Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur 2020

le mercredi 18 novembre 2020
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 19 novembre 2020
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. Marc et Catherine ont $9 + 5 = 14$ bonbons entre eux.
   Lorsque Marc et Catherine reçoivent les 10 bonbons de Sanjiv, ils ont maintenant $14+10 = 24$ bonbons en tout.
   Puisque Marc et Catherine finissent par avoir le même nombre de bonbons, ils ont donc chacun $\frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ bonbons.

   Réponse : 12

2. Supposons que le carré a des côtés de longueur $2x$ cm.
   Chacun des deux rectangles a donc une largeur de $2x$ cm et une hauteur de x cm.
   En fonction de x, chacun des rectangles a un périmètre de $2(2x \text{ cm}) + 2(x \text{ cm})$, ce qui est égal à $6x$ cm.
   Puisque chacun des rectangles a un périmètre de 24 cm, alors $6x = 24$, d'où $x = 4$.
   Puisque le carré a des côtés de longueur $2x$ cm, alors ce dernier est de dimensions $8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ et a donc une aire de 64 cm^2.

   Réponse : 64 cm^2

3. *Solution 1*
   Puisque a, b, c, d et e sont des entiers strictement positifs où $a < b < c < d < e$, on a donc $b = a + 1$, $c = a + 2$, $d = a + 3$ et $e = a + 4$.
   On utilise $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2$ pour développer les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 &= (a+3)^2 + (a+4)^2 \\ a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 &= a^2 + 6a + 9 + a^2 + 8a + 16 \\ a^2 - 8a - 20 &= 0 \\ (a-10)(a+2) &= 0 \end{aligned}$$

   Puisque a est positif, alors $a = 10$.
   (On peut vérifier : $10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$ et $13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$.)

   Solution 2
   Puisque a, b, c, d et e sont des entiers strictement positifs où $a < b < c < d < e$, on a donc $b = c - 1$, $a = c - 2$, $d = c + 1$ et $e = c + 2$.
   On utilise $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2$ pour développer les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} (c-2)^2 + (c-1)^2 + c^2 &= (c+1)^2 + (c+2)^2 \\ c^2 - 4c + 4 + c^2 - 2c + 1 + c^2 &= c^2 + 2c + 1 + c^2 + 4c + 4 \\ c^2 - 12c &= 0 \\ c(c-12) &= 0 \end{aligned}$$

   Puisque c est un entier strictement positif, alors $c = 12$, d'où $a = c - 2 = 10$.
   (On peut vérifier : $10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$ et $13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$.)

   Réponse : $a = 10$

4. Remarquons que $\pi \approx 3{,}14159$ d'où on a donc $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.
   Donc, $\pi + 0{,}85$ vérifie $3.99 < \pi + 0{,}85 < 4{,}00$ et $\pi + 0{,}86$ vérifie $4{,}00 < \pi + 0{,}86 < 4{,}01$.
   On a donc

$$3 < \pi < \pi + 0{,}01 < \pi + 0{,}02 < \cdots < \pi + 0{,}85 < 4 < \pi + 0{,}86 < \pi + 0{,}87 < \cdots < \pi + 0{,}99 < 5$$

De plus, $\lfloor \pi + 0{,}85 \rfloor = 3$ puisque $\pi + 0{,}85$ est entre 3 et 4. De même, $\lfloor \pi + 0{,}86 \rfloor = 4$ puisque $\pi + 0{,}86$ est entre 4 et 5.
Ensuite, on récrit

$$S = \lfloor \pi \rfloor + \lfloor \pi + \tfrac{1}{100} \rfloor + \lfloor \pi + \tfrac{2}{100} \rfloor + \lfloor \pi + \tfrac{3}{100} \rfloor + \cdots + \lfloor \pi + \tfrac{99}{100} \rfloor$$

sous la forme

$$\begin{aligned} S = {} & \lfloor \pi + 0{,}00 \rfloor + \lfloor \pi + 0{,}01 \rfloor + \lfloor \pi + 0{,}02 \rfloor + \lfloor \pi + 0{,}03 \rfloor + \cdots + \lfloor \pi + 0{,}84 \rfloor + \lfloor \pi + 0{,}85 \rfloor \\ & + \lfloor \pi + 0{,}86 \rfloor + \lfloor \pi + 0{,}87 \rfloor + \cdots + \lfloor \pi + 0{,}99 \rfloor \end{aligned}$$

