Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2023

le mercredi 5 avril 2023

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 6 avril 2023

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Une grille composée de 12 rangées et de 15 colonnes contient $12 \times 15 = 180$ pièces.

(b) *Solution 1*

Remarquons d'abord que les pièces centrales de chaque grille forment un rectangle.

Dans une grille qui comprend 6 rangées, la 1^re^ rangée et la 6^e^ rangée sont chacune composées entièrement de pièces de bord. Cette grille a donc $6 - 2 = 4$ rangées qui contiennent des pièces centrales.

Dans chacune de ces 4 rangées, la 1^re^ colonne et la 4^e^ colonne sont chacune composées entièrement de pièces de bord. La grille a donc $4 - 2 = 2$ colonnes qui contiennent des pièces centrales.

Donc, une grille composée de 6 rangées et de 4 colonnes contient une grille rectangulaire composée entièrement de pièces centrales. Cette grille rectangulaire est composée de 4 rangées et de 2 colonnes et contient donc $4 \times 2 = 8$ pièces centrales.

Solution 2

Une grille composée de 6 rangées et de 4 colonnes contient $6 \times 4 = 24$ pièces.

On va d'abord déterminer le nombre de pièces de bord, puis on va soustraire ce nombre de 24 pour déterminer le nombre de pièces centrales.

La première colonne de la grille contient 6 pièces de bord (puisqu'il y a 6 rangées) et la quatrième colonne de la grille contient également 6 pièces de bord.

La première rangée de la grille contient 4 pièces de bord (puisqu'il y a 4 colonnes).

Or, les première et dernière pièces de bord de cette rangée (soit le coin supérieur gauche et le coin supérieur droit de la grille) ont déjà été comptabilisées lorsque l'on a compté les pièces de bord dans les première et dernière colonnes. Il y a donc $4 - 2 = 2$ pièces de bord additionnelles dans la première rangée.

De même, il y a 2 pièces de bord additionnelles dans la sixième rangée.

Donc, la grille contient $6 + 6 + 2 + 2 = 16$ pièces de bord et contient donc $24 - 16 = 8$ pièces centrales.

(c) Puisque 14 a deux paires de facteurs possibles, soit 1 et 14 ou 2 et 7, alors la grille rectangulaire formée de pièces centrales sera composée soit de 1 rangée et de 14 colonnes (ou vice versa), soit de 2 rangées et de 7 colonnes (ou vice versa).

Si la grille rectangulaire formée de pièces centrales a 1 rangée, alors le casse-tête aura $1 + 2 = 3$ rangées puisqu'il y aura forcément une rangée de pièces de bord au-dessus et au-dessous de la rangée de pièces centrales.

De même, si la grille rectangulaire formée de pièces centrales a 14 colonnes, alors le casse-tête aura $14 + 2 = 16$ colonnes puisqu'il y aura forcément une colonne de pièces de bord à la fois à droite et à gauche des pièces centrales.

Dans ce cas, le casse-tête sera composé de 3 rangées et de 16 colonnes (ou vice versa) et contiendra donc $3 \times 16 = 48$ pièces.

Un casse-tête qui contient 48 pièces, dont 14 sont des pièces centrales, comprend donc $48 - 14 = 34$ pièces de bord.

Si la grille rectangulaire formée de pièces centrales a 2 rangées, alors le casse-tête aura $2 + 2 = 4$ rangées, comme dans le cas ci-dessus.

De même, si la grille rectangulaire formée de pièces centrales a 7 colonnes, alors le casse-tête aura $7 + 2 = 9$ colonnes.

Dans ce cas, le casse-tête sera composé de 4 rangées et de 9 colonnes (ou vice versa) et contiendra donc $4 \times 9 = 36$ pièces.

Un casse-tête qui contient 36 pièces, dont 14 sont des pièces centrales, comprend donc $36 - 14 = 22$ pièces de bord. Donc, les valeurs de s et t sont 34 et 22.

