Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2023

le mercredi 5 avril 2023
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 6 avril 2023
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Le score total de Jasmine est égal à $3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 6 + 20$, soit 26 points.

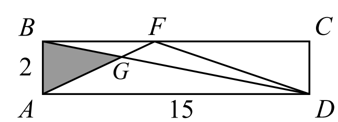
   (b) Supposons que Sam ait effectué n lancers qui ont chacun rapporté 5 points. Dans ce cas, il a effectué $2n$ lancers qui ont chacun rapporté 2 points.
   Puisque le score total de Sam était de 36 points, alors $5 \cdot n + 2 \cdot 2n = 36$ ou $9n = 36$, d'où $n = 4$.
   Au total, Sam a fait $n + 2n = 3n$ lancers, ce qui est égal à $3 \cdot 4 = 12$ lancers.

   (c) Puisque le score total de Théa était de 37 points, alors $2t + 5f = 37$.
   Puisque $2t$ est pair pour toute valeur entière de t, alors $5f$ doit être impair puisque la somme des deux doit être égale à 37 (ce qui est impair).
   La valeur de $5f$ est impaire uniquement lorsque f est impair.
   Lorsque $f = 1$, on a $2t + 5 = 37$ ou $2t = 32$, d'où $t = 16$.
   Lorsque $f = 3$, on a $2t + 15 = 37$ ou $2t = 22$, d'où $t = 11$.
   Lorsque $f = 5$, on a $2t + 25 = 37$ ou $2t = 12$, d'où $t = 6$.
   Lorsque $f = 7$, on a $2t + 35 = 37$ ou $2t = 2$, d'où $t = 1$.
   Lorsque $f \geq 9$, $5f \geq 45$, d'où $2t + 5f > 37$.
   Les couples (t,f) possibles sont donc $(16, 1)$, $(11, 3)$, $(6, 5)$ et $(1, 7)$.

   (d) Si a lancers rapportent chacun 6 points et b lancers rapportent chacun 21 points, alors le nombre total de points rapportés est égal à $6a + 21b$ ou $3(2a + 7b)$.
   Puisque a et b sont des entiers non négatifs, alors $2a + 7b$ est un entier non négatif. Donc, le nombre total de points rapportés, soit $3(2a + 7b)$, est un multiple de 3.
   Puisque 182 n'est pas un multiple de 3, alors il n'est pas possible d'avoir un score total de 182 points.

2. (a) L'aire totale des régions ombrées peut être déterminée en soustrayant l'aire du triangle AED de l'aire du rectangle $ABCD$.
   L'aire du rectangle $ABCD$ est égale à $2 \cdot 15 = 30$.
   La longueur de la base du triangle AED est égale à $AD = 15$ et sa hauteur est égale à $AB = 2$. Donc, l'aire du triangle AED est égale à $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2 = 15$.
   Donc, l'aire totale des régions ombrées est égale à $30 - 15 = 15$.

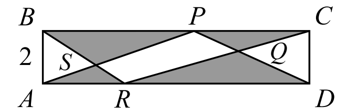
   (b) *Solution 1*
   Puisque le triangle AFD a pour base $AD = 15$ et pour hauteur $AB = 2$, alors son aire est égale à $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2 = 15$.
   L'aire du triangle AFD est égale à la somme des aires des triangles AGD et FGD.



   Puisque l'aire du triangle AFD est égale à 15 et que l'aire du triangle FGD est égale à 5, alors l'aire du triangle AGD est égale à $15 - 5 = 10$.
   L'aire du triangle ABD est égale à $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2 = 15$.
   L'aire du triangle ABD est égale à la somme des aires des triangles AGD et ABG.
   Puisque l'aire du triangle ABD est égale à 15 et que l'aire du triangle AGD est égale à 10, alors l'aire du triangle ABG (soit l'aire de la région ombrée) est égale à $15 - 10 = 5$.

   Solution 2
   Considérons les triangles AFD et ABD. Chacun a pour base AD et pour hauteur AB. Donc, les deux triangles ont des aires égales.
   L'aire du triangle AFD est égale à la somme des aires des triangles AGD et FGD.
   L'aire du triangle ABD est égale à la somme des aires des triangles AGD et ABG.
   Donc, l'aire du triangle ABG (soit l'aire de la région ombrée) est égale à l'aire du triangle FGD, soit 5.

(c) L'aire totale des deux régions ombrées inférieures (soit les triangles ASR et RQD) peut être déterminée en soustrayant l'aire de $PQRS$ de l'aire du triangle APD.
Puisque le triangle APD a pour base $AD = 15$ et pour hauteur $AB = 2$, alors son aire est égale à $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2 = 15$.



Puisque $PQRS$ a une aire de 6, l'aire totale des deux régions ombrées inférieures est égale à $15 - 6 = 9$.

De même, on peut démontrer que l'aire totale des deux régions ombrées supérieures (soit les triangles BSP et PQC) peut être déterminée en soustrayant l'aire de $PQRS$ de l'aire du triangle BRC.
Puisque le triangle BRC a également une aire de 15, l'aire totale des deux régions ombrées supérieures est égale à $15 - 6 = 9$.
Donc, l'aire totale des régions ombrées est égale à $9 + 9 = 18$.

3. (a) Si l'on échange les deuxième et quatrième chiffres de 6238, on obtient 6832.
Puisque 6832 ne figure pas dans la liste, ce nombre est le cousin manquant.

(b) Sur les 16 entiers de six chiffres de la liste donnée, 15 sont des cousins de l'entier initial.
Si l'entier initial de six chiffres est $abcdef$, alors il y a exactement 5 cousins pour lesquels a n'est pas le 1er chiffre.
Ces 5 cousins sont le résultat de l'échange du 1er chiffre, a, avec chacun des 5 autres chiffres, b, c, d, e, f et sont donc $bacdef$, $cbadef$, $dbcaef$, $ebcdaf$ et $fbcdea$.
Chacun des $15 - 5 = 10$ cousins restants de $abcdef$ a pour premier chiffre a.
Puisque les chiffres sont distincts, alors le 1er chiffre de l'entier initial est l'entier qui parait le plus souvent comme 1er chiffre dans la liste donnée, soit 7.
On peut avancer un argument semblable pour chacun des autres chiffres.
C'est-à-dire que le $n^{\text{ième}}$ chiffre de l'entier initial est l'entier qui parait le plus souvent comme $n^{\text{ième}}$ chiffre dans la liste donnée.
Donc, l'entier initial a 2 pour deuxième chiffre, 6 pour troisième chiffre, 4 pour quatrième chiffre, 9 pour cinquième chiffre et 1 pour sixième chiffre. Donc, l'entier initial est 726 491.
On peut vérifier que si l'entier initial est 726 491, alors les cousins sont bien les 15 entiers restants dans la liste donnée.

(c) Les cousins de l'entier de trois chiffres $cd3$ sont $dc3$, $3dc$ et $c3d$.
La différence entre les deux entiers $cd3$ et $dc3$ pourrait être négative, auquel cas ce ne serait pas la bonne différence. Si la différence est positive, alors $cd3$ moins $dc3$ a 0 pour chiffre des unités et ne peut donc pas égaler $d95$.
De même, la différence entre les deux entiers $cd3$ and $c3d$ pourrait être négative, auquel cas ce ne serait pas la bonne différence. Puisque $cd3$ et $c3d$ ont chacun c pour chiffre des centaines, alors $cd3$ moins $c3d$ a 0 pour chiffre des centaines et ne peut donc pas égaler $d95$ (puisque d est un chiffre non nul).
Donc, $cd3$ moins $3dc$ est égal à $d95$.
Puisque la différence, $d95$, a 5 pour chiffre des unités, alors $c = 8$. (Avant de continuer, veuillez confirmer que celle-ci est la seule valeur possible de c.)
À partir de $c = 8$, on a $8d3$ moins $3d8$ est égal à $d95$.
L'entier de trois chiffres $8d3$ est égal à $800 + 10d + 3$.
L'entier de trois chiffres $3d8$ est égal à $300 + 10d + 8$.
Donc, $8d3$ moins $3d8$ est égal à $(800 + 10d + 3) - (300 + 10d + 8) = 500 - 5 = 495$, ce qui est égal à $d95$, d'où $d = 4$.
(On peut confirmer que $843 - 348 = 495$.)
La valeur de c est 8, celle de d est 4 et aucune autre valeur n'est possible.