Chacun des termes $\lfloor \pi + 0{,}00 \rfloor$; $\lfloor \pi + 0{,}01 \rfloor$; $\lfloor \pi + 0{,}02 \rfloor$; $\lfloor \pi + 0{,}03 \rfloor$; $\cdots$; $\lfloor \pi + 0{,}84 \rfloor$; $\lfloor \pi + 0{,}85 \rfloor$ est égal à 3, puisque $\pi + 0{,}00$; $\pi + 0{,}01$; $\ldots$; $\pi + 0{,}85$ sont chacun supérieurs à 3 et inférieurs à 4.
Chacun des termes $\lfloor \pi + 0{,}86 \rfloor$; $\lfloor \pi + 0{,}87 \rfloor$; $\cdots$; $\lfloor \pi + 0{,}99 \rfloor$ est égal à 4, puisque $\pi + 0{,}86$; $\pi + 0{,}87$; $\ldots$; $\pi + 0{,}99$ sont chacun supérieurs à 4 et inférieurs à 5.
Il y a 86 termes dans la première liste et 14 termes dans la seconde liste.
Donc, $S = 86 \cdot 3 + 14 \cdot 4 = 86 \cdot 3 + 14 \cdot 3 + 14 = 100 \cdot 3 + 14 = 314$.

Réponse : $S = 314$

5. En élevant au carré les deux équations données, on obtient :

$$\begin{aligned} (3 \sin x + 4 \cos y)^2 &= 5^2 \\ (4 \sin y + 3 \cos x)^2 &= 2^2 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 9 \sin^2 x + 24 \sin x \cos y + 16 \cos^2 y &= 25 \\ 16 \sin^2 y + 24 \sin y \cos x + 9 \cos^2 x &= 4 \end{aligned}$$

On additionne les deux équations que l'on récrit sous la forme :

$$9 \sin^2 x + 9 \cos^2 x + 16 \sin^2 y + 16 \cos^2 y + 24 \sin x \cos y + 24 \cos x \sin y = 29$$

Puisque $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ pour tout angle θ, alors

$$9 + 16 + 24(\sin x \cos y + \cos x \sin y) = 29$$

d'où on obtient

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \tfrac{4}{24}$$

On a donc $\sin(x + y) = \frac{1}{6}$ (résultat que l'on obtient à l'aide du renseignement utile de la partie A).
(Il est possible d'isoler $\sin x$, $\cos x$, $\sin y$ et $\cos y$. Pouvez-vous identifier une approche qui vous permettrait de le faire ?)

Réponse : $\frac{1}{6}$

6. D'après la deuxième propriété, on obtient $f(0) = \frac{1}{2}f(0)$ lorsque $x = 0$, d'où on a $2f(0) = f(0)$ ou $f(0) = 0$.

   D'après la première propriété, on obtient $f(1) = 1 - f(0) = 1 - 0 = 1$ lorsque $x = 0$.

   D'après la première propriété, on obtient $f(\frac{1}{2}) = 1 - f(\frac{1}{2})$ lorsque $x = \frac{1}{2}$, d'où $2f(\frac{1}{2}) = 1$ ou $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

   D'après la deuxième propriété, on obtient $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}f(1) = \frac{1}{2}$ lorsque $x = 1$.

   On remarque ensuite que $\frac{3}{7} \approx 0{,}43$.

   Puisque $\frac{3}{7} \leq \frac{1}{2}$, alors $f(\frac{3}{7}) \leq f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ d'après la troisième propriété.

   Puisque $\frac{3}{7} \geq \frac{1}{3}$, alors $f(\frac{3}{7}) \geq f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$ d'après la troisième propriété.

