Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2023

(7e et 8e années – Secondaire I et II)

le mercredi 17 mai 2023

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 18 mai 2023

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

7e année

1. La moitié de 24 est égale à $24 \div 2 = 12$. Kiyana donne à son amie 12 raisins.

RÉPONSE : (D)

2. D'après le diagramme, vendredi avait la température la plus élevée.

RÉPONSE : (C)

3. Si chaque panier coûte 16,50 \$, alors 4 paniers de fraises coûteront $4 \times 16{,}50$ \$ $= 66{,}00$ \$.

RÉPONSE : (B)

4. La différence entre 3 et -5 est égale à $3 - (-5) = 3 + 5 = 8$. Donc, il fait 8°C de plus.

RÉPONSE : (A)

5. Puisque $5 \times 5 = 25$ et que chaque choix de réponse est supérieur à 25, alors l'entier que Sarah a multiplié par lui-même doit être supérieur à 5.
De plus, $6 \times 6 = 36$ et chaque choix de réponse est inférieur ou égal à 36.
Donc, parmi les choix de réponse, seul 36 pourrait être le résultat de la multiplication d'un entier par lui-même.
Par ailleurs, on aurait pu remarquer que le résultat de la multiplication d'un entier par lui-même est égal à un carré parfait. Parmi les choix de réponse, 36 est le seul carré parfait.

RÉPONSE : (E)

6. Puisque $PQRS$ a un périmètre de 40 cm et que $SR = 16$ cm, alors la longueur combinée des trois autres côtés est égale à 40 cm $-$ 16 cm $=$ 24 cm.
Les trois autres côtés ont la même longueur, donc $PQ = \dfrac{24 \text{ cm}}{3} = 8$ cm.

RÉPONSE : (C)

7. Lorsqu'on divise 52 par chacun des dénominateurs, on voit que $\dfrac{52}{4} = 13$ est le seul entier.

RÉPONSE : (C)

8. La plus grande longueur possible d'un segment de droite qui relie deux points sur un cercle est un diamètre du cercle. Puisque le cercle a un rayon de 4 cm, son diamètre a une longueur de 2×4 cm $=$ 8 cm. Donc, la plus grande longueur possible de ce segment de droite est égale à 8 cm.

RÉPONSE : (B)

9. Il y a 10 entiers dans la liste. Parmi eux, 5 sont pairs (soit 10, 12, 14, 16 et 18). Donc, la probabilité de choisir un entier pair est égale à $\dfrac{5}{10}$.

RÉPONSE : (C)

10. Avant de payer la taxe, les trois articles coûtent 4,20 \$ + 7,60 \$ + 3,20 \$ = 15,00 \$.
La taxe de 5 % qu'il faudra ajouter au coût de 15,00 \$ est donc égale à $0{,}05 \times 15{,}00$ \$ $= 0{,}75$ \$.
Donc, si l'on ajoutait une taxe de 5% au coût des trois articles, le coût total des trois articles serait égal à 15,00 \$ + 0,75 \$ = 15,75 \$.
Remarquons qu'on aurait pu calculer la taxe de 5 % sur chaque article individuellement, mais cela n'aurait pas été aussi efficace que de la calculer sur le total de 15,00 \$.

RÉPONSE : (D)

11. Puisque BCD est un segment de droite, alors $\angle BCD = 180°$.
Donc, $\angle ACB = \angle BCD - \angle ACD = 180° - 75° = 105°$.
Puisque les trois angles du triangle ABC ont une somme de 180°, alors :
$\angle ABC = 180° - 105° - 35° = 40°$.

Réponse : (B)

12. Sur les 100 petits carrés identiques, 28 ne sont pas ombrés. Donc, $100 - 28 = 72$ petits carrés identiques sont ombrés.
Pour que 75 % de l'aire de $WXYZ$ soit ombrée, 75 des 100 petits carrés doivent être ombrés.
Donc, il faut ombrer $75 - 72 = 3$ petits carrés supplémentaires.

Réponse : (A)

13. Soit S le quatrième sommet du rectangle.
Le côté du rectangle qui relie les points $(2, 1)$ et $(2, 5)$ est vertical. Donc, le côté opposé du rectangle (soit le côté qui relie les points $(4, 1)$ et S) doit également être vertical.
Cela signifie que S a la même abscisse que $(4, 1)$, soit 4.
De même, le côté du rectangle qui relie les points $(2, 1)$ et $(4, 1)$ est horizontal. Donc, le côté opposé du rectangle (soit le côté qui relie les points $(2, 5)$ et S) doit également être horizontal.
Cela signifie que S a la même ordonnée que $(2, 5)$, soit 5.
Donc, le quatrième sommet du rectangle a pour coordonnées $(4, 5)$.

Réponse : (D)

14. Les nombres premiers inférieurs à 10 sont $2, 3, 5$ et 7.
Donc, les deux seuls nombres premiers distincts dont la somme est égale à 10 sont 3 et 7.
Le produit de ces nombres premiers est égal à $3 \times 7 = 21$.

Réponse : (D)

15. La liste $2, 9, 4, n, 2n$ contient 5 nombres.
Puisque ces 5 nombres ont une moyenne de 6, cela signifie que leur somme doit être égale à $5 \times 6 = 30$.
Donc, $2 + 9 + 4 + n + 2n = 30$ ou $15 + 3n = 30$, d'où $3n = 15$ ou $n = 5$.

Réponse : (D)

16. La somme de P et Q est égale à 5. Donc, P et Q sont (dans un certain ordre) soit égaux à 1 et 4, soit égaux à 2 et 3.
La différence entre R et S est égale à 5. Donc, R et S doivent être (dans un certain ordre) égaux à 1 et 6.
Puisque R et S sont égaux à 1 et 6, ni P ni Q ne peuvent être égaux à 1, ce qui signifie que P et Q ne peuvent être égaux à 1 et 4 ; ils doivent donc être égaux à 2 et 3.
Parmi les nombres de 1 à 6, les seuls qui restent sont 4 et 5.
Puisque T est supérieur à U, alors 5 est le nombre qui remplace la lettre T.

Réponse : (E)

17. *Solution 1*
L'aire du triangle AED est égale à la moitié de sa base multipliée par sa hauteur.
Si l'on considère que AE est la base du triangle AED, alors BD est sa hauteur correspondante (AE est perpendiculaire à BD).
Puisque $AB = BC = 24$ cm et que E et D sont les milieux de leurs côtés respectifs, alors $AE = 12$ cm et $BD = 12$ cm.
Donc, l'aire du triangle AED est égale à $\frac{1}{2} \times 12 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} = 72 \text{ cm}^2$.

Solution 2
L'aire du triangle AED est égale à l'aire du triangle ABD moins l'aire du triangle EBD.
Si l'on considère que BD est la base du triangle EBD, alors EB est sa hauteur correspondante.
Puisque $AB = BC = 24$ cm et que E et D sont les milieux de leurs côtés respectifs, alors $EB = 12$ cm et $BD = 12$ cm.
Donc, l'aire du triangle EBD est égale à $\frac{1}{2} \times 12 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} = 72 \text{ cm}^2$.
L'aire du triangle ABD est égale à $\frac{1}{2} \times BD \times AB = \frac{1}{2} \times 12 \text{ cm} \times 24 \text{ cm} = 144 \text{ cm}^2$.
Donc, l'aire du triangle AED est égale à $144 \text{ cm}^2 - 72 \text{ cm}^2 = 72 \text{ cm}^2$.

Réponse : (C)

18. L'eau prend la forme d'un prisme droit à base rectangulaire dont la base mesure 2 cm × 5 cm et dont la profondeur est de 6 cm.
Donc, l'eau a un volume de $2 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^3$.
La face du prisme dont l'aire est la plus grande mesure 5 cm × 8 cm.
Lorsque le prisme est basculé de manière qu'il repose sur l'une des faces qui mesure 5 cm × 8 cm, l'eau prend la forme d'un prisme droit à base rectangulaire dont la base mesure 5 cm × 8 cm et dont la profondeur est inconnue.
Soit p la profondeur de l'eau après qu'on a basculé le prisme.
Puisque le volume de l'eau demeure inchangé après qu'on a basculé le prisme (soit 60 cm^3), alors $5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times p \text{ cm} = 60 \text{ cm}^3$ ou $40p \text{ cm}^3 = 60 \text{ cm}^3$, d'où $p = \dfrac{60}{40} = \dfrac{3}{2}$.
Lorsque le prisme est basculé de manière qu'il tienne sur la face dont l'aire est la plus grande, la profondeur de l'eau est égale à $\dfrac{3}{2}$ cm = 1,5 cm.