(d) *Solution 1*

Les six cousins de l'entier de quatre chiffres $mn97$ sont $nm97$, $9nm7$, $7n9m$, $m9n7$, $m79n$ et $mn79$.
Le cousin $nm97$ est égal à $1000n + 100m + 90 + 7$.
Le cousin $9nm7$ est égal à $9000 + 100n + 10m + 7$.
Le cousin $7n9m$ est égal à $7000 + 100n + 90 + m$.
Le cousin $m9n7$ est égal à $1000m + 900 + 10n + 7$.
Le cousin $m79n$ est égal à $1000m + 700 + 90 + n$.
Le cousin $mn79$ est égal à $1000m + 100n + 70 + 9$.
La somme, S, des six cousins est donc égale à

$$\begin{aligned} S &= 1000(n+9+7+m+m+m) + 100(m+n+n+9+7+n) + 10(9+m+9+n+9+7) \\ &\quad + (7+7+m+7+n+9) \\ &= 1000(3m+n+16) + 100(m+3n+16) + 10(m+n+34) + (m+n+30) \end{aligned}$$

La somme, S, doit être égale à l'entier de cinq chiffres $nmnm7$, dont le chiffre des unités est 7.
Le chiffre des unités de $S = 1000(3m+n+16)+100(m+3n+16)+10(m+n+34)+(m+n+30)$ est égal au chiffre des unités de $m + n + 30$, qui est à son tour égal au chiffre des unités de $m + n$ (puisque 30 a 0 pour chiffre des unités).
Si $m + n$ a 7 pour chiffre des unités, alors $m + n = 7$ ou $m + n = 17$.
Puisque m et n sont des chiffres distincts non nuls, alors les couples (m, n) possibles sont $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$, $(8, 9)$ et $(9, 8)$.
Si $(m, n) = (1, 6)$, alors l'entier de cinq chiffres $nmnm7$ est 61 617 et

$$\begin{aligned} S &= 1000(3m+n+16) + 100(m+3n+16) + 10(m+n+34) + (m+n+30) \\ &= 1000(3(1)+6+16) + 100(1+3(6)+16) + 10(1+6+34) + (1+6+30) \\ &= 1000(25) + 100(35) + 10(41) + 37 \\ &= 28\,947 \end{aligned}$$

Donc, $(m, n) = (1, 6)$ n'est pas un couple possible.
On vérifie les autres couples (m, n) possibles dans le tableau ci-dessous.

(m,n)	$nmnm7$	S
(2,5)	52 527	30 747
(3,4)	43 437	32 547
(4,3)	34 347	34 347
(5,2)	25 257	36 147
(6,1)	16 167	37 947
(8,9)	98 987	54 657
(9,8)	89 897	56 457

Le seul couple de chiffres distincts non nuls (m, n) est $(4, 3)$.

Solution 2
Les six cousins de l'entier de quatre chiffres $mn97$ sont $nm97$, $9nm7$, $7n9m$, $m9n7$, $m79n$ et $mn79$. Comme dans la Solution 1, la somme, S, des six cousins est égale à

$$\begin{aligned} S &= 1000(n+9+7+m+m+m)+100(m+n+n+9+7+n)+10(9+m+9+n+9+7) \\ &\quad +(7+7+m+7+n+9) \\ &= 1000(3m+n+16)+100(m+3n+16)+10(m+n+34)+(m+n+30) \\ &= 3000m+1000n+16\,000+100m+300n+1600+10m+10n+340+m+n+30 \\ &= 3111m+1311n+17\,970 \end{aligned}$$

