{2^2}{11^2}|\triangle ABC| + \tfrac{3^2}{11^2}|\triangle ABC| - \tfrac{4^2}{11^2}|\triangle ABC| + \tfrac{5^2}{11^2}|\triangle ABC| \\
&\quad - \tfrac{6^2}{11^2}|\triangle ABC| + \tfrac{7^2}{11^2}|\triangle ABC| - \tfrac{8^2}{11^2}|\triangle ABC| + \tfrac{9^2}{11^2}|\triangle ABC| - \tfrac{10^2}{11^2}|\triangle ABC| + \tfrac{11^2}{11^2}|\triangle ABC| \\
&= \tfrac{1}{11^2}|\triangle ABC|(11^2 - 10^2 + 9^2 - 8^2 + 7^2 - 6^2 + 5^2 - 4^2 + 3^2 - 2^2 + 1) \\
&= \tfrac{1}{11^2}(770 \text{ cm}^2)((11+10)(11-10) + (9+8)(9-8) + \cdots + (3+2)(3-2) + 1) \\
&= \tfrac{1}{11^2}(770 \text{ cm}^2)(11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1) \\
&= \tfrac{1}{11}(70 \text{ cm}^2) \cdot 66 \\
&= 420 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

Donc, l'aire totale des régions ombrées du triangle ABC est égale à 420 cm^2.

(b) *Solution 1*
On nomme cinq points supplémentaires dans la figure :



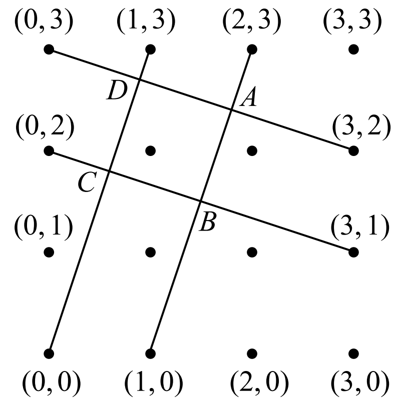
Puisque $PQ = QR = RS = 1$, alors $PS = 3$ et $PR = 2$.
Puisque $\angle PST = 90°$, alors $PT = \sqrt{PS^2 + ST^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ d'après le théorème de Pythagore.
On sait que $ABCD$ est un carré.
Donc, PT est perpendiculaire à QC et à RB.
Donc, le triangle PDQ est rectangle en D et le triangle PAR est rectangle en A.
Puisque les triangles PDQ, PAR et PST sont tous rectangles et qu'ils partagent un angle commun en P, alors ces trois triangles sont semblables.
Cela signifie que $\dfrac{PA}{PS} = \dfrac{PR}{PT}$. Donc, $PA = \dfrac{3 \cdot 2}{\sqrt{10}}$. De plus, $\dfrac{PD}{PS} = \dfrac{PQ}{PT}$. Donc, $PD = \dfrac{1 \cdot 3}{\sqrt{10}}$.
Donc,

$$DA = PA - PD = \frac{6}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Cela signifie que l'aire du carré $ABCD$ est égale à $DA^2 = \left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = \dfrac{9}{10}$.

Solution 2

On ajoute des coordonnées à la figure :



On détermine la longueur des côtés du carré $ABCD$ en déterminant les coordonnées de D et de A et en calculant ensuite la distance entre ces deux points.

La pente de la droite qui passe aux points $(0, 3)$ et $(3, 2)$ est égale à $\frac{3-2}{0-3} = -\frac{1}{3}$.

Cette droite a donc pour équation $y = -\frac{1}{3}x + 3$.

La pente de la droite qui passe aux points $(0, 0)$ et $(1, 3)$ est égale à 3.

Cette droite a donc pour équation $y = 3x$.

La pente de la droite qui passe aux points $(1, 0)$ et $(2, 3)$ est également égale à 3.

Cette droite a donc pour équation $y = 3(x - 1) = 3x - 3$.

Le point D est le point d'intersection des droites d'équations $y = -\frac{1}{3}x + 3$ et $y = 3x$.

On reporte l'une des équations dans l'autre pour obtenir $-\frac{1}{3}x + 3 = 3x$, d'où $\frac{10}{3}x = 3$ ou $x = \frac{9}{10}$.

Puisque $y = 3x$, on a $y = \frac{27}{10}$. Donc, D a pour coordonnées $\left(\frac{9}{10}, \frac{27}{10}\right)$.

Le point A est le point d'intersection des droites d'équations $y = -\frac{1}{3}x + 3$ et $y = 3x - 3$.

On reporte l'une des équations dans l'autre pour obtenir $-\frac{1}{3}x + 3 = 3x - 3$, d'où $\frac{10}{3}x = 6$ ou $x = \frac{18}{10}$.

Puisque $y = 3x - 3$, on a $y = \frac{24}{10}$. Donc, D a pour coordonnées $\left(\frac{18}{10}, \frac{24}{10}\right)$. (Il est plus facile de ne pas réduire ces fractions).

Donc,

$$DA = \sqrt{\left(\frac{9}{10} - \frac{18}{10}\right)^2 + \left(\frac{27}{10} - \frac{24}{10}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{90}{100}} = \sqrt{\frac{9}{10}}$$

Cela signifie que l'aire du carré $ABCD$ est égale à $DA^2 = \left(\sqrt{\frac{9}{10}}\right)^2 = \frac{9}{10}$.