   Puisque $\frac{1}{2} \leq f(\frac{3}{7}) \leq \frac{1}{2}$, alors $f(\frac{3}{7}) = \frac{1}{2}$.

   D'après la deuxième propriété, on obtient $f(\frac{1}{7}) = \frac{1}{2}f(\frac{3}{7}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ lorsque $x = \frac{3}{7}$.

   D'après la première propriété, on obtient $f(\frac{6}{7}) = 1 - f(\frac{1}{7}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ lorsque $x = \frac{1}{7}$.

   Voici deux commentaires supplémentaires sur ce problème et sa solution :

   (i) Bien que la solution ne contienne pas beaucoup d'étapes, il n'est pas facile de trouver les meilleures étapes dans le meilleur ordre pour bien résoudre ce problème.

   (ii) Il existe en effet au moins une fonction, que l'on appelle l'escalier de Cantor, qui satisfait aux propriétés énoncées. Cette fonction est ni facile à écrire ni nécessaire pour répondre à la question. Pour ceux qui souhaitent en savoir plus, vous pouvez étudier les développements ternaires (ou triadiques) et binaires (ou dyadiques) de nombres réels entre 0 et 1. Vous pouvez également étudier un ensemble surnommé « l'ensemble de Cantor ».

   Réponse : $f(\frac{6}{7}) = \frac{3}{4}$

Partie B

1. (a) Pour déterminer le point d'intersection, on égalise les deux expressions représentant chacune y pour obtenir :

$$\begin{aligned} 4x - 32 &= -6x + 8 \\ 10x &= 40 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Lorsque $x = 4$, d'après l'équation $y = 4x - 32$ on obtient $y = 4 \cdot 4 - 32 = -16$.
Donc, le point d'intersection des deux droites a pour coordonnées $(4, -16)$.

(b) Pour déterminer le point d'intersection, on égalise les deux expressions représentant chacune y pour obtenir :

$$\begin{aligned} -x + 3 &= 2x - 3a^2 \\ 3 + 3a^2 &= 3x \\ x &= 1 + a^2 \end{aligned}$$

Lorsque $x = 1 + a^2$, d'après l'équation $y = -x + 3$ on obtient $y = -(1 + a^2) + 3 = 2 - a^2$.
Donc, le point d'intersection des deux droites a pour coordonnées $(1 + a^2, 2 - a^2)$.

(c) Puisque c est un entier, alors $-c^2$ est un entier qui est inférieur ou égal à 0.
Les deux droites ont pour pentes $-c^2$ et 1. Puisque $-c^2 \leq 0$, ces pentes sont donc différentes.
On comprend donc que ces droites ne sont pas parallèles et qu'elles doivent inévitablement se couper en un point.
Pour déterminer le point d'intersection, on égalise les deux expressions représentant chacune y pour obtenir :

$$\begin{aligned} -c^2x + 3 &= x - 3c^2 \\ 3 + 3c^2 &= x + c^2x \\ 3 + 3c^2 &= x(1 + c^2) \end{aligned}$$

Puisque $c^2 \geq 0$, alors $1 + c^2 \geq 1$. Cela signifie qu'on peut diviser les deux membres de l'équation par $1 + c^2$ pour obtenir $x = \dfrac{3 + 3c^2}{1 + c^2} = 3$.
Cela signifie en particulier que l'abscisse du point d'intersection est un entier.
Lorsque $x = 3$, d'après l'équation $y = -c^2x + 3$ on obtient $y = -c^2 \cdot 3 + 3 = 3 - 3c^2$.
Puisque c est un entier, alors $y = 3 - 3c^2$ est un entier.
Donc, les droites ont un point d'intersection dont les coordonnées sont des entiers.