Réponse : (D)

19. *Solution 1*
On remplit d'abord un tableau dans lequel on écrit le chiffre des unités de chaque produit possible.
Par exemple, lorsque le nombre sur le premier dé est 3 et que le nombre sur le second dé est 6, on écrit 8 dans le tableau car $3 \times 6 = 18$, dont le chiffre des unités est 8.

Nombre sur le second dé

Nombre sur le premier dé

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	**0**	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	**0**	4
5	5	**0**	5	**0**	5	**0**
6	6	2	8	4	**0**	6

Sur les 36 résultats possibles dans le tableau ci-dessus, 6 résultats ont un chiffre des unités égal à 0.
Donc, la probabilité pour que le chiffre des unités du produit soit 0 est égale à $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Solution 2

Puisque le chiffre des unités du produit est 0, alors le produit est à la fois pair et divisible par 5.
Puisque les nombres possibles dans le produit sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, alors 5 doit être l'un des nombres obtenu lors d'un lancer.
Puisque le produit est pair (et que 5 ne l'est pas), alors l'autre nombre lancé doit être l'un des trois nombres pairs, à savoir 2, 4, 6.
Donc, les couples de nombres possibles qui peuvent donner un produit dont le chiffre des unités est 0 sont $(5,2)$, $(5,4)$, $(5,6)$ ou $(2,5)$, $(4,5)$, $(6,5)$. (Dans chaque couple, le premier nombre représente le nombre obtenu à partir de l'un des dés tandis que le second nombre représente le nombre obtenu à partir de l'autre dé.)
Puisqu'il y a 6 résultats possibles pour chacun des deux dés, alors il y a $6 \times 6 = 36$ couples représentant tous les résultats possibles.
Puisque 6 de ces couples représentent un produit dont le chiffre des unités est 0, alors la probabilité pour que le chiffre des unités du produit soit 0 est égale à $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Réponse : (D)

20. Puisque a et b sont des entiers strictement positifs, alors et $\frac{a}{7}$ et $\frac{2}{b}$ sont supérieurs à 0.
La somme de $\frac{a}{7}$ et $\frac{2}{b}$ est égale à 1, donc chacun a une valeur inférieure à 1.
Puisque $\frac{a}{7}$ est supérieur à 0 et inférieur à 1, les valeurs possibles de a sont $1, 2, 3, 4, 5, 6$.
Lorsqu'on reporte ces valeurs de a dans l'équation une par une, on peut déterminer s'il existe une valeur entière positive de b pour laquelle l'équation est vérifiée.
Lorsqu'on reporte $a = 1$, on obtient $\frac{1}{7} + \frac{2}{b} = 1$ ou $\frac{2}{b} = 1 - \frac{1}{7}$, soit $\frac{2}{b} = \frac{6}{7}$.
Puisque $\frac{2}{b} = \frac{6}{7}$, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur de la première fraction par 3 (soit $6 \div 2$) pour obtenir $\frac{6}{3b} = \frac{6}{7}$.
On obtient $3b = 7$, qui n'a pas une solution entière ($b = \frac{7}{3}$).
Donc, lorsque $a = 1$, il n'existe aucune valeur entière positive de b qui vérifie l'équation.

Lorsqu'on reporte $a = 2$ dans l'équation, on obtient $\frac{2}{7} + \frac{2}{b} = 1$ ou $\frac{2}{b} = 1 - \frac{2}{7}$, soit $\frac{2}{b} = \frac{5}{7}$.
Puisque $\frac{2}{b} = \frac{5}{7}$, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur de la première fraction par 5 et le numérateur et le dénominateur de la seconde fraction par 2 pour obtenir $\frac{10}{5b} = \frac{10}{14}$.
On obtient donc $5b = 14$, qui n'a pas de solution entière.
Donc, lorsque $a = 2$, il n'existe aucune valeur entière positive de b qui vérifie l'équation.

Lorsqu'on reporte $a = 3$, on obtient $\frac{3}{7} + \frac{2}{b} = 1$ ou $\frac{2}{b} = 1 - \frac{3}{7}$, soit $\frac{2}{b} = \frac{4}{7}$.
Puisque $\frac{2}{b} = \frac{4}{7}$, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur de la première fraction par 2 pour obtenir $\frac{4}{2b} = \frac{4}{7}$.
On obtient donc $2b = 7$, qui n'a pas de solution entière.
Donc, lorsque $a = 3$, il n'existe aucune valeur entière positive de b qui vérifie l'équation.

Lorsqu'on reporte $a = 4$ dans l'équation et que l'on simplifie, on obtient $\frac{2}{b} = \frac{3}{7}$.

Puisque $\frac{2}{b} = \frac{3}{7}$, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur de la première fraction par 3 et le numérateur et le dénominateur de la seconde fraction par 2 pour obtenir $\frac{6}{3b} = \frac{6}{14}$.

On obtient donc $3b = 14$, qui n'a pas de solution entière.

Donc, lorsque $a = 4$, il n'existe aucune valeur entière positive de b qui vérifie l'équation.

Lorsqu'on reporte $a = 5$ dans l'équation et que l'on simplifie, on obtient $\frac{2}{b} = \frac{2}{7}$.

Puisque les numérateurs sont égaux, alors les dénominateurs doivent être égaux. Donc, $b = 7$ vérifie l'équation.

Enfin, lorsqu'on reporte $a = 6$ dans l'équation et que l'on simplifie, on obtient $\frac{2}{b} = \frac{1}{7}$.

Puisque $\frac{2}{b} = \frac{1}{7}$, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur de la seconde fraction par 2 pour obtenir $\frac{2}{b} = \frac{2}{14}$, d'où $b = 14$.

Donc, il y a deux couples $(a,\ b)$ d'entiers strictement positifs qui vérifient l'équation, soit $a = 5, b = 7$ et $a = 6, b = 14$.

Réponse : (E)

21. Puisque $ABCD$ est un carré et que les longueurs de ses côtés sont des entiers, son aire est égale à un carré parfait.

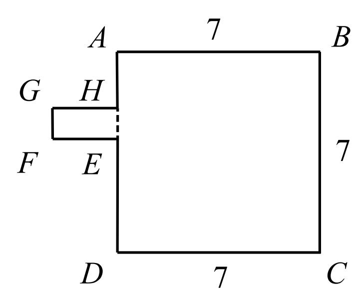
Puisque $ABCD$ et $EFGH$ (le rectangle) ont des aires dont le produit est égal à 98, alors l'aire de $ABCD$ est un diviseur de 98.

Les diviseurs positifs de 98 sont 1, 2, 7, 14, 49 et 98.

Il y a exactement deux diviseurs de 98 qui sont des carrés parfaits, à savoir 1 et 49.

Puisque l'aire de $ABCD$ est supérieure à celle de $EFGH$, alors $ABCD$ a une aire de 49, d'où $EFGH$ a donc une aire de 2 (puisque $49 \times 2 = 98$).

Puisque le carré $ABCD$ a une aire de 49, on a donc $AB = BC = CD = DA = 7$.



Le périmètre de $ABCDEFGH$ est égal à

$$
\begin{aligned}
& AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HA \\
= \ & 7 + 7 + 7 + DE + EF + EH + GH + HA \quad (\text{puisque } EH = FG) \\
= \ & 21 + DE + EH + HA + EF + GH \quad (\text{on récrit l'expression}) \\
= \ & 21 + DA + EF + GH \quad (\text{puisque } DE + EH + HA = DA) \\
= \ & 21 + 7 + EF + GH \quad (\text{puisque } DA = 7) \\
= \ & 28 + 2 \times GH \quad (\text{puisque } EF = GH)
\end{aligned}
$$

Puisque les longueurs des côtés sont des entiers et que l'aire de $EFGH$ est égale à 2, alors soit $GH = 1$ (et $FG = 2$), soit $GH = 2$ (et $FG = 1$).