7. (a) Chaque ordre possible dans lequel Akshan retire les billes correspond à une séquence de 9 couleurs, dont 3 sont rouges et 6 sont bleues.
On exprime ces ordres possibles comme séquences de 3 R et 6 B.
Puisque la première bille est rouge et que la troisième est bleue, on veut considérer toutes les séquences de la forme

$$R \_\_\_ \; B \_\_\_ \; \_\_\_ \; \_\_\_ \; \_\_\_ \; \_\_\_ \; \_\_\_$$

On doit remplir les 7 tirets avec les 2 R et 5 B restants, ce que l'on peut faire de $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ façons car on doit placer les R dans 2 des 7 tirets. (On pourrait aussi compter ces 21 façons directement en déterminant systématiquement le nombre total de paires de tirets.)
Pour certaines de ces 21 façons de remplir les 7 tirets avec les 2 R et 5 B restants, les deux billes bleues paraissent dans les tirets en dernières positions.
Ces séquences ont la forme suivante

$$R \_\_\_ \; B \_\_\_ \; \_\_\_ \; \_\_\_ \; \_\_\_ \; B \; B$$

Dans ces séquences, les 5 tirets doivent être remplis avec les 2 R et les 3 B restants, ce que l'on peut faire de $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ façons car on doit placer les R dans 2 des 5 tirets.
Donc, 10 des 21 séquences possibles se terminent par deux B. Donc, la probabilité pour que les deux dernières billes retirées soient bleues est égale à $\frac{10}{21}$.

(b) On factorise la première équation pour obtenir

$$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d)$$

On a à présent les équations

$$(a + b)(c + d) = 2023$$
$$(a + b) + (c + d) = 296$$

On pose $s = a + b$ et $t = c + d$ pour obtenir les équations suivantes

$$st = 2023$$
$$s + t = 296$$

On remarque que s et t sont des entiers puisque a, b, c et d sont des entiers et on cherche les paires de diviseurs complémentaires de 2023 dont la somme est égale à 296.
Pour trouver les diviseurs de 2023, on doit écrire la factorisation première de l'entier :

$$2023 = 7 \cdot 289 = 7 \cdot 17^2$$

Donc, les diviseurs de 2023 sont 1, 7, 17, 119, 289, 2023.
Cela signifie que les paires de diviseurs complémentaires de 2023 sont

$$2023 = 1 \cdot 2023 = 7 \cdot 289 = 17 \cdot 119$$

La seule paire de diviseurs complémentaires ayant une somme de 296 est 7 et 289. (On aurait également pu les trouver en reportant $t = 206 - s$ dans $st = 2023$ et en utilisant la

formule quadratique.)
Puisque $a<b<c<d$, alors $a+b<c+d$. Donc, $s=a+b=7$ et $t=c+d=289$.
Puisque a et b sont des entiers strictement positifs avec $a<b$ et $a+b=7$, alors les paires (a,b) possibles sont

$$(a,b)=(1,6),(2,5),(3,4)$$

On sait que c et d sont des entiers strictement positifs avec $c<d$ et $c+d=289$ et $b<c<d$.
Lorsque $(a,b)=(1,6)$, cela signifie que les possibilités sont

$$(c,d)=(7,282),(8,281),(9,280),\ldots,(143,146),(144,145)$$

Il y a $144-7+1=138$ telles paires.
Lorsque $(a,b)=(2,5)$, les possibilités sont

$$(c,d)=(6,283),(7,282),(8,281),(9,280),\ldots,(143,146),(144,145)$$

Il y a $138+1=139$ telles paires.
Lorsque $(a,b)=(3,4)$, les possibilités sont

$$(c,d)=(5,284),(6,283),(7,282),(8,281),(9,280),\ldots,(143,146),(144,145)$$

Il y a $139+1=140$ telles paires.
En tout, il y a $138+139+140=417$ quadruplets (a,b,c,d) possibles.

8. (a) Puisque le triangle ABC est rectangle en B, alors

$$\begin{aligned}BC^2&=AC^2-AB^2\\&=((n+1)(n+4))^2-(n(n+1))^2\\&=(n+1)^2(n+4)^2-n^2(n+1)^2\\&=(n+1)^2\left((n+4)^2-n^2\right)\\&=(n+1)^2\left(n^2+8n+16-n^2\right)\\&=(n+1)^2(8n+16)\\&=4(n+1)^2(2n+4)\end{aligned}$$

La longueur de BC est un entier exactement lorsque $4(n+1)^2(2n+4)$ est un carré parfait.
Puisque $4(n+1)^2$ est un carré parfait, alors BC est un entier exactement lorsque $2n+4$ est un carré parfait.
On remarque que $2n+4\geq 6$ (puisque $n\geq 1$) et que $2n+4$ est pair.
Puisque $n<100\,000$, alors $6\leq 2n+4<200\,004$, il faut donc compter le nombre de carrés parfaits pairs compris entre 6 et 200 004.
Le plus petit carré parfait pair dans cet intervalle est $4^2=16$.
Puisque $\sqrt{200\,004}\approx 447{,}2$, le plus grand carré parfait pair dans cet intervalle est 446^2.
Donc, le nombre de carrés parfaits pairs dans cet intervalle est égal à $\dfrac{446}{2}-1=222$.
Donc, il y a 222 entiers strictement positifs n pour lesquels la longueur de BC est un entier.

(b) Soit $f(x) = \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2(4x) + 1} + \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2\left(\dfrac{x}{64}\right) + 9}$.

D'après les lois des logarithmes,

$$\begin{aligned}\log_2 x \cdot \log_2(4x) + 1 &= \log_2 x(\log_2 4 + \log_2 x) + 1 \\ &= \log_2 x(2 + \log_2 x) + 1 \qquad \text{(puisque } 2^2 = 4) \\ &= (\log_2 x)^2 + 2 \cdot \log_2 x + 1 \\ &= (\log_2 x + 1)^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\log_2 x \cdot \log_2\left(\frac{x}{64}\right) + 9 &= \log_2 x(\log_2 x - \log_2 64) + 9 \\ &= \log_2 x(\log_2 x - 6) + 9 \qquad \text{(puisque } 2^6 = 64) \\ &= (\log_2 x)^2 - 6\log_2 x + 9 \\ &= (\log_2 x - 3)^2\end{aligned}$$

Donc,

$$f(x) = \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2(4x) + 1} + \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2\left(\frac{x}{64}\right) + 9} = \sqrt{(\log_2 x + 1)^2} + \sqrt{(\log_2 x - 3)^2}$$

Avant de continuer, rappelons que si $a \leq 0$, alors $\sqrt{a^2} = -a$ et si $a > 0$, alors $\sqrt{a^2} = a$.
Lorsque $\log_2 x \leq -1$, on sait que $\log_2 x + 1 \leq 0$ et que $\log_2 x - 3 < 0$, donc

$$f(x) = -(\log_2 x + 1) - (\log_2 x - 3) = 2 - 2\log_2 x$$

Lorsque $-1 < \log_2 x \leq 3$, on sait que $\log_2 x + 1 > 0$ et que $\log_2 x - 3 \leq 0$, donc

$$f(x) = (\log_2 x + 1) - (\log_2 x - 3) = 4$$

Lorsque $\log_2 x > 3$, on sait que $\log_2 x + 1 \geq 0$ et que $\log_2 x - 3 > 0$, donc

$$f(x) = (\log_2 x + 1) + (\log_2 x - 3) = 2\log_2 x - 2$$

On veut trouver toutes les valeurs de x telles que $f(x) = 4$.
Lorsque $\log_2 x \leq -1$, $f(x) = 2 - 2\log_2 x = 4$ exactement lorsque $\log_2 x = -1$.
Lorsque $-1 < \log_2 x \leq 3$, $f(x)$ est toujours égal à 4.
Lorsque $\log_2 x > 3$, $f(x) = 2\log_2 x - 2 = 4$ exactement lorsque $\log_2 x = 3$.
Donc, $f(x) = 4$ exactement lorsque $-1 \leq \log_2 x \leq 3$, ce qui est vrai exactement lorsque $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$.
(Il semble surprenant que la solution de cette équation soit en fait un intervalle de valeurs, plutôt qu'un nombre fini de valeurs spécifiques).

9. (a) S'il y a 5 personnes ou plus assises autour d'une table de 8 chaises, il y a au plus 3 chaises vides. Cependant, il doit y avoir une chaise vide entre chaque paire de personnes, ce qui n'est pas possible avec 5 personnes et 3 chaises vides.
Donc, il y a au plus 4 personnes assises.
S'il n'y avait que 2 personnes assises, il y aurait alors 6 chaises vides, ce qui signifierait qu'au moins l'un des deux « espaces » autour de la table circulaire serait composé d'au moins 3 chaises vides et donc qu'on pourrait faire asseoir une autre personne, ce qui signifierait que la table n'est pas pleine.
Donc, il y a au moins 3 personnes assises.
Cela signifie qu'une table pleine avec 8 chaises compte soit 3, soit 4 personnes.
S'il y a 4 personnes, il y a 4 chaises vides et il y a donc exactement 1 chaise vide entre chaque paire de personnes.
Donc, il y a des personnes assises dans les chaises $\{1, 3, 5, 7\}$ ou dans les chaises $\{2, 4, 6, 8\}$.
S'il y a 3 personnes, il y a 5 chaises vides.
Avec 3 personnes, il y a 3 espaces qui comptent en tout 5 chaises et chaque espace contient au plus 2 chaises.
Donc, les espaces doivent être composés de 1, 2 et 2 chaises, dans un certain ordre. Cette liste est la seule liste de trois entiers strictement positifs, chacun égal à 1 ou à 2, dont la somme est égale à 5.
L'espace composé de 1 chaise peut se trouver entre n'importe quelle paire de chaises. En d'autres termes, l'espace de 1 peut se trouver entre les chaises $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$ et ainsi de suite. Dans chaque cas, la position de la troisième personne est déterminée car les deux espaces restants sont composés de 2 chaises chacun.
Donc, s'il y a 3 personnes assises, elles pourraient être assises dans les chaises

$$\{1, 3, 6\}, \{2, 4, 7\}, \{3, 5, 8\}, \{4, 6, 1\}, \{5, 7, 2\}, \{6, 8, 3\}, \{7, 1, 4\}, \{8, 2, 5\}$$

Au total, il y a donc 10 façons d'asseoir des personnes à une table de 8 chaises :

$$\{1,3,5,7\}, \{2,4,6,8\}, \{1,3,6\}, \{2,4,7\}, \{3,5,8\}, \{4,6,1\}, \{5,7,2\}, \{6,8,3\}, \{7,1,4\}, \{8,2,5\}$$

(b) Soit k un entier strictement positif.
Supposons que t personnes soient assises à une table de $6k+5$ chaises de sorte que la table soit pleine.
Lorsque t personnes sont assises, il y a t espaces. Chaque espace est composé de 1 ou 2 chaises. (Un espace avec 3 chaises ou plus peut accueillir une personne supplémentaire, une telle table ne serait pas pleine.)
Donc, il y a entre t et $2t$ chaises vides.
Cela signifie que le nombre total de chaises est compris entre $t + t$ et $t + 2t$.
Autrement dit, $2t \leq 6k + 5 \leq 3t$.
Puisque $2t \leq 6k + 5$, alors $t \leq 3k + \frac{5}{2}$. Puisque k et t sont des entiers, alors $t \leq 3k + 2$.
On remarque qu'il est possible d'asseoir $3k+2$ personnes autour de la table dans les chaises

$$\{2, 4, 6, \dots, 6k + 2, 6k + 4\}$$

Cette table est pleine parce que $3k + 1$ des espaces sont composés d'une chaise et 1 espace est composé de 2 chaises.
Puisque $3t \geq 6k + 5$, alors $t \geq 2k + \frac{5}{3}$. Puisque k et t sont des entiers, alors $t \geq 2k + 2$.
On remarque qu'il est possible d'asseoir $2k+2$ personnes autour de la table dans les chaises

$$\{3, 6, 9, \dots, 6k, 6k + 3, 6k + 5\}$$

Cette table est pleine parce que $2k+1$ des espaces sont composés de 2 chaises et 1 espace est composé d'une chaise.
Donc, les valeurs possibles de t sont les entiers qui vérifient $2k+2 \leq t \leq 3k+2$.
Il y a donc $(3k+2)-(2k+2)+1 = k+1$ valeurs possibles de t.