(d) Une grille composée de 5 rangées et de c colonnes contient $5c$ pièces.
Une grille composée de 5 rangées et de c colonnes contient une grille rectangulaire formée de pièces centrales. Celle-ci est composée de $5-2=3$ rangées et de $c-2$ colonnes et contient donc $3(c-2)$ pièces centrales.
Puisque le nombre de pièces de bord est égal au nombre de pièces centrales, alors le nombre total de pièces est le double du nombre de pièces centrales.
Donc, $5c = 2 \times 3(c-2)$ ou $5c = 6(c-2)$, d'où on a donc $5c = 6c - 12$ ou $c = 12$.

2. (a) Si le premier terme est 7, alors le deuxième terme est $7+3=10$ (puisque 7 est impair, on ajoute 3).
Si le deuxième terme est 10, alors le troisième terme est $10+4=14$ (puisque 10 est pair, on ajoute 4).
De même, le quatrième terme est $14+4=18$ et le cinquième terme est $18+4=22$.
Si le premier terme d'une suite Ing est 7, alors le cinquième terme de la suite sera 22.

(b) Si un terme, soit x, est impair, alors le terme suivant sera $x+3$. Ce terme est pair puisque la somme de deux entiers impairs est un entier pair.
Si un terme, soit x, est pair, alors le terme suivant sera $x+4$. Ce terme est pair puisque la somme de deux entiers pairs est un entier pair.
Donc, dans une suite Ing, chaque terme après le premier est un entier pair.
Donc, si le cinquième terme est 62, le quatrième terme ne peut égaler $62-3=59$ (puisque 59 est impair) et doit donc égaler $62-4=58$.
De même, le troisième terme est $58-4=54$ et le deuxième terme est $54-4=50$.
Si le premier terme est un entier pair, alors le premier terme doit égaler $50-4=46$. Cependant, si le premier terme est un entier impair, alors le premier terme doit égaler $50-3=47$.
Donc, si le cinquième terme d'une suite Ing est 62, alors le premier terme peut être 46 (les termes de la suite étant 46, 50, 54, 58, 62) ou 47 (les termes de la suite étant 47, 50, 54, 58, 62).

(c) Si le premier terme d'une suite Ing est 49, alors le deuxième terme est $49+3=52$. On voit donc que chaque terme, après le deuxième, est obtenu en ajoutant 4 au terme précédent.
Cela signifie que pour chaque entier strictement positif k, il existe un terme de la forme $52+4k$ dans la suite.
Puisque $52+4k = 4(13+k)$, alors chacun des termes restants de la suite est un multiple de 4.
Donc, les multiples de 4 qui sont à la fois supérieurs à 318 et inférieurs à 300 sont $320 = 4 \times 80$, $324 = 4 \times 81$ et $328 = 4 \times 82$.

(d) Si le nombre 18 parait quelque part dans une suite Ing après le premier terme, alors le terme qui précède 18 est soit $18-3=15$, soit $18-4=14$.
Chacune de ces valeurs est une valeur possible de n (le premier terme de la suite).
Comme on l'a démontré dans la partie (b), chaque terme après le premier est un entier pair. Donc, si le nombre 15 parait dans une suite Ing, il peut uniquement paraitre comme premier terme de la suite.
Puisque 14 est pair, ce nombre peut être le premier terme de la suite mais peut également être un terme qui parait après le premier terme.
Si le nombre 14 parait quelque part après le premier terme, alors le terme qui le précède est soit $14-3=11$, soit $14-4=10$.
Chacune de ces valeurs est une valeur possible de n.
Si le nombre 11 parait dans une suite Ing, il peut uniquement paraitre comme premier terme de la suite (puisque 11 est impair).