Si $GH = 1$, alors le périmètre de $ABCDEFGH$ est égal à $28 + 2 \times 1 = 30$.

Puisque 30 n'est pas un choix de réponse possible, alors $GH = 2$ et le périmètre est égal à $28 + 2 \times 2 = 32$.

Réponse : (B)

22. Si les premier et deuxième termes d'une suite Gareth sont 10 et 8, alors le 3e terme est $10-8=2$, le 4e terme est $8-2=6$, le 5e terme est $6-2=4$, le 6e terme est $6-4=2$, le 7e terme est $4-2=2$, le 8e terme est $2-2=0$, le 9e terme est $2-0=2$, le 10e terme est $2-0=2$ et le 11e terme est $2-2=0$.
Donc, la suite est $10, 8, 2, 6, 4, 2, 2, 0, 2, 2, 0, \ldots$.
Les 5 premiers termes de la suite sont $10, 8, 2, 6, 4$ et les trois termes suivants sont $2, 2, 0$. Remarquons que ce bloc de 3 termes semble se répéter. Puisque chaque nouveau terme ajouté à la fin de cette suite est déterminé par les deux termes précédents de la suite, alors ce bloc de 3 termes va effectivement continuer à se répéter. (C'est-à-dire que puisque le bloc se répète une fois, il continuera à se répéter.)
Pour les 30 premiers termes de la suite, on a : les 5 premiers termes, suivis de 8 blocs de $2, 2, 0$, puis d'un 2 supplémentaire (puisque $5 + 8 \times 3 + 1 = 30$).
Les 5 premiers termes ont une somme de $10 + 8 + 2 + 6 + 4 = 30$.
La somme de chaque bloc qui répète est égale à $2 + 2 + 0 = 4$. Donc, la somme de 8 tels blocs est égale à $8 \times 4 = 32$.
Donc, la somme des 30 premiers termes de la suite est égale à $30 + 32 + 2 = 64$.

Réponse : (E)

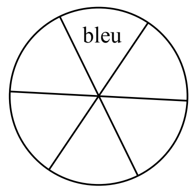
23. Supposons que la longueur, la largeur ou la hauteur du prisme rectangulaire soit égale à 5.
Lorsqu'on multiplie 5 avec n'importe lequel des chiffres restants, on obtient un produit dont le chiffre des unités est égal à 5 ou à 0.
Cela signifie que si la longueur, la largeur ou la hauteur du prisme rectangulaire est égale à 5, alors au moins l'un des entiers de deux chiffres (l'aire d'une face) a un chiffre des unités égal à 5 ou à 0.
Cependant, 0 n'est pas un chiffre que l'on peut utiliser et on peut utiliser chaque chiffre de 1 à 9 exactement une seule fois (c'est-à-dire que l'on ne peut pas utiliser 5 deux fois). Il est donc impossible que l'une des dimensions du prisme rectangulaire soit égale à 5.
Donc, le chiffre 5 parait dans l'un des entiers de deux chiffres (l'aire d'une face).
Le chiffre 5 ne peut être le chiffre des unités de l'aire d'une face car cela nécessiterait que l'une des dimensions soit égale à 5.
Par conséquent, le chiffre 5 doit être le chiffre des dizaines de l'aire d'une face.
Les entiers de deux chiffres dont le chiffre des dizaines est égal à 5 et qui sont égaux au produit de deux entiers à un chiffre différents (ces derniers n'étant pas égaux à 5) sont $54 = 6 \times 9$ et $56 = 7 \times 8$.
Supposons que deux des dimensions du prisme soient 7 et 8 et que l'une des aires soit égale à 56.
Dans ce cas, les chiffres $5, 6, 7$ et 8 auront déjà été utilisés et donc les chiffres restants sont $1, 2, 3, 4$ et 9.
Lequel de ces chiffres est égal à la dimension restante du prisme ?
Ce ne peut être 1 puisque les produits de 1 et 7, ou de 1 et 8, ne donnent pas des aires de deux chiffres.
Ce ne peut être 2 puisque le produit de 2 et 8 est égal à 16 et que le chiffre 6 a déjà été utilisé.
Ce ne peut être 3 puisque $3 \times 7 = 21$ et $3 \times 8 = 24$ et donc les aires de deux faces partagent le chiffre 2.
Ce ne peut être 4 puisque $4 \times 7 = 28$ et que le chiffre 8 a déjà été utilisé.
Enfin, ce ne peut être 9 puisque $9 \times 7 = 63$ et que le chiffre 6 a déjà été utilisé.
Par conséquent, il est impossible que 7 et 8 soient des dimensions du prisme, donc deux des trois dimensions doivent être 6 et 9.
En vérifiant les chiffres restants de cette même manière systématique, on peut déterminer que 3 est la troisième dimension du prisme.

Donc, lorsque les dimensions du prisme sont $3, 6$ et 9, les aires des faces sont $3 \times 6 = 18$, $3 \times 9 = 27$ et $6 \times 9 = 54$. On voit donc que chacun des chiffres de 1 à 9 n'a été utilisé qu'une seule fois.
Puisque les aires des faces sont 18, 27 et 54, l'aire totale du prisme droit à base rectangulaire est égale à $2 \times (18 + 27 + 54)$ ou $2 \times 99 = 198$.

Réponse : (D)

24. *Solution 1*

D'abord, on colorie en bleu la section du haut.
Puisque deux cercles ont la même coloration si l'on peut faire pivoter un des cercles pour qu'il corresponde à l'autre, on peut choisir de colorier en bleu n'importe quelle section, on choisit donc arbitrairement la section du haut.

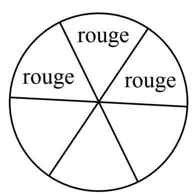


Ensuite, il y a 5 sections que l'on peut colorier en vert.
Après avoir choisi la section qui sera coloriée en vert, il reste 4 sections qui peuvent être coloriées en jaune.
Chacune des 3 sections restantes doit alors être coloriée en rouge.
Donc, le nombre total de colorations différentes du cercle est égal à $5 \times 4 = 20$.

Solution 2

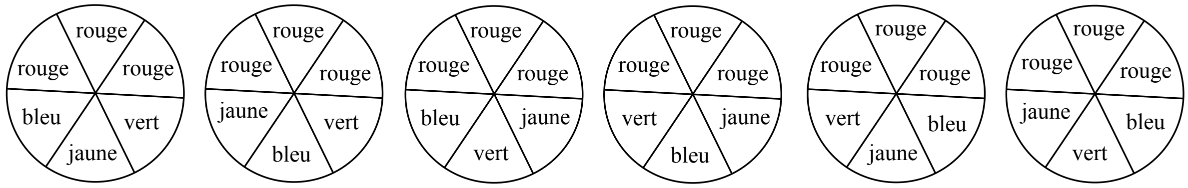
On considère d'abord l'emplacement des trois sections coloriées en rouge les unes par rapport aux autres.
Les trois sections rouges pourraient être adjacentes les unes aux autres, ou exactement deux sections rouges pourraient être adjacentes l'une à l'autre, ou aucune section rouge n'est adjacente à une autre section rouge.
On considère chacun de ces 3 cas séparément.

<u>1er cas</u> : Les trois sections rouges sont adjacentes les unes aux autres
D'abord, on colorie en rouge n'importe quelles trois sections qui sont adjacentes les unes aux autres.

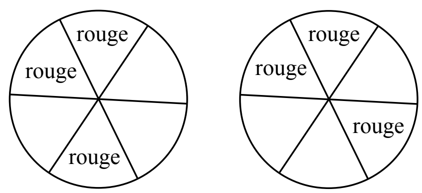


Puisque deux cercles ont la même coloration si l'on peut faire pivoter un des cercles pour qu'il corresponde à l'autre, on peut choisir de colorier en rouge n'importe quelles trois sections adjacentes.
On considère la première section qui suit les trois sections rouges lorsqu'on se déplace autour du cercle dans le sens des aiguilles d'une montre.
On a trois choix de couleur pour cette section : bleu, vert ou jaune.
Si l'on continue à se déplacer dans le sens des aiguilles d'une montre jusqu'à la section suivante, il y a maintenant 2 choix pour la couleur de cette section.
Enfin, il n'y a qu'un seul choix pour la couleur de la dernière section, il y a donc $3 \times 2 \times 1 = 6$ colorations différentes du cercle dans lequel les trois sections rouges sont adjacentes les unes aux autres.