(c) *Solution 1*
Pour chaque entier $n \geq 3$, soit $f(n)$ le nombre de tables pleines différentes qui sont entourées de n chaises.
On peut vérifier que

- $f(3) = 3$ car les tables pleines avec $n = 3$ ont des personnes assises dans les chaises $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$,
- $f(4) = 2$ car les tables pleines avec $n = 4$ ont des personnes assises dans les chaises $\{1{,}3\}$, $\{2{,}4\}$ et
- $f(5) = 5$ car les tables pleines avec $n = 4$ ont des personnes assises dans les chaises $\{1{,}3\}$, $\{2{,}4\}$, $\{3{,}5\}$, $\{4{,}1\}$, $\{5{,}2\}$.

D'après l'énoncé du problème, $f(6) = 5$ et dans la partie (a) on avait déterminé que $f(8) = 10$. On peut donc dresser le tableau suivant :

n	$f(n)$
3	3
4	2
5	5
6	5
7	?
8	10

D'après ces informations, on peut deviner que pour chaque entier $n \geq 6$, on a $f(n) = f(n-2) + f(n-3)$.
Par exemple, cela signifierait que $f(7) = f(5) + f(4) = 5 + 2 = 7$, dont on peut vérifier la véracité.
D'après cette relation de récurrence (que l'on doit encore démontrer), on déduit les valeurs de $f(n)$ jusqu'à $n = 19$ inclus :

n	$f(n)$
3	3
4	2
5	5
6	5
7	7
8	10
9	12
10	17

n	$f(n)$
11	22
12	29
13	39
14	51
15	68
16	90
17	119
18	158
19	209

On doit ensuite démontrer que l'équation $f(n) = f(n-2) + f(n-3)$ est vérifiée pour toute valeur de $n \geq 6$.

Considérons chaque table pleine comme étant une chaîne de 0 et 1, 1 représentant une chaise occupée et 0 une chaise vide.

Soit $a(n)$ le nombre de tables pleines avec une personne assise dans la chaise 1 (et donc la chaise 2 est vide).
Soit $b(n)$ le nombre de tables pleines avec une personne assise dans la chaise 2 (et donc la chaise 1 est vide).
Soit $c(n)$ le nombre de tables pleines dont les chaises 1 et 2 sont vides.
Puisque toute table pleine doit appartenir à l'une de ces catégories, alors $f(n) = a(n) + b(n) + c(n)$.
Une table pleine de n places $n \geq 4$ doit correspondre à une chaîne qui commence par 10, par 01 ou par 00.
Puisqu'il ne peut y avoir plus de deux 0 consécutifs, alors une table pleine avec n chaises doit correspondre à une chaîne qui commence par 1010, par 1001, par 0100, par 0101 ou par 0010. Ces derniers sont les 4 premiers caractères de la chaîne et correspondent à des chaises occupées (1) et des chaises vides (0).

Considérons les tables pleines commençant par 1010. Remarquons que ces chaînes se terminent par 0 puisque la table est circulaire. En enlevant le 10 des positions 1 et 2, on obtient des chaînes de longueur $n-2$ qui commencent par 10. Ces chaînes correspondent toujours à une table pleine et il y a donc $a(n-2)$ telles chaînes. (On remarque que toutes les chaînes possibles de longueur n commençant par 1010 mèneront à toutes les chaînes possibles de longueur $n-2$ commençant par 1010.)
Considérons les tables pleines commençant par 1001. Remarquons que ces chaînes se terminent par 0 puisque la table est circulaire. En enlevant le 100 des positions 1, 2 et 3, on obtient des chaînes de longueur $n-3$ qui commencent par 10. (Il devait y avoir un 0 dans la position 5 après le 1 dans la position 4.) Ces chaînes correspondent toujours à des tables pleines et il y a donc $a(n-3)$ telles chaînes.
Considérons les tables pleines commençant par 0100. En enlevant le 100 des positions 2, 3 et 4, on obtient des chaînes de longueur $n-3$ qui commencent par 01. (Il devait y avoir un 1 dans la position 5 après le 0 dans la position 4.) Ces chaînes correspondent toujours à des tables pleines et il y a donc $b(n-3)$ telles chaînes.
Considérons les tables pleines commençant par 0101. En enlevant le 01 des positions 3 et 4, on obtient des chaînes de longueur $n-2$ qui commencent par 01. (Le 1 dans la position 4 a dû être suivi d'un ou deux 0, donc ces chaînes conservent les propriétés souhaitées). Ces chaînes correspondent toujours à des tables pleines et il y a donc $b(n-2)$ telles chaînes.
Considérons les tables pleines commençant par 0010. Ces chaînes doivent commencer par 00100 ou par 00101.
Si les chaînes commencent par 00100, alors elles commencent par 001001. Donc, on enlève le 001 des positions 4, 5 et 6 pour obtenir obtient des chaînes de longueur $n-3$ qui commencent par 001 (et qui commencent donc par 00). Il y a $c(n-3)$ telles chaînes.
Si les chaînes commencent par 00101, on enlève le 01 des positions 4 et 5 et on obtient des chaînes de longueur $n-2$ qui commencent par 001 (et qui commencent donc par 00). Il y a $c(n-2)$ telles chaînes.
Ces 6 cas et sous-cas comprennent toutes les chaînes comprises dans $f(n)$.
Donc,

$$\begin{aligned} f(n) &= a(n-2) + a(n-3) + b(n-3) + b(n-2) + c(n-3) + c(n-2) \\ &= a(n-2) + b(n-2) + c(n-2) + a(n-3) + b(n-3) + c(n-3) \\ &= f(n-2) + f(n-3) \end{aligned}$$