Puisque 10 est pair, ce nombre peut être le premier terme de la suite mais peut également être un terme qui parait après le premier terme.
Si le nombre 10 parait quelque part après le premier terme, alors le terme qui le précède est soit $10 - 3 = 7$, soit $10 - 4 = 6$.
Chacune de ces valeurs est une valeur possible de n.
Si le nombre 7 parait dans une suite Ing, il peut uniquement paraitre comme premier terme de la suite.
Puisque 6 est pair, ce nombre peut être le premier terme de la suite mais peut également être un terme qui parait après le premier terme.
Si le nombre 6 parait quelque part après le premier terme, alors le terme qui le précède est soit $6 - 3 = 3$, soit $6 - 4 = 2$.
Chacune de ces valeurs est une valeur possible de n.
Si le nombre 3 parait dans une suite Ing, il peut uniquement paraitre comme premier terme de la suite.
Si le nombre 2 parait dans une suite Ing, alors 2 doit également être le premier terme de la suite puisque $2 - 3 = -1$ et $2 - 4 = -2$ ne sont pas des entiers strictement positifs.
Donc, si le nombre 18 parait quelque part dans une suite Ing après le premier terme, les valeurs possibles du premier terme n sont 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14 et 15.

3. (a) La droite d'équation $x = a$ coupe la droite d'équation $y = x$ au point (a, a).
Donc, la hauteur du triangle et la longueur de sa base sont toutes deux égales à a. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2} \times a \times a$.
On a donc $\frac{1}{2}a^2 = 32$, d'où on a $a^2 = 64$ ou $a = 8$ (puisque $a > 0$).

(b) *Solution 1*
La droite d'équation $x = 10$ coupe la droite d'équation $y = 2x$ au point $(10, 20)$.
La droite d'équation $x = 4$ coupe la droite d'équation $y = 2x$ au point $(4, 8)$.
Donc, le trapèze a des côtés parallèles de longueurs 20 et 8. De plus, la distance entre les côtés parallèles est égale à $10 - 4 = 6$.
L'aire du trapèze est égale à $\frac{6}{2}(20 + 8) = 3(28)$, ce qui est égal à 84.

Solution 2
Si T, B et A sont respectivement l'aire du trapèze, l'aire du petit triangle non ombré et l'aire du triangle initial, alors $T = A - B$.
La droite d'équation $x = 4$ coupe la droite d'équation $y = 2x$ au point $(4, 8)$.
Donc, la hauteur du petit triangle non ombré est égale à 8 et la longueur de sa base est égale à 4. On a donc $B = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$.
La droite d'équation $x = 10$ coupe la droite d'équation $y = 2x$ au point $(10, 20)$.
Donc, la hauteur du triangle initial est égale à 20 et la longueur de sa base est égale à 10. On a donc $A = \frac{1}{2} \times 10 \times 20 = 100$.
Donc, l'aire du trapèze ombré est égale à $T = A - B$ ou $T = 100 - 16$, soit 84.

(c) *Solution 1*
On détermine d'abord l'aire du trapèze.
La droite d'équation $x = 21$ coupe la droite d'équation $y = 3x$ au point $(21, 63)$.
La droite d'équation $x = c$ coupe la droite d'équation $y = 3x$ au point $(c, 3c)$.
Donc, le trapèze a des côtés parallèles de longueurs 63 et $3c$. De plus, la distance entre les côtés parallèles est égale à $21 - c$ (puisque $0 < c < 21$).

L'aire du trapèze est égale à $\dfrac{21-c}{2}(63+3c)$.

Ensuite, on détermine l'aire du petit triangle.
Si la longueur de sa base est égale à c, alors sa hauteur est égale à $3c$. L'aire du petit triangle est donc égale à $\dfrac{1}{2} \times c \times 3c = \dfrac{1}{2} \times 3c^2$.

L'aire du trapèze est égale à 8 fois l'aire du petit triangle.
On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{21-c}{2}(63+3c) &= 8 \times \frac{1}{2} \times 3c^2 \\
(21-c)(63+3c) &= 8 \times 3c^2 \\
(21-c)(21+c) &= 8 \times c^2 \\
441 - c^2 &= 8c^2 \\
441 &= 9c^2 \\
c^2 &= 49
\end{aligned}$$

d'où $c = 7$ (puisque $c > 0$).

Solution 2
Si T, B et A sont respectivement l'aire du trapèze, l'aire du petit triangle et l'aire du triangle initial, alors $T = A - B$.
L'aire du trapèze est égale à 8 fois l'aire du petit triangle, soit $T = 8B$.
Lorsqu'on reporte $T = 8B$ dans l'équation $T = A - B$, on obtient $8B = A - B$ ou $9B = A$.