La somme, S, doit être égale à l'entier de cinq chiffres $nmnm7$, qui est à son tour égal à $10\,000n+1000m+100n+10m+7$ ou $10\,100n+1010m+7$.
On égalise les deux expressions et on simplifie l'équation résultante pour obtenir

$$\begin{aligned} 3111m+1311n+17\,970 &= 10\,100n+1010m+7 \\ 8789n-2101m &= 17\,963 \\ 799n-191m &= 1633 \quad \text{(en divisant chaque membre de l'équation par 11)} \end{aligned}$$

Puisque $799n = 1633+191m$ et $m \geq 1$, alors $799n \geq 1633+191(1)$ ou $799n \geq 1824$, d'où $n \geq \dfrac{1824}{799} \approx 2{,}3$.
Puisque $m \leq 9$, alors $799n \leq 1633+191(9)$ ou $799n \leq 3352$, d'où $n \leq \dfrac{3352}{799} \approx 4{,}2$.
Since $2{,}3 \leq n \leq 4{,}2$ et que n est un entier, alors les valeurs possibles de n sont 3 et 4.
On reporte $n = 4$ dans l'équation pour obtenir $799(4) = 1633+191m$ ou $191m = 1563$ et puisque $\dfrac{1563}{191}$ n'est pas un entier, alors $n \neq 4$.
On reporte $n = 3$ dans l'équation pour obtenir $799(3) = 1633+191m$ ou $191m = 764$, d'où $m = 4$.
Lorsque $m = 4$ et $n = 3$, l'entier de cinq chiffres $nmnm7$ est $34\,347$ et

$$S = 3111(4)+1311(3)+17\,970$$

ou $S = 34\,347$. Donc, le seul couple (m,n) de chiffres distincts non nuls est $(4,3)$.

4. (a) Puisqu'il y a 9 façons de générer chacun des trois entiers, alors il y a en tout $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ façons de générer les trois entiers.
On examine ensuite les différents cas pour lesquels le produit des trois entiers est un nombre premier.
Les entiers de 1 à 9 comprennent les nombres composés 4, 6, 8 et 9.
Si l'un des trois entiers générés est un nombre composé, alors le produit des trois entiers est un nombre composé.
Donc, les entiers doivent être choisis parmi 1, 2, 3, 5 et 7.
Parmi ces cinq entiers, 2, 3, 5 et 7 sont des nombres premiers.
Si deux ou plus des trois entiers générés sont des nombres premiers, alors le produit des trois entiers est un nombre composé.
Donc, au plus un entier est un nombre premier.
Si aucun des entiers générés n'est un nombre premier (tous les trois sont égaux à 1), alors le produit est 1, qui n'est pas un nombre premier.
Donc, le produit d'Amarpreet est un nombre premier exactement lorsque l'un des entiers

est 2, 3, 5 ou 7 et que chacun des deux autres entiers est égal à 1.
Il y a 4 façons de choisir l'un des nombres premiers, p, et 3 façons d'arranger les entiers 1, 1, p. Donc, il y a $4 \cdot 3 = 12$ façons de générer trois entiers dont le produit est un nombre premier.
Donc, la probabilité pour que le produit soit égal à un nombre premier est égale à $\dfrac{12}{729} = \dfrac{4}{243}$.

(b) *Solution 1*

On examine d'abord les différents cas pour lesquels le produit des quatre entiers est divisible par 5 mais non divisible par 7.
Le seul entier de 1 à 9 qui est divisible par 5 est 5. Donc, le produit des quatre entiers est divisible par 5 exactement lorsqu'au moins un des quatre entiers est 5.
De même, le seul entier de 1 à 9 qui est divisible par 7 est 7. Donc, le produit des quatre entiers n'est pas divisible par 7 exactement lorsqu'un 7 ne figure pas parmi les quatre entiers générés.
On compte le nombre de façons de générer de tels arrangements de quatre entiers en considérant le nombre de fois où 5 parait dans l'arrangement.