Donc, il y a 209 tables pleines différentes lorsque $n = 19$.

Solution 2

En poursuivant notre approche de la partie (b), on voit que le nombre de personnes assises à une table pleine de 19 chaises est au moins $\frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$ et au plus $\frac{19}{2} = 9\frac{1}{2}$.
Puisque le nombre de personnes est un entier, il doit y avoir 7, 8 ou 9 chaises occupées, ce qui signifie qu'il y a respectivement 12, 11 ou 10 chaises vides.

Supposons qu'il y ait 9 personnes assises autour de la table et 9 espaces qui contiennent en tout 10 chaises vides.
Dans ce cas, il y a 1 espace composé de 2 chaises vides et 8 espaces composés de 1 chaise vide chacun.
Il y a 19 paires de chaises dans lesquelles on peut asseoir 2 personnes de manière qu'il y ait 2 chaises entre elles : $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$, ..., $\{19, 3\}$.
Une fois que l'on a choisi l'une de ces paires, le choix de chaise pour les 8 personnes restantes est complètement déterminé par le fait d'asseoir ces personnes dans une chaise sur deux, en procédant autour de la table.
Donc, il y a 19 tables pleines différentes avec 9 personnes.

Supposons qu'il y ait 8 personnes assises autour de la table et 8 espaces qui contiennent en tout 11 chaises vides.
Dans ce cas, il y a 3 espaces composés de 2 chaises vides chacun et 5 espaces composés de 1 chaise vide chacun.
Il existe 7 permutations circulaires différentes dans lesquels on peut disposer ces 8 espaces :

22211111 22121111 22112111 22111211 22111121 21212111 21211211

Remarquons qu'une configuration "22211111" est identique à, par exemple, une configuration "11222111", puisque ces espaces sont disposés autour d'un cercle.
Si les trois espaces de longueur 2 sont consécutifs, il n'y a qu'une seule configuration (22211111).
S'il y a exactement 2 espaces consécutifs de longueur 2, il y a 4 endroits dans lesquels on peut placer le troisième espace de longueur 2.
S'il n'y a pas d'espaces consécutifs de longueur 2, ces espaces peuvent être séparés par 1 espace chacun (21212111) avec 3 espaces au bout ou peuvent être séparés par 1 espace, 2 espaces et 2 espaces (21211211). Pour le dernier cas, il n'existe qu'une seule configuration pour les espaces.
Il existe 7 permutations circulaires différentes dans lesquels on peut disposer ces 8 espaces.
On peut placer chacun de ces 7 permutations différentes autour du cercle de 19 chaises de 19 façons différentes, car chacune des permutations peut commencer à 19 endroits différents.
De plus, puisque 19 est un nombre premier, aucunes deux permutations ne se chevauchent.
Donc, il y a $7 \cdot 19 = 133$ tables pleines différentes avec 8 personnes.

Supposons qu'il y ait 7 personnes et 7 espaces qui contiennent en tout 12 chaises vides.
Dans ce cas, il y a 2 espaces composés de 1 chaise vide chacun et 5 espaces composés de 2 chaises vides chacun.
Les 2 espaces composés de 1 chaise vide chacun peuvent être séparés par 0 espace de 2 chaises vides, 1 espace de 2 chaises vides ou 2 espaces de 2 chaises vides. Comme les chaises sont disposées autour d'un cercle, s'il y avait 3, 4 ou 5 espaces avec 2 chaises vides entre eux, il y aurait 2, 1 ou 0 espaces allant dans l'autre sens autour du cercle.
Cela signifie qu'il existe 3 configurations différentes pour les espaces.
Chacune de ces configurations peut être placée de 19 façons différentes autour du cercle de chaises.

Donc, il y a $3 \cdot 19 = 57$ tables pleines lorsque 7 chaises sont occupées.

Donc, le nombre de tables pleines différentes, chacune étant entourée de 19 chaises, est égal à $19 + 133 + 57 = 209$.

Solution 3
Comme dans la solution 2, il doit y avoir 7, 8 ou 9 personnes assises, il y a donc 7, 8 ou 9 espaces.
S'il y a 7 espaces, il y a 2 espaces de 1 chaise chacun et 5 espaces de 2 chaises chacun.
S'il y a 8 espaces, il y a 5 espaces de 1 chaise chacun et 3 espaces de 2 chaises chacun.
S'il y a 9 espaces, il y a 8 espaces de 1 chaise chacun et 1 espace de 2 chaises.
On considère trois cas mutuellement exclusifs : (i) la chaise 1 est occupée et la chaise 2 est vide (ii) la chaise 2 est occupée et la chaise 1 est vide et (iii) les chaises 1 et 2 sont toutes deux vides. Chaque table pleine correspond exactement à l'un de ces trois cas.