(d) Pour déterminer le point d'intersection en fonction de d, on égalise les deux expressions représentant chacune y pour obtenir :

$$\begin{aligned} dx + 4 &= 2dx + 2 \\ 2 &= dx \end{aligned}$$

Afin que x soit un entier, il faut que $d \neq 0$ et que $\dfrac{2}{d}$ soit un entier.
Puisque d est lui-même un entier, alors d est un diviseur de 2. Cela signifie que d peut être égal aux nombres suivants : $1, -1, 2, -2$.
Il reste encore à confirmer que l'ordonnée est également un entier pour chacune de ces valeurs de d.

Lorsque $x = \dfrac{2}{d}$, d'après l'équation $y = dx + 4$ on obtient $y = d \cdot \left(\dfrac{2}{d}\right) + 4 = 2 + 4 = 6$.

Donc, lorsque $d = 1, -1, 2, -2$, les droites ont un point d'intersection dont les coordonnées sont des entiers.

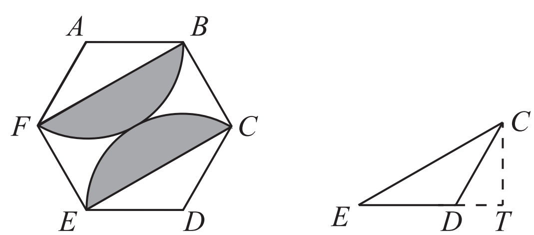
On peut vérifier cela pour chacun des cas :

- $d = 1$: Les droites d'équations $y = x + 4$ et $y = 2x + 2$ ont un point d'intersection dont les coordonnées sont $(2, 6)$.
- $d = -1$: Les droites d'équations $y = -x + 4$ et $y = -2x + 2$ ont un point d'intersection dont les coordonnées sont $(-2, 6)$.
- $d = 2$: Les droites d'équations $y = 2x + 4$ and $y = 4x + 2$ ont un point d'intersection dont les coordonnées sont $(1, 6)$.
- $d = -2$: Les droites d'équations $y = -2x + 4$ and $y = -4x + 2$ ont un point d'intersection dont les coordonnées sont $(-1, 6)$.

2. (a) Chacun des angles intérieurs d'un hexagone régulier a une mesure de $120°$. (On peut vérifier cela en tenant compte du fait que la somme des angles intérieurs d'un polygone ayant n côtés est égale à $(n-2) \cdot 180°$. Lorsque $n = 6$, cette somme est égale à $4 \cdot 180° = 720°$. Dans un hexagone régulier, chacun de ces angles intérieurs a donc une mesure de $\frac{1}{6} \cdot 720° = 120°$.)

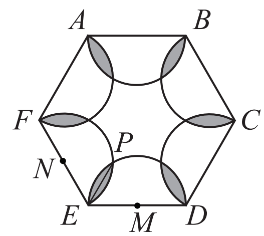
Puisque $120°$ est égal au tiers de $360°$, alors l'aire de la région ombrée est égale au tiers de l'aire d'un cercle complet de rayon 6.
Donc, la région ombrée a une aire de $\frac{1}{3} \cdot \pi(6^2) = 12\pi$.

(b) Pour déterminer l'aire de la région bornée par l'arc tracé de C à E et le segment de droite CE, on soustrait l'aire du triangle CDE de l'aire de la région ombrée obtenue en (a).
Le triangle CDE a $DE = DC = 6$ et $\angle CDE = 120°$.
On peut déterminer l'aire de ce triangle de plusieurs façons.
Une telle façon serait de considérer ED comme étant la base de ce triangle et de tracer un segment de droite de C jusqu'au prolongement de ED de manière à couper ce dernier en point T. Ce segment de droite représente donc la hauteur du triangle.