La droite d'équation $x = 21$ coupe la droite d'équation $y = 3x$ au point $(21, 63)$.
Donc, $A = \dfrac{1}{2} \times 21 \times 63 = \dfrac{1323}{2}$.
La droite d'équation $x = c$ coupe la droite d'équation $y = 3x$ au point $(c, 3c)$.
Donc, $B = \dfrac{1}{2} \times c \times 3c = \dfrac{3c^2}{2}$.

Lorsqu'on reporte $B = \dfrac{3c^2}{2}$ dans l'équation $9B = A$, on obtient

$$\begin{aligned}
9 \times \frac{3c^2}{2} &= \frac{1323}{2} \\
27c^2 &= 1323 \\
c^2 &= 49
\end{aligned}$$

d'où $c = 7$ (puisque $c > 0$).

(d) *Solution 1*
Comme on l'a démontré dans les parties (b) et (c), la droite verticale d'équation $x = p$ coupe le triangle initial en un trapèze et un petit triangle.
On détermine d'abord l'aire du trapèze.
La droite d'équation $x = 1$ coupe la droite d'équation $y = 4x$ au point $(1, 4)$.
La droite d'équation $x = p$ coupe la droite d'équation $y = 4x$ au point $(p, 4p)$.
Donc, le trapèze a des côtés parallèles de longueurs 4 et $4p$. De plus, la distance entre les côtés parallèles est égale à $1 - p$ (puisque $0 < p < 1$).

L'aire du trapèze est égale à $\dfrac{1-p}{2}(4+4p)$.

Ensuite, on détermine l'aire du petit triangle.
Si la longueur de sa base est égale à p, alors sa hauteur est égale à $4p$. L'aire du petit triangle est donc égale à $\frac{1}{2} \times p \times 4p = \frac{1}{2} \times 4p^2$.

La droite d'équation $x = p$ coupe le triangle initial en deux parties de même aire. Donc, l'aire du trapèze est égale à l'aire du petit triangle.
On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{1-p}{2}(4+4p) &= \frac{1}{2} \times 4p^2 \\
(1-p)(4+4p) &= 4p^2 \\
(1-p)(1+p) &= p^2 \\
1-p^2 &= p^2 \\
1 &= 2p^2 \\
p^2 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

d'où $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (puisque $p > 0$).

Ahmed répète le processus en traçant une deuxième droite verticale d'équation $x = q$ telle que $0 < q < p$.
On veut déterminer la valeur de q en fonction de p afin de pouvoir utiliser cette relation pour déterminer la position de la 12^{e} droite verticale (sans avoir à répéter ces calculs 12 fois).

Autrement dit, on cherche à répéter le processus ci-dessus sans substituer $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ afin de pouvoir déterminer la valeur de q en fonction de p.

La droite verticale d'équation $x = q$ coupe le triangle borné par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = 4x$ et $x = p$ en un nouveau trapèze et un nouveau petit triangle.
On détermine d'abord l'aire du trapèze.
La droite d'équation $x = p$ coupe la droite d'équation $y = 4x$ au point $(p, 4p)$.
La droite d'équation $x = q$ coupe la droite d'équation $y = 4x$ au point $(q, 4q)$.
Donc, le trapèze a des côtés parallèles de longueurs $4p$ et $4q$. De plus, la distance entre les côtés parallèles est égale à $p - q$ (puisque $0 < q < p$).

L'aire du trapèze est égale à $\frac{p-q}{2}(4p + 4q)$.

Ensuite, on détermine l'aire du nouveau petit triangle.
Si la longueur de sa base est égale à q, alors sa hauteur est égale à $4q$. L'aire du nouveau petit triangle est donc égale à $\frac{1}{2} \times q \times 4q = \frac{1}{2} \times 4q^2$.

La droite d'équation $x = q$ coupe le triangle précédent en deux parties de même aire. Donc, l'aire du trapèze est égale à l'aire du nouveau petit triangle.