1^{er} cas : il y a quatre 5
Comme chacun des quatre entiers doit être égal à 5, il y a 1 possibilité dans ce cas.

2^{e} cas : il y a exactement trois 5
Les trois 5 peuvent être disposés de 4 façons différentes : 555_, 55_5, 5_55, _555.
Il y a 7 choix pour l'entier qui n'est pas un 5 puisqu'il peut être n'importe lequel des neuf entiers, à l'exception de 5 et 7.
Il y a donc $4 \cdot 7 = 28$ possibilités dans ce cas.

3^{e} cas : il y a exactement deux 5
Les deux 5 peuvent être disposés de 6 façons différentes : 55__, 5_5_, 5__5, _55_, _5_5, __55.
Une fois que les deux 5 ont été placés, il y a 7 choix pour chacun des deux entiers restants (puisqu'il est possible que ces entiers soient égaux l'un à l'autre).
Donc, il y a $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$ possibilités dans ce cas.

4^{e} cas : il y a exactement un 5
Le 5 peut être placé de 4 façons différentes.
Une fois que le 5 a été placé, il y a 7 choix pour chacun des trois entiers restants (puisqu'il est possible que ces entiers soient égaux l'un à l'autre).
Donc, il y a $4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 1372$ possibilités dans ce cas.

Au total, il y a $1 + 28 + 294 + 1372 = 1695$ façons de sélectionner les quatre entiers.
Puisqu'il y a 9 façons de générer chacun des quatre entiers, alors il y a en tout $9^4 = 6561$ façons de générer les quatre entiers.
Donc, la probabilité pour que le produit de Bertrand soit divisible par 5 mais non divisible par 7 est égale à $\dfrac{1695}{6561} = \dfrac{565}{2187}$.

Solution 2
Soit A l'événement que le produit généré par Bertrand est divisible par 5 et $\overline{A}$ l'événement que le produit n'est *pas* divisible par 5.
Soit B l'événement que le produit généré par Bertrand est divisible par 7 et $\overline{B}$ l'événement que le produit n'est *pas* divisible par 7.
On doit déterminer la probabilité de A et $\overline{B}$, ce que l'on peut exprimer comme $P(A \cap \overline{B})$.
Considérons le diagramme de Venn de la Figure 1.
La région ombrée de ce diagramme représente $P(A \cap \overline{B})$.

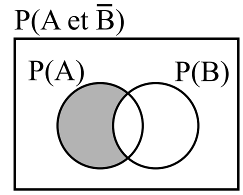


Figure 1

On veut trouver une méthode plus efficace pour déterminer $P(A \cap \overline{B})$ que celle présentée dans la Solution 1.
Pour ce faire, on va se servir des diagrammes de Venn pour nous aider à exprimer $P(A \cap \overline{B})$ sous une forme équivalente.

Considérons les deux diagrammes de Venn présentés ci-dessous.
Dans la Figure 2, la région ombrée représente $P(\overline{B})$.
Dans la Figure 3, la région ombrée représente $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

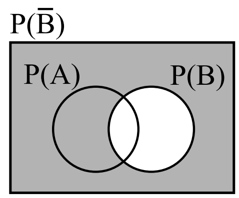


Figure 2

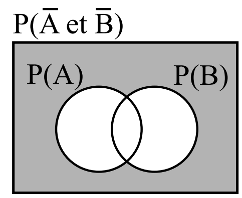


Figure 3

Remarquons que si la région ombrée de la Figure 3 est supprimée (c'est-à-dire qu'elle devient non ombrée) dans la Figure 2, alors le diagramme de Venn résultant est équivalent à celui de la Figure 1.
Donc, mathématiquement, $P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

(Sans utiliser les diagrammes de Venn, on aurait pu remarquer de la même manière que puisque exactement l'un de A et $\overline{A}$ peut se produire, alors $P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$.
Donc, $P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B})$.)