<u>1^{er} cas : la chaise 1 est occupée et la chaise 2 est vide</u>
On utilise la personne assise dans la chaise 1 pour « ancrer » la configuration, en commençant par la chaise 1 et en plaçant les espaces (et donc les chaises occupées) dans le sens des aiguilles d'une montre autour de la table à partir de la chaise 1.
S'il y a 7 espaces, il faut que 2 d'entre eux soient de longueur 1, il y a donc $\binom{7}{2}$ façons de disposer les espaces en commençant par la chaise 1.
S'il y a 8 espaces, il faut que 3 d'entre eux soient de longueur 2, il y a donc $\binom{8}{3}$ façons de disposer les espaces en commençant par la chaise 1.
S'il y a 9 espaces, il faut que l'une d'entre elles soit de longueur 2, il y a donc $\binom{9}{1}$ façons de disposer les espaces en commençant par la chaise 1.
Dans ce cas, il y a $\binom{7}{2} + \binom{8}{3} + \binom{9}{1} = 21 + 56 + 9 = 86$ tables pleines en tout.

<u>2^e cas : la chaise 2 est occupée et la chaise 1 est vide</u>
On utilise le même raisonnement, en se servant de la personne assise dans la chaise 2 comme « ancre ».
Il y a encore 86 tables pleines dans ce cas.

<u>3^e cas : les chaises 1 et 2 sont toutes deux vides</u>
Puisque les chaises 1 et 2 sont toutes deux vides, les chaises 3 et 19 doivent être toutes deux occupées. On a donc un vide de 2 chaises.
Dans ce cas, on utilise la personne assise dans la chaise 3 comme ancre.
S'il y a 7 espaces, il reste à placer 2 espaces de 1 chaise chacun et 4 espaces de 2 chaises chacun, ce que l'on peut faire de 62 façons.
S'il y a 8 espaces, il reste à placer 5 espaces de 1 chaise chacun et 2 espaces de 2 chaises chacun, ce que l'on peut faire de 72 façons.
S'il y a 9 espaces, il reste à placer 8 espaces de 1 chaise chacun et 0 espace de 2 chaises, ce que l'on peut faire de 1 façon.
Dans ce cas, il y a $\binom{6}{2} + \binom{7}{2} + 1 = 15 + 21 + 1 = 37$ tables pleines en tout.

Donc, le nombre de tables pleines différentes, chacune étant entourée de 19 chaises, est égal à $86 + 86 + 37 = 209$.

10. (a) Puisque $0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$, alors $\left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor = 0$.

Puisque $1 \leq \frac{3}{3} < \frac{4}{3} < \frac{5}{3} < 2$, alors $\left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor = 1$.

On peut continuer à regrouper ces fractions en groupes de 3, le dernier groupe de 3 vérifiant $19 \leq \frac{57}{3} < \frac{58}{3} < \frac{59}{3} < 20$, ce qui signifie que $\left\lfloor \frac{57}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{58}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{59}{3} \right\rfloor = 19$.

Le dernier terme est $\left\lfloor \frac{60}{3} \right\rfloor = \lfloor 20 \rfloor = 20$.

Si la somme donnée est S, on obtient

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \cdots + 3 \cdot 19 + 1 \cdot 20 \\ &= 0 + 3(1 + 2 + \cdot + 19) + 20 \\ &= 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 19 \cdot 20 + 20 \\ &= 570 + 20 \\ &= 590 \end{aligned}$$

(b) Pour tout entier strictement positif $m > 4$, soit

$$q(m) = \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{m-2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m-1}{3} \right\rfloor$$

En poursuivant notre travail de la partie (a), on sait que

$$k - 1 \leq \frac{3k-3}{3} < \frac{3k-2}{3} < \frac{3k-1}{3} < k$$

k étant un entier strictement positif quelconque.

Donc, $\left\lfloor \frac{3k-3}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3k-2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3k-1}{3} \right\rfloor = k - 1$.

Chaque entier strictement positif $m > 4$ peut s'écrire $m = 3s$ ou $m = 3s+1$ ou $m = 3s+2$, s étant un entier strictement positif, selon son reste lorsqu'il est divisé par 3.

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
q(3s) &= \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{3s-2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3s-1}{3} \right\rfloor \\
&= 2 \cdot 0 + 3(1+2+3+\cdots+(s-1)) \\
&= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (s-1)s \\
&= \frac{3s(s-1)}{2} \\
&= \frac{3s(3s-3)}{6} \\
q(3s+1) &= \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{3s-2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3s-1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3s}{3} \right\rfloor \\
&= q(3s) + s \\
&= \frac{3s(3s-3)}{6} + \frac{3s \cdot 2}{6} \\
&= \frac{3s(3s-1)}{6} \\
q(3s+2) &= q(3s+1) + \left\lfloor \frac{3s+1}{3} \right\rfloor \\
&= \frac{3s(3s-1)}{6} + s \\
&= \frac{3s(3s-1)}{6} + \frac{3s \cdot 2}{6} \\
&= \frac{3s(3s+1)}{6}
\end{aligned}$$

On veut trouver un polynôme $p(x)$ tel que $q(m) = \lfloor p(m) \rfloor$ pour tout entier strictement positif $m > 4$.
Autrement dit, on veut trouver un polynome $p(x)$ tel que

$$\lfloor p(3s) \rfloor = \frac{3s(3s-3)}{6} \qquad \lfloor p(3s+1) \rfloor = \frac{3s(3s-1)}{6} \qquad \lfloor p(3s+2) \rfloor = \frac{3s(3s+1)}{6}$$

pour tout entier strictement positif s.
On va montrer que le polynôme $p(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{6}$ répond aux conditions données.
Si $x = 3s+1$, s étant un entier strictement positif, alors

$$\frac{(x-1)(x-2)}{6} = \frac{(3s+1-1)(3s+1-2)}{6} = \frac{3s(3s-1)}{6}$$

On remarque que $3s$ est un multiple de 3. Puisque $3s$ et $3s-1$ sont des entiers consécutifs, alors l'un d'eux est un multiple de 2. Donc, $3s(3s-1)$ est un multiple de 6, d'où $\dfrac{3s(3s-1)}{6}$ est donc un entier.
Cela signifie que $\left\lfloor \dfrac{3s(3s-1)}{6} \right\rfloor = \dfrac{3s(3s-1)}{6}$.
Donc, $q(3s+1) = \dfrac{3s(3s-1)}{6} = \left\lfloor \dfrac{3s(3s-1)}{6} \right\rfloor = \lfloor p(3s+1) \rfloor$.