On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{p-q}{2}(4p+4q) &= \frac{1}{2}\times 4q^2\\
(p-q)(4p+4q) &= 4q^2\\
(p-q)(p+q) &= q^2\\
p^2-q^2 &= q^2\\
p^2 &= 2q^2\\
q^2 &= \frac{1}{2}\times p^2
\end{aligned}$$

d'où $q = \frac{1}{\sqrt{2}}\times p$ (puisque $q > 0$).

On voit donc que si Ahmed trace une droite verticale d'équation $x = n$ (avec $n > 0$ et n étant inférieur à l'abscisse à l'origine de la droite verticale tracée précédemment), alors la droite verticale suivante qu'il tracera aura pour équation $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\times n$ (puisque le processus se répète).

Puisque la droite verticale initiale a pour équation $x = 1$, alors la 12^{e} droite qu'il trace a pour équation $x = 1\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{12}$ ou $x = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^6$ ou $x = \left(\frac{1}{2}\right)^6$. Donc, $k = \frac{1}{64}$.

Solution 2

Comme on l'a démontré dans les parties (b) et (c), la droite verticale d'équation $x = p$ coupe le triangle initial en un trapèze et un petit triangle.

La droite d'équation $x = 1$ coupe la droite d'équation $y = 4x$ au point $(1, 4)$. Donc, l'aire du triangle initial est égale à $\frac{1}{2}\times 1\times 4 = 2$.

La droite d'équation $x = p$ coupe la droite d'équation $y = 4x$ au point $(p, 4p)$. Donc, l'aire du petit triangle est égale à $\frac{1}{2}\times p\times 4p = 2p^2$.

L'aire du petit triangle est égale à la moitié de l'aire du triangle initial. Donc, $2p^2 = 1$ ou $p^2 = \frac{1}{2}$, d'où $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (puisque $p > 0$).

Ahmed répète le processus en traçant une deuxième droite verticale d'équation $x = q$ telle que $0 < q < p$.

On veut déterminer la valeur de q en fonction de p afin de pouvoir utiliser cette relation pour déterminer la position de la 12^{e} droite verticale (sans avoir à répéter ces calculs 12 fois).

Autrement dit, on cherche à répéter le processus ci-dessus sans substituer $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ afin de pouvoir déterminer la valeur de q en fonction de p.

La droite verticale d'équation $x = q$ coupe le triangle borné par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = 4x$ et $x = p$ en un nouveau trapèze et un nouveau petit triangle.

Comme on l'a démontré précédemment, l'aire du triangle borné par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = 4x$ et $x = p$ est égale à $2p^2$.

La droite d'équation $x = q$ coupe la droite d'équation $y = 4x$ au point $(q, 4q)$. Donc, l'aire du nouveau petit triangle est égale à $\frac{1}{2}\times q\times 4q = 2q^2$.

L'aire du nouveau petit triangle est égale à la moitié de l'aire du triangle précédent. Donc,

$2q^2 = \dfrac{2p^2}{2}$ ou $q^2 = \dfrac{1}{2} \times p^2$, d'où $q = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times p$ (puisque $q > 0$).
On voit donc que si Ahmed trace une droite verticale d'équation $x = n$ (avec $n > 0$ et n étant inférieur à l'abscisse à l'origine de la droite verticale tracée précédemment), alors la droite verticale suivante qu'il tracera aura pour équation $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times n$ (puisque le processus se répète).
Puisque la droite verticale initiale a pour équation $x = 1$, alors la 12^{e} droite qu'il trace a pour équation $x = 1 \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{12}$ ou $x = \left(\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^6$ ou $x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^6$. Donc, $k = \dfrac{1}{64}$.