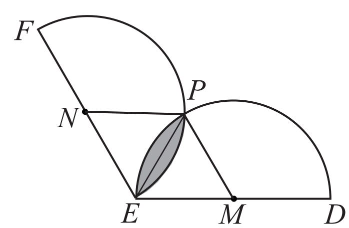


Puisque $\angle CDE = 120°$, alors $\angle CDT = 180° - \angle CDE = 60°$.
Cela signifie que le triangle CDT est un triangle remarquable 30°-60°-90°, on a donc $CT = \frac{\sqrt{3}}{2} CD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$.
Cela signifie que le triangle CDE a une aire de $\frac{1}{2} \cdot ED \cdot CT = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.
Donc, la région bornée par l'arc tracé de C à E et le segment de droite CE a une aire de $12\pi - 9\sqrt{3}$.
De plus, la région bornée par l'arc tracé de B à F et le segment de droite BF a également une aire de $12\pi - 9\sqrt{3}$ puisque cette région est construite de la même manière.
Donc, les régions ombrées ont une aire totale de $2(12\pi - 9\sqrt{3}) = 24\pi - 18\sqrt{3}$.

(c) Soit M le milieu de DE et N le milieu de EF.
Cela signifie que M et N sont les centres de deux des demi-cercles.
Soit P le point autre que E où se coupent les demi-cercles de centres M et N.
On joint E et P.



Par symétrie, EP coupe la région ombrée entre ces deux demi-cercles en deux régions de même aire.
Soit a l'aire d'une de ces régions.
De plus, par symétrie dans l'hexagone entier, les six régions ombrées situées entre deux demi-cercles sont toutes de même aire.
Cela signifie que l'aire totale des régions ombrées est égale à $12a$.
Il faut donc déterminer la valeur de a.
Considérons la région bornée par l'arc de centre M passant aux points E et P et le segment EP.



Puisque $DE = EF = 6$, alors $DM = ME = EN = NF = 3$. Chacun des deux demi-cercles est de rayon 6.
Puisque le point P est situé sur les deux demi-cercles, alors $NP = MP = 3$.
Considérons le triangle EMP. Ce dernier a $ME = MP = 3$.
De plus, $\angle MEP = 60^\circ$ puisque $\angle DEF = 120^\circ$ et que $\angle MEP = \angle NEP$ par symétrie.
Puisque $ME = MP$, alors $\angle MPE = \angle MEP = 60^\circ$.
Puisque le triangle EMP a deux angles mesurant chacun 60°, son troisième angle mesure donc 60°, d'où le triangle EMP est donc un triangle équilatéral.
Donc, $PE = 3$ et $\angle EMP = 60^\circ$.
On peut donc calculer l'aire a.
L'aire a est égale à l'aire du secteur de cercle de centre M défini par E et P moins l'aire du triangle EMP.
Puisque $\angle EMP = 60^\circ$, ce qui est $\frac{1}{6}$ d'un cercle complet, et que le secteur provient d'un cercle de rayon 3, alors l'aire du secteur est égale à $\frac{1}{6} \cdot \pi(3^2) = \frac{3}{2}\pi$.
Puisque le triangle EMP est équilatéral et qu'il a des côtés de longueur 3, on peut déterminer son aire de plusieurs manières différentes.
Une telle manière serait d'utiliser la formule $\frac{1}{2}xy\sin\theta$ qui représente l'aire d'un triangle ayant des côtés de longueurs x et y et un angle de θ entre ces derniers.
Donc, le triangle EMP a une aire de $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.
Cela signifie que $a = \frac{3}{2}\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4}$.
Finalement, l'aire totale des régions ombrées est égale à $12a$, soit $12\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4}\right)$ ou $18\pi - 27\sqrt{3}$.

3. (a) Lorsque $p = 33$ et $q = 216$, on a

$$f(x) = x^3 - 33x^2 + 216x = x(x^2 - 33x + 216) = x(x-9)(x-24)$$

puisque $9 + 24 = 33$ et $9 \cdot 24 = 216$, et

$$g(x) = 3x^2 - 66x + 216 = 3(x^2 - 22x + 72) = 3(x-4)(x-18)$$

puisque $4 + 18 = 22$ et $4 \cdot 18 = 72$.
Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions entières distinctes (soit $x = 0$, $x = 9$ et $x = 24$) et l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions entières distinctes (soit $x = 4$ et $x = 18$).