Si $x = 3s + 2$, s étant un entier strictement positif, alors

$$\frac{(x-1)(x-2)}{6} = \frac{(3s+2-1)(3s+2-2)}{6} = \frac{3s(3s+1)}{6}$$

On remarque que $3s$ est un multiple de 3. Puisque $3s$ et $3s+1$ sont des entiers consécutifs, alors l'un d'eux est un multiple de 2. Donc, $3s(3s+1)$ est un multiple de 6, d'où $\dfrac{3s(3s+1)}{6}$ est donc un entier.

Cela signifie que $\left\lfloor \dfrac{3s(3s+1)}{6} \right\rfloor = \dfrac{3s(3s+1)}{6}$.

Donc, $q(3s+2) = \dfrac{3s(3s+1)}{6} = \left\lfloor \dfrac{3s(3s+1)}{6} \right\rfloor = \lfloor p(3s+2) \rfloor$.

Si $x = 3s$, s étant un entier strictement positif, alors

$$\frac{(x-1)(x-2)}{6} = \frac{(3s-1)(3s-2)}{6} = \frac{9s^2-9s+2}{6}$$

$\dfrac{9s^2-9s}{6} = \dfrac{9s(s-1)}{6}$ est un entier car $9s$ est un multiple de 3 et l'un de s et $s-1$ est pair.

Puisque $\dfrac{9s^2-9s+2}{6} = \dfrac{9s^2-9s}{6} + \dfrac{1}{3}$, alors $\dfrac{9s^2-9s+2}{6}$ est $\dfrac{1}{3}$ de plus qu'un entier, ce qui signifie que $\left\lfloor \dfrac{9s^2-9s+2}{6} \right\rfloor = \dfrac{9s^2-9s}{6} = \dfrac{3s(3s-3)}{6} = q(3s)$.

Donc, $q(3s) = \dfrac{3s(3s-3)}{6} = \left\lfloor \dfrac{(3s-1)(3s-2)}{6} \right\rfloor = \lfloor p(3s) \rfloor$.

Cela signifie que le polynôme $p(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{6}$ répond aux conditions données.

(c) Avant d'entreprendre la résolution du problème, on simplifie l'expression donnée pour $f(n)$ en remarquant que si $k \geq n$, alors $kn \leq k^2 < k^2+1$.

Cela signifie que si $k \geq n$, on a $0 < \dfrac{kn}{n^2+1} < 1$, d'où $\left\lfloor \dfrac{kn}{k^2+1} \right\rfloor = 0$.

Cela signifie qu'étant donné une valeur particulière strictement positive de n, la somme infinie qui représente $f(n)$ peut s'arrêter lorsque $k = n-1$, car chaque terme suivant est égal à 0.

Donc,

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{1^2+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{2^2+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3n}{3^2+1} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(n-2)n}{(n-2)^2+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(n-1)n}{(n-1)^2+1} \right\rfloor$$

On remarque que

$$f(1) = 0 \qquad \text{(puisqu'il n'y a pas de termes non nuls)}$$

$$f(2) = \left\lfloor \frac{1\cdot 2}{1^2+1} \right\rfloor = 1$$

$$f(3) = \left\lfloor \frac{1\cdot 3}{1^2+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2\cdot 3}{2^2+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{5} \right\rfloor = 1+1 = 2$$

$$f(4) = \left\lfloor \frac{1\cdot 4}{1^2+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2\cdot 4}{2^2+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3\cdot 4}{3^2+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{12}{10} \right\rfloor = 2+1+1 = 4$$

Supposons que t soit un entier strictement positif impair tel que $f(t+1) - f(t) = 2$.
On va supposer que t n'est pas un nombre premier et montrer que $f(t+1) - f(t) \neq 2$.
Cela démontrera que si $f(t+1) - f(t) = 2$, alors t doit être un nombre premier. Puisque t est impair et n'est pas un nombre premier, alors $t = 1$ ou t est un nombre composé.
On remarque que lorsque $t = 1$, on obtient $f(2) - f(1) = 1 - 0 = 1 \neq 2$.
Ensuite, supposons que t soit un nombre impair composé.
Puisque t est un nombre impair composé, alors t peut être s'écrire sous la forme $t = rs$, r étant des entiers strictement positifs impairs tels que $r \geq s > 1$. (On peut écrire t sous cette forme d'au moins une façon, on prend donc l'une de ces possibilités.)
Dans ce cas, considérons $f(t+1) - f(t)$.
On peut écrire cela sous la forme

$$\begin{aligned} f(t+1) - f(t) \quad = \quad & \left\lfloor \frac{t+1}{1^2+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2(t+1)}{2^2+1} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)^2+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{t(t+1)}{t^2+1} \right\rfloor \\ & - \left\lfloor \frac{t}{1^2+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2t}{2^2+1} \right\rfloor - \cdots - \left\lfloor \frac{(t-1)t}{(t-1)^2+1} \right\rfloor \end{aligned}$$