Solution 3
Ahmed trace la 12^{e} droite verticale à $x = k$.
La droite d'équation $x = k$ coupe la droite d'équation $y = 4x$ au point $(k, 4k)$. Donc, l'aire du nouveau triangle à gauche de cette droite est égale à $\dfrac{1}{2} \times k \times 4k = 2k^2$.
Puisque l'aire de chaque nouveau triangle est la moitié de l'aire du triangle précédent, alors le triangle d'aire $2k^2$ a une aire qui est égale à $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{12}$ de l'aire du triangle initial.
La droite d'équation $x = 1$ coupe la droite d'équation $y = 4x$ au point $(1, 4)$. Donc, l'aire du triangle initial est égale à $\dfrac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2$.
On a donc

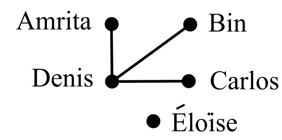
$$\begin{aligned} 2k^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \times 2 \\ k^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \\ k &= \left(\frac{1}{2}\right)^{6} \end{aligned}$$

d'où $k = \dfrac{1}{64}$.

4. (a) *Solution 1*
Amrita a serré la main d'exactement 1 personne, Bin et Carlos ont serré la main d'exactement 2 personnes chacun et Denis a serré la main d'exactement 3 personnes. Donc, à première vue, $1 + 2 + 2 + 3 = 8$ poignées de main ont été données. Or, chacune de ces poignées de main a été comptée deux fois.
C'est-à-dire que lorsque la personne X serre la main de la personne Y, la personne Y serre la main de la personne X et donc cette poignée de main est comptée deux fois.
De façon générale, si S et N représentent respectivement la somme du nombre de mains que chaque personne a serrées et le nombre de poignées de main qui ont été données, alors $N = S \div 2$.
Donc, en tout, $8 \div 2 = 4$ poignées de main ont été données.

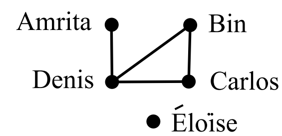
Solution 2
Denis a serré la main d'exactement 3 personnes et Éloïse n'a serré la main de personne.
Donc, Denis a dû serrer la main d'Amrita, de Bin et de Carlos (et Amrita, Bin et Carlos ont chacun serré la main de Denis).

Si l'on représente une poignée de main par un segment de droite qui relie 2 personnes, alors on voit dans la figure ci-contre les poignées de main que l'on a compté jusqu'à maintenant.



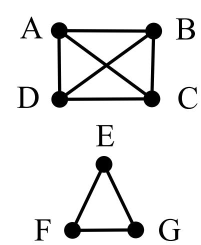
D'après la figure, Amrita a pris part à 1 poignée de main, Denis a pris part à 3 poignées de main et Éloïse a pris part à 0 poignée de main. Donc, toutes les poignées de main auxquelles Amrita, Denis et Éloïse ont pris part ont été comptabilisées.

Bin et Carlos ont serré la main d'exactement 2 personnes chacun. Donc, en ce qui concerne leurs secondes poignées de main, celles-ci ont dû se produire entre eux deux (car ces poignées de main ne peuvent avoir eu lieu avec Amrita, Denis ou Éloïse).
Dans la figure ci-contre, on voit les poignées de main qui ont été données. Il y avait en tout 4 poignées de main qui ont été données.



(b) Comme dans la partie (a) de la Solution 1, si 9 personnes ont serré la main d'exactement 3 personnes chacune, alors $S = 9 \times 3 = 27$, d'où le nombre total de poignées de main qui ont été données est égal à $N = 27 \div 2 = 13{,}5$.
Sachant que le nombre total de poignées de main qui ont été données doit être un entier, alors il n'est pas possible que chacune des 9 personnes ait serré la main d'exactement 3 autres personnes.

(c) Supposons que les lettres A, B, C, D, E, F et G représentent les 7 personnes.
Si A, B, C et D ont chacun serré la main des trois autres personnes, si E, F et G ont chacun serré la main des deux autres personnes et si aucune autre poignée de main n'a été donnée, alors 9 poignées de main ont été données en tout, comme on le voit dans la figure ci-contre.



On va démontrer que cet ensemble de 9 poignées de main remplit les conditions données, qu'un nombre inférieur de poignées de main ne peut remplir ces conditions et donc que $m = 9$.