Donc, la probabilité pour que le produit soit divisible par 5 mais non divisible par 7 est égale à la probabilité que le produit ne soit pas divisible par 7 moins la probabilité que le produit soit à la fois non divisible par 5 et non divisible par 7.
Le seul entier de 1 à 9 qui est divisible par 7 est 7. Donc, le produit des quatre entiers n'est pas divisible par 7 exactement lorsque 7 ne figure pas parmi les quatre entiers générés.
La probabilité pour que l'entier généré ne soit pas 7 est égale à $\frac{8}{9}$. Donc, la probabilité pour que le produit des quatre entiers ne soit pas divisible par 7 est égale à $P(\overline{B}) = \left(\frac{8}{9}\right)^4$.
Le seul entier de 1 à 9 qui est divisible par 5 est 5. Donc, le produit des quatre entiers n'est pas divisible par 5 exactement lorsque 5 ne figure pas parmi les quatre entiers générés.
La probabilité pour que l'entier généré ne soit pas divisible à la fois par 5 et par 7 est donc égale à $\frac{7}{9}$. Donc, la probabilité pour que le produit des quatre entiers ne soit pas divisible

par 5 et ne soit pas divisible par 7 est égale à $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(\frac{7}{9}\right)^4$.

Donc, la probabilité pour que le produit soit divisible par 5 mais non divisible par 7 est égale à $\left(\frac{8}{9}\right)^4 - \left(\frac{7}{9}\right)^4 = \frac{8^4 - 7^4}{9^4} = \frac{4096 - 2401}{6561} = \frac{1695}{6561} = \frac{565}{2187}$.

Solution 3

Supposons que les quatre nombres générés soient a, b, c, d.

En l'absence de restrictions, il y a 9 choix pour chacun de a, b, c, d et donc un total de 9^4 combinaisons possibles de 4 chiffres qui peuvent être générées.

Si $abcd$ n'est pas divisible par 7, alors aucun de a, b, c, d ne peut être 7. Donc, il y a 8 possibilités pour chacun de a, b, c, d. Donc, parmi les 9^4 combinaisons, 8^4 combinaisons donnent des produits qui ne sont pas divisibles par 7.

Si $abcd$ n'est pas divisible par 7 et n'est pas divisible par 5, alors aucun de a, b, c, d ne peut être 5. Donc, il y a 7 possibilités pour chacun de a, b, c, d. Donc, parmi les 8^4 combinaisons dont les produits ne sont pas divisibles par 7, 7^4 combinaisons donnent des produits qui ne sont également pas divisibles par 5.

Cela signifie qu'il y a $8^4 - 7^4$ combinaisons dont le produit est divisible par 5 mais non divisible par 7.

Donc, la probabilité qu'une combinaison aléatoire donne un produit qui est divisible par 5 mais non divisible par 7 est égale à $\frac{8^4 - 7^4}{9^4} = \frac{4096 - 2401}{6561} = \frac{1695}{6561} = \frac{565}{2187}$.

(c) Si l'un des 2023 entiers générés est un 6, alors le produit est divisible par 6.

Donc, on peut exclure 6 du choix des entiers possibles.

De plus, un entier est divisible par 6 exactement lorsqu'il est divisible à la fois par 2 et par 3.

En excluant 6, les entiers restants qui sont divisibles par 2 sont 2, 4 et 8 et les entiers restants qui sont divisibles par 3 sont 3 et 9.

Par conséquent, le produit est également divisible par 6 lorsqu'au moins un des entiers générés est 2 ou 4 ou 8 et qu'au moins un des entiers générés est 3 ou 9.

En résumé, le produit n'est pas divisible par 6 exactement lorsque

- 6 ne figure pas parmi les entiers générés et
- il y a des entiers d'au plus une des deux listes 2, 4, 8, et 3, 9.

Donc, il y a exactement 3 cas qui produisent un produit qui n'est pas divisible par 6 :

Cas	Y a-t-il un 6 ?	Y a-t-il un 2, un 4 ou un 8 ?	Y a-t-il un 3 ou un 9 ?
1	non	non	non
2	non	non	oui
3	non	oui	non

Pour chacun de ces 3 cas, on compte le nombre de façons dont le produit généré n'est pas divisible par 6.

<u>1^{er} cas : il n'y a ni 6, ni 2, ni 4, ni 8, ni 3, ni 9</u>

Dans ce cas, il y a 3 entiers qui peuvent être choisis (1, 5 et 7) et il y a donc 3^{2023} façons de générer ce produit.

<u>2^e cas : il n'y a ni 6, ni 2, ni 4, ni 8</u>

Dans ce cas, il y a 5 entiers qui peuvent être choisis (1, 3, 5, 7 et 9) et il y a donc 5^{2023} façons de générer ce produit.

Cependant, ce compte inclut les cas où seuls 1, 5 et 7 sont choisis (3 et 9 ne le sont pas), ce qui a déjà été pris en compte dans le 1er cas.

Donc, il y a $5^{2023} - 3^{2023}$ façons de générer les produits dans le 2e cas qui sont différentes de celles du 1er cas.

3e cas : il n'y a ni 6, ni 3, ni 9

Dans ce cas, il y a 6 entiers qui peuvent être choisis (1, 2, 4, 5, 7 et 8) et il y a donc 6^{2023} façons de générer ce produit.

Cependant, ce compte inclut les cas où seuls 1, 5 et 7 sont choisis (2, 4 et 8 ne le sont pas), ce qui a déjà été pris en compte dans le 1er cas.
Donc, il y a $6^{2023} - 3^{2023}$ façons de générer les produits dans le 3e cas qui sont différentes de celles du 1er cas.

Donc, le nombre total de façons de générer tous les produits qui ne sont pas divisibles par 6 est égal à

$$3^{2023} + 5^{2023} - 3^{2023} + 6^{2023} - 3^{2023} = 5^{2023} + 6^{2023} - 3^{2023}$$

En l'absence de restrictions, il y a 9 choix pour chacun des entiers générés. Donc, au total, il y a 9^{2023} façons possibles de générer le produit.
Donc, la probabilité, p, que le produit ne soit pas divisible par 6 est égale à

$$p = \frac{5^{2023} + 6^{2023} - 3^{2023}}{9^{2023}}$$

d'où $p \cdot 9^{2023} = 5^{2023} + 6^{2023} - 3^{2023}$. Cette valeur est entière car elle est égale à la somme et à la différence de nombres entiers.
Pour déterminer le chiffre des unités de l'entier égal à $p \cdot 9^{2023}$, on détermine le chiffre des unités de l'entier égal à $5^{2023} + 6^{2023} - 3^{2023}$.
Le chiffre des unités de 5^a est égal à 5 pour tous les entiers strictement positifs a et donc le chiffre des unités de 5^{2023} est égal à 5.
Le chiffre des unités de 6^b est égal à 6 pour tous les entiers strictement positifs b et donc le chiffre des unités de 6^{2023} est égal à 6.
Considérons le chiffre des unités des puissances entières successives de 3 en commençant par 3^1 :

- 3^1 a 3 pour chiffre des unités
- 3^2 a 9 pour chiffre des unités
- 3^3 a 7 pour chiffre des unités
- 3^4 a 1 pour chiffre des unités
- 3^5 a 3 pour chiffre des unités

Puisque 3^1 et 3^5 ont le même chiffre des unités et que l'on effectue la même action pour passer d'une étape à l'autre, les résultats commencent à se répéter. Donc le bloc de quatre chiffres des unités (3, 9, 7, 1) doit former un cycle.
Puisque $2023 = 4 \cdot 505 + 3$, alors le chiffre des unités de 3^{2023} est le troisième chiffre du bloc qui se répète, soit 7.
Finalement, le chiffre des unités de l'entier égal à $p \cdot 9^{2023}$ est le chiffre des unités de $5+6-7$, ce qui est égal à 4.