(b) Supposons d'abord que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions entières distinctes.
Puisque $f(x) = x^3 - px^2 + qx = x(x^2 - px + q)$, alors ces solutions sont $x = 0$ ainsi que celles de l'équation quadratique $x^2 - px + q = 0$, soit

$$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4(1)q}}{2(1)} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Afin que les solutions de $x^2 - px + q = 0$ soient distinctes, $p^2 - 4q$ doit être positif.
Afin que les solutions de $x^2 - px + q = 0$ soient entières, $p \pm \sqrt{p^2 - 4q}$ doivent tous les deux être des entiers, d'où $\sqrt{p^2 - 4q}$ est donc un entier, ce qui signifie à son tour que $p^2 - 4q$ doit être un carré parfait.
Donc, $p^2 - 4q$ est un carré parfait non nul.

Supposons également que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions entières distinctes.
Les solutions de l'équation $3x^2 - 2px + q = 0$ sont

$$x = \frac{2p \pm \sqrt{(2p)^2 - 4(3)(q)}}{2(3)} = \frac{2p \pm \sqrt{4p^2 - 12q}}{6} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 3q}}{3}$$

Comme ci-dessus, $p^2 - 3q$ doit être et positif et un carré parfait afin que ces solutions soient distinctes.

De plus, puisque l'équation $3x^2 - 2px + q = 0$ admet des solutions entières distinctes, alors l'équation $x^2 - \frac{2p}{3}x + \frac{q}{3} = 0$ admet également des solutions entières distinctes.

Cela signifie que $\frac{2p}{3}$ et $\frac{q}{3}$ (qui sont respectivement la somme et le produit des racines du polynôme dans le membre de gauche) sont eux-mêmes des entiers.
Cela signifie que p doit être un multiple de 3 et que q doit être un multiple de 3.

Il faut maintenant démontrer que q (qui est un multiple de 3) est également un multiple de 9.
Pour le faire, on utilise le fait que p et q sont des multiples de 3 et que $p^2 - 4q$ est un carré parfait.
Puisque p et q sont des multiples de 3, alors soit $p = 3P$ et $q = 3Q$, P et Q étant des entiers positifs quelconques.
Dans ce cas,

$$p^2 - 4q = (3P)^2 - 4(3Q) = 9P^2 - 12Q = 3(3P^2 - 4Q)$$

Cela signifie que $p^2 - 4q$ est un carré parfait ainsi qu'un multiple de 3.
Puisque tout carré parfait qui est un multiple de 3 doit être un multiple de 9 (les facteurs

premiers des carrés parfaits paraissent toujours en couples), alors $3P^2 - 4Q$ est lui-même un multiple de 3.
Puisque $3P^2 - 4Q$ est un multiple de 3 et que $3P^2$ est un multiple de 3, alors $4Q$ doit être un multiple de 3, d'où Q est donc un multiple de 3.
Puisque $q = 3Q$ et que Q est un multiple de 3, alors q est un multiple de 9, ce qu'il fallait démontrer.

(c) Le but de cette solution est de démontrer qu'il existe une infinité de couples d'entiers strictement positifs (p, q) qui remplissent les conditions énoncées. Pour ce faire, il n'est pas nécessaire d'identifier *tous* les couples (p, q) qui remplissent ces conditions. Il suffit tout simplement de démontrer qu'il existe une infinité de tels couples d'entiers. Cela signifie qu'il va falloir faire certaines suppositions. Plutôt que de faire toutes ces suppositions au tout début, on les ajoutera au fur et à mesure que l'on avance dans la démarche.