D'abord, on va expliquer pourquoi l'ensemble des 9 poignées de main illustrées dans la figure satisfait la condition selon laquelle au moins une poignée de main a été donnée dans chaque groupe de 3 personnes.
Soit A, B, C, D les membres du Groupe 1 et E, F, G les membres du Groupe 2.
Dans tout groupe de 3 personnes choisies parmi les 7 personnes, soit les 3 personnes appartiennent au Groupe 1, soit les 3 personnes appartiennent au Groupe 2, soit 1 personne appartient à l'un des deux groupes et 2 personnes appartiennent à l'autre groupe.
C'est-à-dire qu'au moins 2 des 3 personnes choisies doivent appartenir soit au Groupe 1, soit au Groupe 2.
Puisqu'une poignée de main est donnée entre chaque paire de personnes du Groupe 1 et entre chaque paire de personnes du Groupe 2, et que chaque groupe de 3 personnes doit contenir au moins 2 personnes du même groupe, alors au moins une poignée de main a été donnée dans chaque groupe de 3 personnes.

Ensuite, on va expliquer pourquoi un nombre inférieur de poignées de main ne peut remplir

ces conditions.
On définit S et N de la même manière que dans la partie (a) de la Solution 1.
Supposons que $N \leq 8$.
Puisque chaque poignée de main se produit entre 2 personnes et que $N \leq 8$, alors S est au plus $8 \times 2 = 16$.
Si chacune des 7 personnes a serré 3 mains ou plus, alors S serait supérieur ou égal à $7 \times 3 = 21$.
Puisque S est au plus 16, alors au moins une des 7 personnes a serré la main de 2 personnes ou moins.
Supposons que ce soit E qui ait serré la main de 2 personnes ou moins. (Il se peut que ce ne soit pas E mais, quel que soit le cas, le raisonnement est identique.)
Alors au moins 4 personnes n'ont pas serré la main de E.
Supposons que A, B, C, D n'aient pas serré la main de E. (Encore une fois, le raisonnement est le même peu importe l'identité des quatre personnes.)
Dans ce cas, chaque paire de personnes du groupe A, B, C, D doit s'être serré la main, sinon la paire qui ne s'est pas serré la main forme, avec E, un groupe de 3 personnes dans lequel aucune poignée de main n'a été donnée.
Puisque chaque paire de personnes du groupe A, B, C, D s'est serré la main, 6 poignées de main ont été données dans ce groupe (A et B, A et C, A et D, B et C, B et D, C et D).
Puisque N est au plus 8, alors E, F et G participent au plus à $8 - 6 = 2$ poignées de main au total.
C'est-à-dire que E, F, G peuvent participer à 0, 1 ou 2 poignées de main, ce qui donne 3 cas à considérer.

1er cas : Aucune paire de personnes dans le groupe E, F, G ne s'est serré la main
Si aucune paire de personnes dans le groupe E, F, G ne s'est serré la main, alors il s'agit d'un groupe de 3 personnes dans lequel aucune poignée de main n'a été donnée.

2e cas : Exactement une paire de personnes dans le groupe E, F, G s'est serrée la main
Dans ce cas, il y a au plus une poignée de main qui est donnée entre l'une des personnes E, F, G, et l'une des personnes A, B, C, D.
Supposons que E et F se soient serré la main (l'argument est valable pour n'importe quelle paire de personnes que l'on peut choisir parmi E, F, G).
Il y a au moins une personne dans le groupe A, B, C, D qui n'a pas serré la main de F et qui n'a pas serré la main de G. Il s'agit donc d'un groupe de 3 personnes dans lequel aucune poignée de main n'a été donnée.

3e cas : Exactement deux paires de personnes dans le groupe E, F, G se sont serrées la main.
Supposons que E et F se soient serré la main et que E et G se soient serré la main (l'argument est valable peu importe les paires que l'on choisit parmi E, F, G).
Dans ce cas, F, G et l'une des personnes parmi A, B, C, D constituent un groupe de 3 personnes dans lequel aucune poignée de main n'a été donnée.

Donc, il n'est pas possible d'avoir 8 ou moins poignées de main qui ont été données. Donc, $m = 9$.