On voit ces 6 colorations dans les figures ci-dessous.

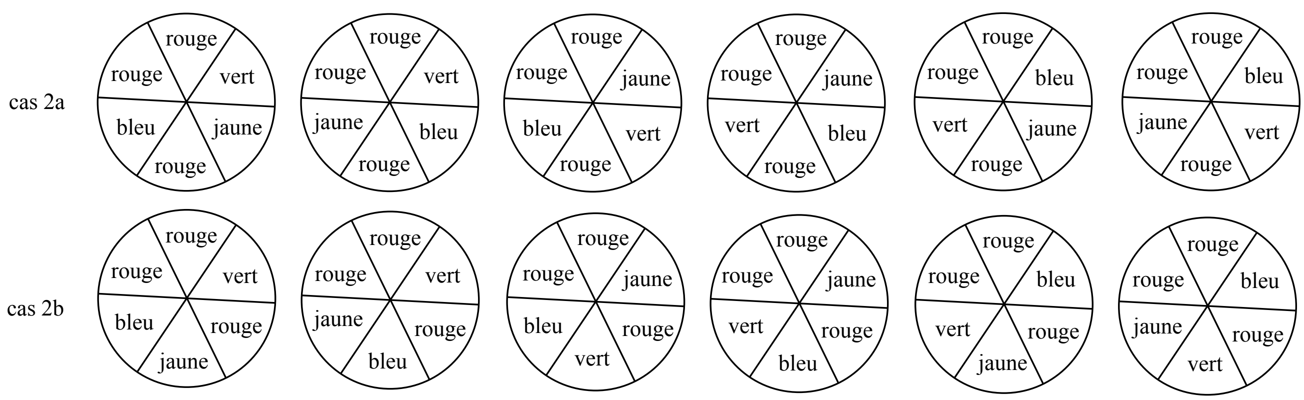


2^e cas : Exactement deux sections rouges sont adjacentes l'une à l'autre.
Il existe deux dispositions possibles dans lesquelles exactement deux sections rouges sont adjacentes l'une à l'autre.
Dans la première, les deux sections qui suivent les deux sections rouges adjacentes, en se déplaçant autour du cercle dans le sens des aiguilles d'une montre, ne sont pas rouges. Soit cela le cas 2a.
Dans la seconde, la section qui suit les deux sections rouges adjacentes, en se déplaçant autour du cercle dans le sens des aiguilles d'une montre, n'est pas rouge, mais la section suivante l'est. Soit cela le cas 2b.
On voit les dispositions des cas 2a et 2b dans les figures ci-dessous.

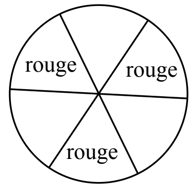


cas 2a cas 2b

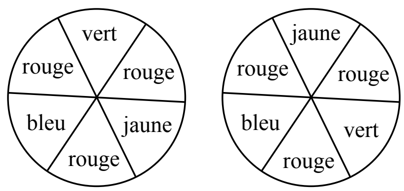
Remarquons que le premier cercle ne peut correspondre à l'autre peu importe la manière dont on le fait pivoter.
Le nombre de colorations dans le cas 2a et dans le cas 2b est égal au nombre de colorations dans le 1^{er} cas.
C'est-à-dire qu'il y a 3 choix pour la première section non coloriée qui suit les deux sections rouges lorsqu'on se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre autour du cercle.
En continuant à se déplacer dans le sens des aiguilles d'une montre jusqu'à la prochaine section non coloriée, il y a maintenant 2 choix pour la couleur de cette section.
Enfin, il y a 1 choix pour la couleur de la dernière section. Il y a donc $3 \times 2 \times 1 = 6$ colorations différentes du cercle dans le cas 2a ainsi que dans le cas 2b.
On voit ces 12 colorations dans les figures ci-dessous.



3^e cas : Aucune section rouge n'est adjacente à une autre section rouge
D'abord, on colorie en rouge trois sections non adjacentes.



Puisque deux cercles ont la même coloration si l'on peut faire pivoter un des cercles pour qu'il corresponde à l'autre, on peut choisir de colorier en rouge n'importe quelles trois sections non adjacentes.
Dans ce cas, il y a deux colorations possibles, comme on le voit dans les figures ci-dessous.

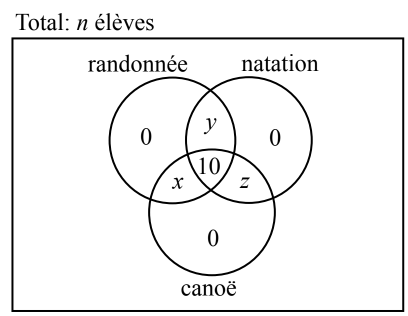


On peut faire pivoter un cercle avec n'importe quelle autre disposition des sections verte, jaune et bleue pour qu'il corresponde à l'un des deux cercles dans les figures ci-dessus.

En tout, il y a $6 + 12 + 2 = 20$ colorations différentes pour le cercle.

Réponse : (E)

25. On peut représenter les informations données dans un diagramme de Venn en introduisant d'abord quelques variables.
Soit x le nombre d'élèves ayant participé à la randonnée et au canoë et qui n'ont pas participé à la natation.
Soit y le nombre d'élèves ayant participé à la randonnée et à la natation et qui n'ont pas participé au canoë.
Soit z le nombre d'élèves ayant participé au canoë et à la natation et qui n'ont pas participé à la randonnée.
Puisque 10 élèves ont participé aux trois activités et qu'aucun élève n'a participé à moins de deux activités, alors on construit le diagramme de Venn ci-contre.



Supposons que n est le nombre d'élèves ayant participé à la sortie scolaire.
Puisque 50% des élèves ont participé au moins à la randonnée et au canoë, alors $\frac{50}{100}n$ ou $\frac{n}{2}$ élèves ont participé au moins à la randonnée et au canoë.
Puisque ce nombre d'élèves, $\frac{n}{2}$, est un entier, alors n doit être divisible par 2.
De même, $\frac{60}{100}n$ ou $\frac{3n}{5}$ élèves ont participé au moins à la randonnée et à la natation.
Puisque ce nombre d'élèves, $\frac{3n}{5}$, est un entier, alors n doit être divisible par 5 (puisque 3 et 5 n'ont aucun facteur en commun).
Cela signifie que n est divisible à la fois par 2 et par 5, d'où n est donc divisible par 10.
D'après le diagramme de Venn, on voit que $x + 10 = \frac{n}{2}$ et que $y + 10 = \frac{3n}{5}$.

Puisque n élèves en tout ont participé à la sortie scolaire, on a également $x+y+z+10=n$ ou $z=n-10-x-y$.
On peut désormais utiliser les équations

$$x=\frac{n}{2}-10,\ y=\frac{3n}{5}-10,\ \text{ et } z=n-10-x-y$$

et la propriété que n est divisible par 10, pour déterminer toutes les valeurs possibles de z.
On peut ensuite utiliser les valeurs de z pour déterminer toutes les valeurs possibles de l'entier strictement positif k, $k\%$ étant le pourcentage des élèves qui ont participé au moins au canoë et à la natation.