On récrit cela sous la forme

$$\begin{aligned} f(t+1) - f(t) = & \left(\left\lfloor \frac{t+1}{1^2+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{t}{1^2+1} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{2(t+1)}{2^2+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2t}{2^2+1} \right\rfloor \right) + \cdots \\ & + \left(\left\lfloor \frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)^2+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(t-1)t}{(t-1)^2+1} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{t(t+1)}{t^2+1} \right\rfloor \end{aligned}$$

Dans les $t-1$ ensembles de parenthèses, on a des termes de la forme $\left\lfloor \frac{k(t+1)}{k^2+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{kt}{k^2+1} \right\rfloor$ pour chaque entier k de 1 à $t-1$.
On sait que $\frac{k(t+1)}{k^2+1} > \frac{kt}{k^2+1}$ car k et t sont tous deux positifs, les dénominateurs sont égaux et $k(t+1) > kt$.
Donc, $\left\lfloor \frac{k(t+1)}{k^2+1} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{kt}{k^2+1} \right\rfloor$. (Le plus grand entier inférieur ou égal à la première fraction doit être au moins aussi grand que le plus grand entier inférieur ou égal à la seconde fraction.)
Cela signifie que les $t-1$ différences entre parenthèses, dont chacune est un entier, sont au moins 0.
Pour montrer que $f(t+1) - f(t) \neq 2$, il faut montrer qu'il y a au moins 2 endroits où la différence est d'au moins 1 et le terme final est d'au moins 1. Cela nous dira que $f(t+1) - f(t) \geq 3$ et donc que $f(t+1) - f(t) \neq 2$, ce qui nous dira à son tour que t ne peut être un nombre composé et donc que t doit être un nombre premier, comme souhaité.

Considérons $\left\lfloor \frac{t(t+1)}{t^2+1} \right\rfloor$.

Puisque $t(t+1) = t^2 + t > t^2 + 1$, alors $\frac{t(t+1)}{t^2+1} > 1$, ce qui signifie que $\left\lfloor \frac{t(t+1)}{t^2+1} \right\rfloor \geq 1$.

Considérons $\left\lfloor \frac{t+1}{1^2+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{t}{1^2+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{t+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$.

Puisque t est impair, alors on écrit $t = 2u + 1$, u étant un entier strictement positif, d'où on a donc

$$\left\lfloor \frac{t+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2u+2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2u+1}{2} \right\rfloor = \lfloor u+1 \rfloor - \left\lfloor u + \frac{1}{2} \right\rfloor = (u+1) - u = 1$$

Rappelons que $t = rs$ avec $r \geq s > 1$.

Considérons le terme $\left\lfloor \frac{r(t+1)}{r^2+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{rt}{r^2+1} \right\rfloor$.

On a

$$\left\lfloor \frac{r(t+1)}{r^2+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{rt}{r^2+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r(rs+1)}{r^2+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r \cdot rs}{r^2+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r^2s+r}{r^2+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r^2s}{r^2+1} \right\rfloor$$

On remarque que $\dfrac{r^2s+r}{r^2+1} \geq \dfrac{r^2s+s}{r^2+1} = s$ et $\dfrac{r^2s}{r^2+1} < \dfrac{r^2s+s}{r^2+1} = s$.

Donc, $\left\lfloor \dfrac{r^2s+r}{r^2+1} \right\rfloor \geq s$.

De plus, $\left\lfloor \dfrac{r^2s}{r^2+1} \right\rfloor < s$, ce qui signifie que $\left\lfloor \dfrac{r^2s}{r^2+1} \right\rfloor \leq s-1$, d'où $\left\lfloor \dfrac{r(t+1)}{r^2+1} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{rt}{r^2+1} \right\rfloor \geq 1$.

Donc, si t est impair et n'est pas un nombre premier, alors $f(t+1) - f(t) \neq 2$ parce que l'on a trouvé trois termes qui sont égaux à au moins 1, ce qui signifie que $f(t+1) - f(t) \geq 3$. Donc, si $f(t+1) - f(t)$, alors t doit être un nombre premier.

Voici une autre approche pour montrer que $f(t+1) - f(t) \geq 3$ lorsque t est un nombre impair composé.

Comme dans notre travail ci-dessus, on cherche au moins 3 entiers k qui vérifient $\left\lfloor \dfrac{k(t+1)}{k^2+1} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{kt}{k^2+1} \right\rfloor \geq 1$. Dans ce cas, on tient compte de la possibilité que $k = t$, sachant que le deuxième terme de cette différence sera 0.

L'entier strictement positif k est tel que $\left\lfloor \dfrac{k(t+1)}{k^2+1} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{kt}{k^2+1} \right\rfloor \geq 1$ exactement lorsqu'il existe un entier N qui vérifie $\dfrac{k(t+1)}{k^2+1} \geq N > \dfrac{kt}{k^2+1}$.

Cette paire d'inéquations est équivalente à la paire d'inéquations $t+1 \geq N \cdot \dfrac{k^2+1}{k} > t$ qui est à son tour équivalente à $t+1 \geq Nk + \dfrac{N}{k} > t$.

Les trois paires d'entiers (N, k) suivantes vérifient cette équation :

- $k = 1$ et $N = \dfrac{t+1}{2}$ (en remarquant que t est impair), ce qui donne $Nk + \dfrac{N}{k} = t+1$;
- $k = r$ et $N = s$, ce qui donne $Nk + \dfrac{N}{k} = rs + \dfrac{s}{r}$ (en remarquant que $\dfrac{s}{r} < 1$) ;
- $k = t$ et $N = 1$, ce qui donne $Nk + \dfrac{N}{k} = t + \dfrac{1}{t}$.

Donc, cela démontre que $f(t+1) - f(t) \geq 3$ lorsque t est un nombre impair composé.