Pour commencer, on suppose que p et q sont des entiers strictement positifs ; p étant un multiple de 3 et q étant un multiple de 9. (Supposition n° 1)
Donc, $p = 3a$ et $q = 9b$, a et b étant des entiers strictement positifs quelconques.
De plus, supposons que a et b vérifient $a^2 - 3b = m^2$ et $a^2 - 4b = n^2$, m et n étant des entiers strictement positifs quelconques. (Supposition n° 2)
Étant donné les résultats de (b), ces deux premières suppositions sont dans l'ordre des choses.
Dans ce cas, les solutions non nulles de $f(x) = 0$ sont

$$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{3a \pm \sqrt{(3a)^2 - 4(9b)}}{2} = \frac{3a \pm 3\sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{3a \pm 3n}{2}$$

tandis que les solutions de $g(x) = 0$ sont

$$x = \frac{2p \pm \sqrt{4p^2 - 12q}}{6} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 3q}}{3} = \frac{3a \pm 3\sqrt{a^2 - 3b}}{3} = a \pm m$$

On obtient des entiers pour solutions tant que les entiers $3a \pm 3n$ sont tous deux pairs, ce qui revient à dire que a et n sont tous deux pairs ou impairs (c'est-à-dire qu'ils sont de même parité).
Puisque $a^2 - 4b = n^2$, cela signifie que $a^2 - n^2 = 4b$. Ce dernier étant pair, on a donc que a^2 et n^2 sont de même parité, d'où a et n sont donc également de même parité.
De plus, puisque $p = 3a$ et $q = 9b$, alors p et q sont tous deux divisibles par 3, d'où $\text{PGCD}(p, q) = 3$ uniquement lorsque a et $3b$ n'admettent aucun autre diviseur commun supérieur à 1.

Donc, afin de trouver une infinité de couples d'entiers strictement positifs (p, q) qui remplissent les conditions données, on peut trouver une infinité de couples d'entiers strictement positifs (a, b) tels que $a^2 - 3b$ et $a^2 - 4b$ sont tous deux des carrés parfaits non nuls et que $\text{PGCD}(a, 3b) = 1$.

On rappelle que $a^2 - 3b = m^2$ et que $a^2 - 4b = n^2$, m et n étant des entiers strictement positifs quelconques.
On a donc $4a^2 - 12b = 4m^2$ et $3a^2 - 12b = 3n^2$.
En soustrayant, on obtient $a^2 = 4m^2 - 3n^2$, d'où $3n^2 = 4m^2 - a^2$.
On récrit cette équation sous la forme $n^2 \cdot 3 = (2m + a)(2m - a)$.

Supposons maintenant que

$$\begin{aligned} 2m + a &= n^2 \\ 2m - a &= 3 \end{aligned}$$

(Supposition n° 3)
On ajoute donc une autre supposition qui relie les entiers a, b, m et n, et qui nous permet d'exprimer ces variables en fonction de n.
On a ensuite $4m = n^2 + 3$, d'où $m = \dfrac{n^2+3}{4}$. De même, on a $2a = n^2 - 3$, d'où $a = \dfrac{n^2-3}{2}$.
Selon ces suppositions, n doit être impair afin que m et a soient des entiers.
On rappelle qu'afin de trouver une infinité de couples d'entiers strictement positifs (p, q) qui remplissent les conditions données, on peut trouver une infinité de couples d'entiers strictement positifs (a, b) tels que $a^2 - 3b$ et $a^2 - 4b$ sont tous deux des carrés parfaits non nuls et que $\text{PGCD}(a, 3b) = 1$.
En posant $n = 2N + 1$, N étant un entier strictement positif quelconque, on obtient

$$\begin{aligned} m &= \frac{(2N+1)^2+3}{4} = \frac{4N^2+4N+1+3}{4} = N^2+N+1 \\ a &= \frac{n^2-3}{2} = \frac{4N^2+4N+1-3}{2} = 2N^2+2N-1 \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} b &= \frac{a^2-n^2}{4} \\ &= \frac{(2N^2+2N-1)^2-(2N+1)^2}{4} \\ &= \frac{(2N^2+2N-1+2N+1)(2N^2+2N-1-2N-1)}{4} \\ &= (N^2+2N)(N^2-1) \end{aligned}$$

On remarque que les conditions reliant a, b, m et n sont toujours vérifiées :

- Puisque $b = \dfrac{a^2-n^2}{4}$, on a $a^2 - 4b = n^2$.
- Puisque $2m + a = n^2$ et $2m - a = 3$, alors $4m^2 - a^2 = 3n^2$.
- On a donc $4m^2 - a^2 = 3(a^2 - 4b)$, d'où $4m^2 = 4a^2 - 12b$ ou $a^2 - 3b = m^2$.

Donc, chaque entier strictement positif N définit des entiers a et b tels que a^2-3b et a^2-4b sont tous deux des carrés parfaits.
Donc, afin de compléter la démonstration, il faut démontrer qu'il existe une infinité d'entiers N tels que $\text{PGCD}(a, 3b) = 1$.

Puisque $a = 2N^2+2N-1$ et $b = (N^2+2N)(N^2-1) = N(N+2)(N+1)(N-1)$, on veut démontrer qu'il existe une infinité d'entiers N tels que

$$\text{PGCD}(2N^2+2N-1, 3N(N+2)(N+1)(N-1)) = 1$$

Considérons $2N^2 + 2N - 1$ et $N(N + 1) = N^2 + N$.
Puisque $\text{PGCD}(A, B) = \text{PGCD}(A, B - QA)$ pour tous les entiers A, B, Q, alors

$$\begin{aligned} &\text{PGCD}(N^2+N, 2N^2+2N-1) \\ &\qquad = \text{PGCD}(N^2+N, 2N^2+2N-1-2(N^2+N)) \\ &\qquad = \text{PGCD}(N^2+N, -1) \end{aligned}$$

Puisque 1 est le seul diviseur positif de -1, alors

$$\mathrm{PGCD}(N^2+N, 2N^2+2N-1) = \mathrm{PGCD}(N^2+N, -1) = 1$$

Puisque $\mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1, N^2+N) = 1$ et $\mathrm{PGCD}(A, BC) = \mathrm{PGCD}(A, B)$ lorsque $\mathrm{PGCD}(A, C) = 1$, alors

$$\begin{aligned}
&\mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1, 3N(N+2)(N+1)(N-1)) \\
&\qquad = \mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1, 3(N+2)(N-1)(N^2+N)) \\
&\qquad = \mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1, 3(N+2)(N-1)) \\
&\qquad = \mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1, 3N^2+3N-6)
\end{aligned}$$

Puisque $2N^2+2N-1$ est impair, alors $\mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1{,}2) = 1$.
Donc,

$$\mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1, 3N^2+3N-6) = \mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1, 2(3N^2+3N-6))$$

De nouveau, puisque $\mathrm{PGCD}(A, B) = \mathrm{PGCD}(A, B-QA)$, alors

$$\begin{aligned}
&\mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1, 6N^2+6N-12) \\
&\qquad = \mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1, 6N^2+6N-12-3(2N^2+2N-1)) \\
&\qquad = \mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1, -9)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1, 3N(N+2)(N+1)(N-1)) = \mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1, -9)$$

Donc, afin de compléter la démonstration, il faut démontrer qu'il existe une infinité d'entiers strictement positifs N tels que $\mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1, -9) = 1$.
Remarquons que les diviseurs positifs de -9 sont 1, 3 et 9.
Supposons que N est un multiple de 3. Dans ce cas, $2N^2+2N$ est un multiple de 3 (puisqu'il est un multiple de N). Donc, $2N^2+2N-1$ n'est pas un multiple de 3, d'où on a donc que $\mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1, -9) = 1$.

Donc, il existe une infinité d'entiers strictement positifs N tels que

$$\mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1, 6N(N+2)(N+1)(N-1)) = \mathrm{PGCD}(2N^2+2N-1, -9) = 1$$

Cela signifie qu'il existe une infinité d'entiers strictement positifs N tels que $\mathrm{PGCD}(a, 3b) = 1$.
Cela signifie qu'il existe une infinité de couples d'entiers strictement positifs (a, b) tels que a^2-3b et a^2-4b sont tous deux des carrés parfaits non nuls et que $\mathrm{PGCD}(a, 3b) = 1$.
Cela signifie qu'il existe une infinité de couples d'entiers strictement positifs (p, q) qui remplissent les conditions énoncées.