Puisque n est un entier strictement positif divisible par 10, sa plus petite valeur possible est 10. Cependant, lorsqu'on reporte $n=10$ dans l'équation $x=\frac{n}{2}-10$, on obtient $x=5-10$, d'où $x=-5$, ce qui n'est pas possible. (Rappelons que x est le nombre d'élèves ayant participé à la randonnée et au canoë et qui n'ont pas participé à la natation, donc $x\geq 0$.)
On essaie ensuite $n=20$.
Lorsque $n=20$, $x=10-10$, d'où $x=0$.
Lorsque $n=20$, $y=\frac{3\times 20}{5}-10$ ou $y=12-10$, d'où $y=2$.
Enfin, lorsque $n=20$, $x=0$ et $y=2$, on a $z=20-10-0-2=8$.
Lorsque $z=8$, le nombre d'élèves ayant participé au moins au canoë et à la natation est égal à $8+10=18$ (puisque 10 élèves ont participé aux trois activités). Donc, le pourcentage des élèves qui ont participé au moins au canoë et à la natation est égal à $\frac{18}{20}\times 100\%=90\%$, d'où $k=90$.
Dans le tableau ci-dessous, on poursuit ce processus en utilisant des multiples de 10 comme valeurs de n.

n	$x=\frac{n}{2}-10$	$y=\frac{3n}{5}-10$	$z=n-10-x-y$	$k=\frac{z+10}{n}\times 100$
20	0	2	8	$k=\frac{8+10}{20}\times 100=90$
30	5	8	7	$k=\frac{7+10}{30}\times 100\approx 56{,}7$
40	10	14	6	$k=\frac{6+10}{40}\times 100=40$
50	15	20	5	$k=\frac{5+10}{50}\times 100=30$
60	20	26	4	$k=\frac{4+10}{60}\times 100\approx 23{,}3$
70	25	32	3	$k=\frac{3+10}{70}\times 100\approx 18{,}6$
80	30	38	2	$k=\frac{2+10}{80}\times 100=15$
90	35	44	1	$k=\frac{1+10}{90}\times 100\approx 12{,}2$
100	40	50	0	$k=\frac{0+10}{100}\times 100=10$

Pour les valeurs de n supérieures à 100, on obtient $z < 0$, ce qui n'est pas possible.
Donc, la somme de tous les entiers strictement positifs k permissibles est égale à $90 + 40 + 30 + 15 + 10 = 185$.

Réponse : (B)

8e année

1. La fraction $\frac{1}{4}$ est équivalente à $1 \div 4 = 0{,}25$.

Réponse : (B)

2. D'après le diagramme, la vitesse prévue du vent est inférieure à 20 km/h les lundi, mardi, mercredi et dimanche.
Donc, au cours de cette période de 7 jours, Jacques pourra naviguer seul pendant 4 jours.

Réponse : (A)

3. On remarque que $15 \times 10 = 150$, $15 \times 2 = 30$, $15 \times 3 = 45$ et $15 \times 4 = 60$.
Puisqu'il n'existe pas un entier n tel que $15 \times n = 25$, alors 25 n'est pas un multiple de 15.

Réponse : (B)

4. Lorsqu'on place les entiers en ordre croissant, on a : $-9, -7, 0, 9, 10$.
Le troisième entier de la liste est 0.

Réponse : (D)

5. *Solution 1*
Si $2n = 14$, alors $n = \dfrac{14}{2} = 7$.
Lorsque $n = 7$, la valeur de $10n$ est égale à $10 \times 7 = 70$.

Solution 2
Lorsqu'on multiple les deux membres de l'équation par 5, on obtient $5 \times 2n = 5 \times 14$, d'où $10n = 70$.

Réponse : (C)

6. Il y a 6 résultats possibles lorsque Tallulah lance un dé standard une seule fois.
Parmi les 6 résultats possibles, 2 résultats sont perdants. Donc, la probabilité qu'elle perde est égale à $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Réponse : (A)

7. *Solution 1*
On peut réécrire l'addition dans l'énoncé du problème sous la forme d'une soustraction ; puisque $1013 + PQPQ = 2023$, alors $PQPQ = 2023 - 1013$.
La différence entre 2023 et 1013 est égale à $2023 - 1013 = 1010$. Donc, $P = 1$, $Q = 0$ et $P + Q = 1 + 0 = 1$.

Solution 2
Le chiffre des unités de la somme 2023 est égal à 3.
Donc, le chiffre des unités de la somme $3 + Q$ doit être égal à 3.
Puisque Q est un chiffre, la seule valeur possible de Q est 0.
Le chiffre des dizaines de la somme 2023 est égal à 2.
Puisqu'il n'y a pas de retenue dans la colonne des unités, alors la somme dans la colonne des

dizaines, soit $1 + P$, doit avoir un chiffre des unités égal à 2.
Puisque P est un chiffre, alors 1 est la seule valeur possible de P.
On peut vérifier que lorsque $P = 1$ et $Q = 0$, on obtient $1013 + 1010 = 2023$, ce qu'il fallait démontrer.
La valeur de $P + Q$ est égale à $1 + 0 = 1$.

Réponse : (B)

8. Supposons que la vinaigrette contenait initialement 300 mL d'huile.
Puisque la quantité d'huile et la quantité de vinaigre étaient dans un rapport de 3 : 1, alors la quantité de vinaigre dans la vinaigrette était égal au tiers de la quantité d'huile. C'est-à-dire que la vinaigrette contenait initialement $\frac{1}{3} \times 300$ mL $= 100$ mL de vinaigre (remarquons que $300 : 100 = 3 : 1$).
Si l'on double la quantité de vinaigre, le nouveau volume du vinaigre est égal à 2×100 mL $= 200$ mL. Donc, le nouveau rapport entre la quantité d'huile et la quantité de vinaigre est égal à $300 : 200 = 3 : 2$.
Remarquons que l'on a choisi de procéder comme si la quantité intiale d'huile était égale à 300 mL. Cependant, on aurait obtenu le même rapport de 3 : 2 à partir des calculs ci-dessus peu importe le volume initial d'huile.

Réponse : (A)

9. Avant de payer la taxe, les trois articles coûtent 4,20 \$ + 7,60 \$ + 3,20 \$ = 15,00 \$.
La taxe de 5 % qu'il faudra ajouter au coût de 15,00 \$ est donc égale à 0,05 × 15,00 \$ = 0,75 \$.
Donc, si l'on ajoutait une taxe de 5% au coût des trois articles, le coût total des trois articles serait égal à 15,00 \$ + 0,75 \$ = 15,75 \$.
Remarquons qu'on aurait pu calculer la taxe de 5 % sur chaque article individuellement, mais cela n'aurait pas été aussi efficace que de la calculer sur le total de 15,00 \$.

Réponse : (D)

10. Lorsque le point $(1, 3)$ subit une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, son image a pour coordonnées $(-1, 3)$.
En général, lorsqu'un point est réfléchi dans l'axe des ordonnées, son abscisse change de signe tandis que son ordonnée ne change pas.
Donc, les sommets du rectangle réfléchi ont pour coordonnées $(-1, 3)$, $(-1, 1)$, $(-4, 1)$ et $(-4, 3)$.
Parmi les choix de réponse, $(-3, 4)$ est le point qui n'est pas un sommet du rectangle réfléchi.

Réponse : (C)

11. Dans le rectangle le plus à gauche, la diagonale d (qui représente une partie du chemin) et les côtés de longueurs 3 et 4 forment un triangle rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, on a $d^2 = 3^2 + 4^2$, d'où $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ (remarquons que ce triangle est un triangle remarquable 3-4-5).
Le chemin de A à B comprend une telle diagonale, deux côtés verticaux de longueur 4 et trois côtés horizontaux de longueur 3. Le chemin de A à B a donc une longueur totale de $5 + (2 \times 4) + (3 \times 3) = 22$.

Réponse : (A)

12. Puisque l'angle PQR est un angle plat, alors $\angle PQR = 180°$, d'où on a donc $\angle SQR = 180° - 125° = 55°$.
Puisque $SQ = SR$, alors $\angle SRQ = \angle SQR = 55°$.
Puisque les mesures des angles du triangle SQR ont une somme de 180°, alors $x = 180 - 55 - 55 = 70$.

Réponse : (B)

13. On voit que le nombre de pêches dans le panier est égal à 2 de plus qu'un multiple de trois.
Parmi les choix de réponse, 29 est le seul nombre qui est égal à 2 de plus qu'un multiple de trois. $(29 = 3 \times 9 + 2)$.

Réponse : (D)

14. Chaque liste de 5 entiers a une somme de $4 - 3 + 2 - 1 + 0 = 2$.
Dans les 23 premiers entiers, la liste de 5 entiers se répète quatre fois, suivi de 3 entiers additionnels (puisque $23 = 4 \times 5 + 3$).
Donc, les 20 premiers entiers (soit la liste de 5 entiers qui se répète quatre fois) ont une somme de $4 \times 2 = 8$ et les vingt-et-unième, vingt-deuxième et vingt-troisième entiers sont respectivement $4, -3$ et 2.
Donc, la somme des 23 premiers entiers est égale à $8 + 4 - 3 + 2 = 11$.

Réponse : (D)

15. Les pneus du vélo de Bindu ont chacun une circonférence de $2 \times \pi \times 30$ cm $= 60\pi$ cm.
Si les pneus du vélo tournent exactement cinq fois, alors la distance parcourue est égale à $5 \times 60\pi$ cm $= 300\pi$ cm.

Réponse : (D)

16. *Solution 1*
La somme des 8 nombres de la liste est égale à $41 + 35 + 19 + 9 + 26 + 45 + 13 + 28 = 216$.
Lorsque les 8 nombres sont appariés, on a 4 paires.
Les nombres de chaque paire ont la même somme, cette somme est donc égale à $\dfrac{216}{4} = 54$.
Donc, le nombre apparié avec 13 est $54 - 13 = 41$.
Remarque : On peut confirmer que $45 + 9 = 54$, $41 + 13 = 54$, $35 + 19 = 54$ et $28 + 26 = 54$.

Solution 2
Puisque les nombres de chaque paire ont la même somme, le plus grand nombre de la liste doit être associé au plus petit nombre, le deuxième plus grand au deuxième plus petit et ainsi de suite. (Pouvez-vous expliquer pourquoi cela est vrai ?)
C'est-à-dire que le plus grand et le plus petit nombre de la liste, soit 45 et 9, doivent être appariés.
Le deuxième plus grand et le deuxième plus petit nombre, soit 41 et 13, doivent être appariés, d'où on voit donc que le nombre apparié avec 13 est 41.
Remarque : On peut confirmer que $45 + 9 = 54$, $41 + 13 = 54$, $35 + 19 = 54$ et $28 + 26 = 54$.

Réponse : (E)

17. La moyenne est déterminée en additionnant les 30 températures enregistrées et en divisant la somme par 30.
La températures des 25 premiers jours ont une somme de $25 \times 21°\text{C} = 525°\text{C}$.
Les températures des 5 derniers jours ont une somme de $5 \times 15°\text{C} = 75°\text{C}$.
Donc, la moyenne des températures enregistrées était égale à $\dfrac{525°\text{C} + 75°\text{C}}{30} = \dfrac{600°\text{C}}{30} = 20°\text{C}$.

Réponse : (C)

18. On écrit d'abord les plus petits diviseurs positifs à 2 chiffres de 630 en ordre croissant.
Remarquons qu'il est plus facile de déterminer les diviseurs de 630 si on exprime ce dernier sous la forme d'un produit de facteurs premiers ($630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$).
Parmi les diviseurs positifs de 2 chiffres de 630, les cinq les plus petits sont $10, 14, 15, 18$ et 21.
Le sixième diviseur positif de 2 chiffres dans la liste est 30. Remarquons que $21 \times 30 = 630$.
C'est-à-dire que 21 et 30 sont une paire d'entiers strictement positifs de 2 chiffres dont le produit est égal à 630. De plus, les deux entiers sont consécutifs dans la liste des diviseurs positifs à 2 chiffres de 630.
Donc, chacun des diviseurs $10, 14, 15, 18$ doit être apparié avec un diviseur de 630 supérieur à 30.
On peut vérifier que chacun des diviseurs qui est apparié avec les diviseurs $10, 14, 15, 18$ est un entier strictement positif de 2 chiffres en divisant 630 par le plus petit diviseur.
Autrement dit, $\frac{630}{18} = 35$, $\frac{630}{15} = 42$, $\frac{630}{14} = 45$ et $\frac{630}{10} = 63$.
Donc, les paires d'entiers strictement positifs de 2 chiffres dont le produit est 630 sont 21 et 30, 18 et 35, 15 et 42, 14 et 45, et 10 et 63. Il y a donc 5 telles paires.

Réponse : (D)

19. Entre 9 h et 10 h du matin, Raymond a tondu $\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$ de sa pelouse.
Raymond a tondu $\frac{3}{8}$ de sa pelouse en 1 heure (60 minutes). Il a donc tondu $\frac{1}{8}$ de sa pelouse en $\frac{60}{3}$ minutes, soit 20 minutes.
À 10 h, Raymond avait tondu $\frac{7}{8}$ de sa pelouse et il lui restait donc $1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$ de sa pelouse à tondre.
Puisque Raymond tond $\frac{1}{8}$ de sa pelouse en 20 minutes, il a terminé de tondre sa pelouse à 10 h 20.

Réponse : (C)

20. On place d'abord quatre tuiles dans les cases de la première rangée.
La seule restriction est que la rangée doit contenir une tuile de chaque couleur.
Donc, dans la première rangée, il existe 4 choix de couleur de tuile pour la première colonne, 3 choix pour la deuxième, 2 pour la troisième et 1 choix pour la quatrième.
Autrement dit, il existe $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ manières différentes de disposer les tuiles de la première rangée de sorte qu'elle contienne une tuile de chaque couleur.
Soit R, N, V et J respectivement les couleurs rouge, noire, verte et jaune. On pourrait avoir par exemple des tuiles $V \quad J \quad R \quad N$, dans cet ordre, dans la première rangée.
Supposons que la première rangée contienne effectivement des tuiles de couleurs $V \quad J \quad R \quad N$, dans cet ordre.
On va démontrer qu'il n'y a qu'une seule façon de disposer les 12 tuiles restantes dans le quadrillage.

Considérons la première case de la deuxième rangée, c'est-à-dire la case située directement audessous de la tuile de couleur V.
La tuile placée dans cette case ne peut être de couleur V puisqu'elle partage un côté avec la tuile de couleur V de la rangée 1.
De même, la tuile placée dans cette case ne peut être de couleur J puisqu'elle touche le coin de la case contenant la tuile de couleur J de la rangée 1.

Supposons que la tuile dans la première case de la rangée 2 soit de couleur N, comme dans la figure ci-contre.
Ensuite, considérons la couleur des tuiles qui pourraient être placées dans la deuxième case de la rangée 2.
La tuile placée dans cette case ne peut être de couleur J puisqu'elle partage un côté avec la tuile de couleur J de la rangée 1.
De même, la tuile placée dans cette case ne peut être de couleur V puisqu'elle touche le coin de la case contenant la tuile de couleur V de la rangée 1.

V	J	R	N
N			

De plus, la tuile placée dans cette case ne peut être de couleur R puisqu'elle touche le coin de la case contenant la tuile de couleur R de la rangée 1.
Puisque la première case de cette rangée contient une tuile de couleur N, alors aucune couleur de tuile ne peut être placée dans la deuxième case de la rangée 2.
Cela signifie que la tuile dans la première case de la rangée 2 ne peut être de couleur N et qu'elle doit donc être de couleur R, comme dans la figure ci-contre.
La tuile de la deuxième case de la rangée 2 ne peut être de couleur J ou V (comme on l'a remarqué précédemment) et doit donc être de couleur N.
En continuant vers la droite dans la rangée 2, la tuile suivante ne peut être de couleur Y puisqu'elle touche le coin de la case contenant la tuile de couleur J de la rangée 1, la tuile dans cette case doit donc être de couleur V. La dernière tuile de la rangée doit donc être de couleur J.

V	J	R	N
R			

C'est-à-dire que les positions des 4 tuiles de la rangée 2 sont entièrement déterminées par les tuiles de la rangée 1.
Donc, pour chacune des 24 manières différentes dont on peut disposer les tuiles de la rangée 1, il y a exactement une seule disposition pour les tuiles de la rangée 2.
On peut utiliser le même argument pour constater qu'il en va de même pour les tuiles de la rangée 3 et de la rangée 4 ; c'est-à-dire qu'il y a exactement un choix pour l'emplacement de chacune des couleurs dans chacune de ces deux rangées.
Dans la figure ci-contre, on a complété le quadrillage 4×4 que l'on avait présenté comme exemple dans la solution.
Pouvez-vous justifier pourquoi les rangées 3 et 4 doivent contenir les couleurs de tuiles indiquées ?
Donc, pour chacune des 24 manières différentes dont on peut disposer les tuiles de la rangée 1, il y a exactement une seule disposition pour les tuiles dans les cases restantes du quadrillage.
Donc, on peut disposer les tuiles de 24 façons différentes.

V	J	R	N
R	N	V	J
V	J	R	N
R	N	V	J

Réponse : (B)

21. Puisque OM est un rayon du cercle, alors $OM = 87$.
Le triangle MNO est rectangle. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a $OM^2 = MN^2 + NO^2$ ou $87^2 = 63^2 + NO^2$, d'où $NO^2 = 87^2 - 63^2 = 3600$.
Puisque $NO > 0$, alors $NO = \sqrt{3600} = 60$.

Puisque OP est également un rayon, alors $OP = 87$, d'où $NP = NO + OP = 60 + 87 = 147$.
L'aire du triangle PMN est égale à $\frac{1}{2} \times NP \times MN = \frac{1}{2} \times 147 \times 63 = 4630{,}5$.

Réponse : (D)

22. La vitesse moyenne de Nasrin est déterminée en divisant la distance totale parcourue (soit 9 km) par le temps total.
Le voyage aller lui a pris deux heures et trente minutes, soit 150 minutes.
Le voyage retour lui a pris $\frac{1}{3} \times 150$ minutes, soit 50 minutes.
Donc, le voyage aller-retour lui a pris 200 minutes, soit $3\frac{1}{3}$ heures (car 180 minutes font 3 heures et les 20 minutes restantes sont égales à $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ d'heure).
Donc, la vitesse moyenne de Nasrin pendant l'aller-retour était égale à $\frac{9 \text{ km}}{3\frac{1}{3} \text{ h}}$ ou $\frac{9 \text{ km}}{\frac{10}{3} \text{ h}}$, soit $9 \times \frac{3}{10}$ km/h $= \frac{27}{10}$ km/h $= 2{,}7$ km/h.

Réponse : (E)

23. Le volume d'eau dans le cylindre B est égal à $\pi \times (8 \text{ cm})^2 \times 50 \text{ cm} = 3200\pi \text{ cm}^3$.
Après avoir transvasé de l'eau du cylindre B au cylindre A, le volume total d'eau dans les deux cylindres est égal à 3200π cm^3 (puisqu'on ne perd pas d'eau en transvasant).
Soit h cm la profondeur de l'eau dans chacun des deux cyclindres après avoir transvasé de l'eau du cylindre B au cylindre A.
À ce moment-là, le volume d'eau dans le cylindre B est égal à $\pi \times (8 \text{ cm})^2 \times h \text{ cm} = 64\pi h \text{ cm}^3$ et le volume d'eau dans le cyclindre A est égal à $\pi \times (6 \text{ cm})^2 \times h \text{ cm} = 36\pi h \text{ cm}^3$.
Donc, le volume total d'eau dans les deux cylindres est égal à $64\pi h \text{ cm}^3 + 36\pi h \text{ cm}^3 = 100\pi h \text{ cm}^3$, d'où $100\pi h = 3200\pi$ ou $h = \frac{3200\pi}{100\pi} = 32$.
Après avoir transvasé de l'eau du cylindre B au cylindre A, la profondeur de l'eau est la même dans les deux cylindres, cette profondeur est de 32 cm.

Réponse : (C)

24. *Solution 1*
On multiplie d'abord chaque membre de l'équation par 20 pour obtenir $20 \times \frac{a}{4} + 20 \times \frac{b}{10} = 20 \times 7$, ou $5a + 2b = 140$.
Puisque $5a = 140 - 2b$ et que 140 et $2b$ sont tous deux pairs, alors $5a$ est pair, ce qui signifie que a est pair.
Essayons d'abord $a = 20$ et $b = 20$ (qui vérifient l'équation puisque $5 \times 20 + 2 \times 20 = 140$).
Cette paire d'entiers a et b vérifie toutes les conditions sauf $a < b$.
On peut trouver d'autres solutions à l'équation $5a + 2b = 140$ en ajoutant deux 5 et en soustrayant cinq 2 (ce qui revient à ajouter 10 et à soustraire 10), ou en soustrayant deux 5 et en ajoutant cinq 2.
Le fait d'ajouter deux 5 équivaut à augmenter de 2 la valeur de a.
Le fait de soustraire cinq 2 équivaut à diminuer de 5 la valeur de b.
Considérons $a = 20 + 2 = 22$ et $b = 20 - 5 = 15$.
Cette paire d'entiers a et b vérifie l'équation puisque $5 \times 22 + 2 \times 15 = 140$.
Cependant, dans ce cas, $a > b$ et à chaque fois que l'on ajoute deux 5 et que l'on soustrait cinq 2, a devient plus grand et b plus petit.
Donc, il faut aller dans l'autre sens.
Considérons $a = 20 - 2 = 18$ et $b = 20 + 5 = 25$.
Cette paire d'entiers a et b vérifie l'équation puisque $5 \times 18 + 2 \times 25 = 140$.
Dans ce cas, $a < b$ et $a + b = 43$, donc cette paire satisfait toutes les conditions.
Ensuite, considérons $a = 18 - 2 = 16$ et $b = 25 + 5 = 30$.

Cette paire d'entiers a et b vérifie l'équation puisque $5 \times 16 + 2 \times 30 = 140$.
Dans ce cas, $a < b$ et $a + b = 46$, donc cette paire satisfait toutes les conditions.
Remarquons que la somme $a + b$ augmente de 3 à chacune de ces étapes.
Donc, si l'on répète cela 17 fois, on a $a = 16 - 17 \times 2 = -18$ et $b = 30 + 17 \times 5 = 115$.
Cette paire d'entiers a et b vérifie l'équation puisque $5 \times (-18) + 2 \times 115 = 140$.
Remarquons que $a < b$ et $a + b < 100$ sont également vérifiés.
En répétant ce processus une fois de plus, on obtient $a = -20$ et $b = 120$, ce qui donne $a+b = 100$, il n'y a donc plus de paires d'entiers a et b admissibles.
Puisque l'on sait que a doit être pair et que l'on considère toutes les valeurs paires possibles de a, il ne peut y avoir d'autres paires qui vérifient les conditions.
Au total, il y a $1 + 1 + 17 = 19$ paires d'entiers a et b qui vérifient l'équation et les inéquations.

Solution 2
On manipule l'équation de manière à pouvoir isoler b :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{4} + \frac{b}{10} &= 7 \\
\frac{b}{10} &= 7 - \frac{a}{4} \\
10 \times \frac{b}{10} &= 10 \times 7 - 10 \times \frac{a}{4} \qquad \text{(on multiplie chaque terme par 10)} \\
b &= 70 - \frac{10a}{4} \\
b &= 70 - \frac{5a}{2}
\end{aligned}$$

Puisque b est un entier, alors $70 - \frac{5a}{2}$ est un entier, ce qui signifie que $\frac{5a}{2}$ doit être un entier.
Puisque 2 n'est pas un diviseur de 5, alors 2 doit être un diviseur de a, d'où a est donc pair.
Puisque $a < b$ et $b = 70 - \frac{5a}{2}$, alors

$$\begin{aligned}
a &< 70 - \frac{5a}{2} \\
2 \times a &< 2 \times 70 - 2 \times \frac{5a}{2} \qquad \text{(on multiplie chaque terme par 2)} \\
2a &< 140 - 5a \\
7a &< 140 \\
a &< 20
\end{aligned}$$

De plus, puisque $a + b < 100$ et $b = 70 - \frac{5a}{2}$, alors

$$\begin{aligned}
a + 70 - \frac{5a}{2} &< 100 \\
2 \times a + 2 \times 70 - 2 \times \frac{5a}{2} &< 2 \times 100 \qquad \text{(on multiplie chaque terme par 2)} \\
2a + 140 - 5a &< 200 \\
-60 &< 3a \\
-20 &< a
\end{aligned}$$

Donc, a est un entier pair supérieur à -20 et inférieur à 20.
Puisqu'il existe 19 entiers pairs compris entre -18 et 18 inclusivement, on soupçonne qu'il existe 19 paires d'entiers a et b qui vérifient l'équation donnée.
Une bonne idée serait de vérifier au moins que la plus grande et la plus petite de ces valeurs de a satisfont effectivement chacune des conditions données.
Lorsque $a = -18$, on a $b = 70 - \dfrac{5(-18)}{2}$ ou $b = 70 - 5(-9)$, d'où $b = 115$.
Cette paire satisfait aux conditions $a < b$ et $a + b < 100$.
Lorsqu'on reporte $a = -18$ et $b = 115$ dans l'équation donnée, on obtient

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{10} = \frac{-18}{4} + \frac{115}{10} = \frac{-9}{2} + \frac{23}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

On voit donc que $a = -18$ et $b = 115$ vérifient l'équation.
Lorsque $a = 18$, on a $b = 70 - \dfrac{5(18)}{2}$ ou $b = 70 - 5(9)$, d'où $b = 25$.
Ces valeurs vérifient les inéquations $a < b$ et $a + b < 100$.
Lorsqu'on reporte $a = 18$ et $b = 25$ dans l'équation donnée, on obtient

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{10} = \frac{18}{4} + \frac{25}{10} = \frac{9}{2} + \frac{5}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

On voit donc que $a = 18$ et $b = 25$ vérifient l'équation.
À ce stade, on peut être sûrs que pour chacune des 19 valeurs entières paires de a comprises entre -18 et 18 inclusivement, il existe un entier b pour lequel la paire d'entiers a et b satisfait chacune des conditions données et vérifie l'équation donnée.

Réponse : (B)

25. Pour tout triangle, la somme des longueurs de deux côtés est toujours supérieure à la longueur du troisième côté. Cette propriété s'appelle *l'inégalité triangulaire.*
Si par exemple les longueurs des côtés d'un triangle sont a, b et c, alors, d'après l'inégalité triangulaire,

$$a + b > c \text{ and } a + c > b \text{ and } b + c > a.$$

On considère d'abord le nombre de façons différentes de choisir trois entiers parmi $3, 4, 10, 13$ (sans utiliser n), puis de former un triangle dont les longueurs des côtés sont égales à ces entiers.
Considérons les trois entiers $3, 4, 10$.
Puisque $3 + 4 < 10$, il n'est pas possible de former un triangle dont les longueurs des côtés sont $3, 4, 10$.
Considérons les entiers $3, 4, 13$.
Puisque $3 + 4 < 13$, il n'est pas possible de former un triangle dont les longueurs des côtés sont $3, 4, 13$.
Considérons les entiers $3, 10, 13$.
Puisque $3 + 10 = 13$, il n'est pas possible de former un triangle dont les longueurs des côtés sont $3, 10, 13$.
Cependant, le dernier choix possible, soit $4, 10, 13$, remplit les conditions de l'inégalité triangulaire puisque $4 + 10 > 13$, $4 + 13 > 10$ et $10 + 13 > 4$.
Donc, sans utiliser la valeur de n, il existe exactement une façon de choisir trois entiers et de former un triangle dont les longueurs des côtés sont égales à ces entiers.
Cela signifie qu'il faut déterminer les valeurs de n pour lesquelles il existe exactement trois façons différentes de choisir deux entiers parmi les entiers 3,4, $10, 13$ et de former un triangle dont les

longueurs des côtés sont égales à ces deux entiers et à n.
Il existe six façons possibles de choisir deux entiers parmi les entiers $3, 4, 10, 13$.
Donc, pour chaque valeur de n, les triangles qu'il faut considérer ont pour longueurs de côtés : $3,4, n$ ou $3, 10, n$ ou $3, 13, n$ ou $4, 10, n$ ou $4, 13, n$ ou $10, 13, n$.
Pour chaque valeur de n, il faut qu'exactement trois triangles (parmi les six) satisfassent l'inégalité triangulaire.
On utilise ensuite l'inégalité triangulaire pour déterminer les restrictions sur n pour chacun des six groupes de triangles possibles.

Dans un triangle dont les longueurs des côtés sont $3, 4, n$, on obtient $3 + n > 4$ ou $n > 1$, et $3 + 4 > n$ ou $n < 7$, et $4 + n > 3$ ou $n > -1$.
Pour vérifier les trois inéquations, n doit être supérieur à 1 et inférieur à 7.
Donc, les valeurs possibles de n pour lesquelles un triangle a des côtés de longueurs $3, 4, n$ sont $n = 2, 3, 4, 5, 6$.
Puisque n doit être différent de tous les autres nombres de la liste, alors $n = 2, 5, 6$.

Dans un triangle dont les longueurs des côtés sont $3, 10, n$, on obtient $3 + n > 10$ ou $n > 7$, et $3 + 10 > n$ ou $n < 13$, et $10 + n > 3$ ou $n > -7$.
Pour vérifier les trois inéquations, n doit être supérieur à 7 et inférieur à 13.
Donc, les valeurs possibles de n pour lesquelles un triangle a des côtés de longueurs $3, 10, n$ sont $n = 8, 9, 11, 12$ ($n \neq 10$ puisque 10 est dans la liste).

Dans un triangle dont les longueurs des côtés sont $3, 13,n$, on obtient $3 + n > 13$ ou $n > 10$, et $3 + 13 > n$ ou $n < 16$, et $13 + n > 3$ ou $n > -10$.
Pour vérifier les trois inéquations, n doit être supérieur à 10 et inférieur à 16.
Donc, les valeurs possibles de n pour lesquelles un triangle a des côtés de longueurs $3, 13, n$ sont $n = 11, 12, 14, 15$ ($n \neq 13$ puisque 13 est dans la liste).

Dans un triangle dont les longueurs des côtés sont $4, 10, n$, on obtient $4 + n > 10$ ou $n > 6$, et $4 + 10 > n$ ou $n < 14$, et $10 + n > 4$ ou $n > -6$.
Pour vérifier les trois inéquations, n doit être supérieur à 6 et inférieur à 14.
Donc, les valeurs possibles de n pour lesquelles un triangle a des côtés de longueurs $4, 10, n$ sont $n = 7, 8, 9, 11, 12$.

Dans un triangle dont les longueurs des côtés sont $4, 13, n$, on obtient $4 + n > 13$ ou $n > 9$, et $4 + 13 > n$ ou $n < 17$, et $13 + n > 4$ ou $n > -9$.
Pour vérifier les trois inéquations, n doit être supérieur à 9 et inférieur à 17.
Donc, les valeurs possibles de n pour lesquelles un triangle a des côtés de longueurs $4, 13, n$ sont $n = 11, 12, 14, 15, 16$.

Dans un triangle dont les longueurs des côtés sont $10, 13, n$, on obtient $10 + n > 13$ ou $n > 3$, et $10 + 13 > n$ ou $n < 23$, et $13 + n > 10$ ou $n > -3$.
Pour vérifier les trois inéquations, n doit être supérieur à 3 et inférieur à 23.
Donc, les valeurs possibles de n pour lesquelles un triangle a des côtés de longueurs $10, 13, n$ sont $n = 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22$.

Rappelons que pour chaque valeur de n, il faut qu'exactement trois triangles (parmi les six) satisfassent l'inégalité triangulaure (le triangle dont les longueurs des côtés sont $4, 10, 13$ est le quatrième).
Il est clair que pour les valeurs de n inférieures à 7, il y a trop peu de triangles. Il en est de même pour les valeurs de n supérieures à 16. (Il y a au plus deux triangles dans chacun de ces deux cas.)
On résume notre travail au moyen du tableau ci-dessous (une coche indique que le triangle remplit les conditions de l'inégalité triangulaire).

n	(3,4,n)	(3,10,n)	(3,13,n)	(4,10,n)	(4,13,n)	(10,13,n)	(4,10,13)	nombre de triangles
7				✓		✓	✓	3
8		✓		✓		✓	✓	4
9		✓		✓		✓	✓	4
11		✓	✓	✓	✓	✓	✓	6
12		✓	✓	✓	✓	✓	✓	6
14			✓		✓	✓	✓	4
15			✓		✓	✓	✓	4
16					✓	✓	✓	3

Donc, il y a exactement quatre valeurs différentes de n qui remplissent les conditions données. La somme de ces valeurs de n est égale à $8 + 9 + 14 + 15 = 46$.

RÉPONSE : (A)