



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 5 avril 2023

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 6 avril 2023

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 75 minutes

©2023 University of Waterloo

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4

Chaque question vaut 10 points.

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 2 ou 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :



- Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.



ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.





- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

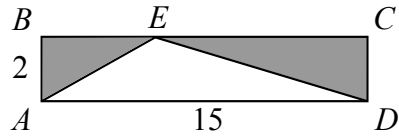
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Un jeu consiste à lancer une balle de manière qu'elle atterrisse dans l'un de deux trous, soit le trou le plus proche ou le trou le plus éloigné. Un lancer qui atterrit dans le trou le plus proche rapporte 2 points, tandis qu'un lancer qui atterrit dans le trou le plus éloigné rapporte 5 points. Le score total d'un joueur est égal à la somme des points de ses lancers.
 - (a)  Jasmine a fait 3 lancers qui ont rapporté 2 points chacun et 4 lancers qui ont rapporté 5 points chacun. Quel a été le score total de Jasmine ?
 - (b)  Sam a fait deux fois plus de lancers qui ont rapporté 2 points que de lancers qui ont rapporté 5 points. Si le score total de Sam était de 36 points, combien de lancers Sam a-t-il effectués ?
 - (c)  Théa a fait t lancers qui ont rapporté 2 points chacun et f lancers qui ont rapporté 5 points chacun. Si le score total de Théa était de 37 points, déterminer tous les couples (t, f) possibles.
 - (d)  Le jeu est modifié de manière que chaque lancer rapporte 6 ou 21 points au lieu de 2 ou 5 points. Expliquer s'il est possible ou non d'avoir un score total de 182 points.

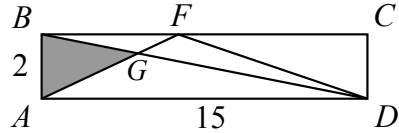
2. Pour chaque question qui suit, $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 2$ et $AD = 15$.



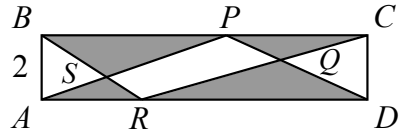
(a) Dans la figure ci-dessous, le point E est situé sur BC . Quelle est l'aire totale des régions ombrées ?



(b) Dans la figure ci-dessous, le point F est situé sur BC et la diagonale BD coupe AF en G . Si le triangle FGD a une aire de 5, quelle est l'aire de la région ombrée ?



(c) Dans la figure ci-dessous, le point P est situé sur BC et le point R est situé sur AD . De plus, BR et AP se coupent en S tandis que PD et RC se coupent en Q . Si $PQRS$ a une aire de 6, déterminer l'aire totale des régions ombrées.



3. Pour tout entier strictement positif ayant trois ou plus chiffres non nuls différents, soit un *cousin* l'entier que l'on obtient comme résultat de la permutation de deux chiffres de l'entier. Par exemple, l'entier 156 a trois cousins :

- 516 (obtenu en permutant les 1^{er} et 2^e chiffres),
- 651 (obtenu en permutant les 1^{er} et 3^e chiffres) et
- 165 (obtenu en permutant les 2^e et 3^e chiffres).



(a) Sans ordre particulier, cinq des six cousins de 6238 figurent dans la liste ci-dessous. Identifier le cousin manquant.

| | |
|------|------|
| 2638 | 6328 |
| 3268 | 6283 |
| 8236 | |



(b) Sans ordre particulier, la liste suivante contient un entier initial ainsi que tous ses cousins. Lequel des entiers est l'entier initial ?

| | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| 726 194 | 726 941 | 746 291 | 627 491 |
| 276 491 | 926 471 | 796 421 | 726 419 |
| 729 461 | 716 492 | 762 491 | 726 491 |
| 126 497 | 721 496 | 426 791 | 724 691 |



(c) Soit c et d des chiffres distincts et non nuls. L'entier de trois chiffres $cd3$ moins l'un de ses cousins est égal à l'entier de trois chiffres $d95$. Déterminer les valeurs de c et d et démontrer qu'il n'y a pas d'autres valeurs possibles.



(d) Soit m et n des chiffres distincts et non nuls. La somme des six cousins de l'entier de quatre chiffres $mn97$ est égale à l'entier de cinq chiffres $nmnm7$. Déterminer les valeurs de m et n et démontrer qu'il n'y a pas d'autres valeurs possibles.

4. La Grande Société des Mathématiques possède un générateur d'entiers qui produit de manière aléatoire et équiprobable un entier de 1 à 9. Chacun des membres de l'Équipe de Multiplication utilise ce générateur un certain nombre de fois et calcule ensuite le produit des entiers qu'il ou elle a obtenus.



(a) Amarpreet utilise le générateur 3 fois. Quelle est la probabilité pour que le produit soit un nombre premier ?



(b) Bertrand utilise le générateur 4 fois. Déterminer la probabilité pour que le produit soit divisible par 5 mais *non* divisible par 7.



(c) Camille utilise le générateur 2023 fois. Soit p la probabilité pour que le produit soit *non* divisible par 6. Déterminer le chiffre des unités de l'entier égal à $p \times 9^{2023}$.



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2023! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2023.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2023/2024
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e et 12^e année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours