



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 22 février 2023

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 23 février 2023

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée: 60 minutes

©2023 University of Waterloo

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Les parties A et B du concours sont composées de questions à choix multiple. Chacune de ces questions est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. La réponse juste à chaque question de la partie C est un entier de 0 à 99 inclusivement. Après avoir décidé de votre réponse, remplissez les deux cercles appropriés sur la feuille-réponse. Une réponse à un chiffre (p. ex. $\langle 7 \rangle$) doit être codée avec un zéro non significatif ($\langle 07 \rangle$).
8. Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C. Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée. Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
9. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
10. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
11. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.

On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

- Quelle est la valeur de $0,3 + 0,03$?
(A) 0,303 (B) 0,6 (C) 3,3 (D) 0,33 (E) 0,06
- Sachant que $3 + x = 5$ et $-3 + y = 5$, quelle est la valeur de $x + y$?
(A) 4 (B) 16 (C) 6 (D) 12 (E) 10
- Sachant que $x = 2$, quelle est la valeur de $2x^2 + 3x^2$?
(A) 14 (B) 10 (C) 12 (D) 22 (E) 20
- Parmi les nombres suivants, lequel est le plus près du nombre de minutes dans une semaine ?
(A) 100 (B) 1000 (C) 10 000 (D) 100 000 (E) 1 000 000
- La machine d'Ava accepte comme entrée des entiers strictement positifs de quatre chiffres. Si l'on présente l'entier de quatre chiffres $ABCD$ comme entrée, on obtient l'entier $A \times B + C \times D$ comme sortie. Par exemple, si l'on présente l'entier 1234 comme entrée, on obtient l'entier $1 \times 2 + 3 \times 4 = 2 + 12 = 14$ comme sortie. Si l'on présente l'entier 2023 comme entrée, quel entier obtiendra-t-on comme sortie ?
(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 6 (E) 8
- Vivek peint trois portes, soit les portes 1, 2 et 3. Chaque porte doit être peinte d'une seule couleur : noir ou bleu. Une possibilité est que la porte 1 soit peinte en noir, la porte 2 en bleu et la porte 3 en bleu. En tout, combien y a-t-il de façons différentes de peindre les trois portes ?
(A) 8 (B) 7 (C) 5 (D) 4 (E) 3
- On achète des collations pour 17 joueurs de soccer. Les boîtes de jus sont vendues en paquets de 3 et coûtent 2,00 \$ le paquet. Les pommes sont vendues en sacs de 5 et coûtent 4,00 \$ le sac. Daniel veut acheter suffisamment de paquets de jus et de sacs de pommes pour que chaque joueur reçoive une boîte de jus et une pomme. Quel est le montant minimum qu'il doit dépenser ?
(A) 26,00 \$ (B) 28,00 \$ (C) 24,00 \$ (D) 30,00 \$ (E) 36,00 \$
- Deux amis parcourent un trajet de 30 km à vélo. Ari roule à une vitesse moyenne de 20 km/h. Bri roule à une vitesse moyenne de 15 km/h. Sachant qu'Ari et Bri ont commencé le trajet en même temps, combien de minutes faudra-t-il attendre l'arrivée de Bri après l'arrivée d'Ari ?
(A) 50 min (B) 40 min (C) 30 min (D) 20 min (E) 10 min

9. Trois réservoirs contiennent de l'eau. Le nombre de litres d'eau dans chacun d'eux est indiqué dans le tableau ci-dessous :

Réservoir A	Réservoir B	Réservoir C
3600 L	1600 L	3800 L

- De l'eau est pompée et transvasée des réservoirs A et C au réservoir B afin que chaque réservoir contienne le même volume d'eau. Combien de litres d'eau sont pompés et transvasés du réservoir A au réservoir B?
- (A) 500 L (B) 600 L (C) 700 L (D) 800 L (E) 900 L
10. Les points A , B , C et D sont situés sur une droite dans cet ordre. Sachant que $AB : AC = 1 : 5$ et $BC : CD = 2 : 1$, quel est le rapport $AB : CD$?
- (A) 1 : 1 (B) 1 : 2 (C) 1 : 3 (D) 2 : 5 (E) 3 : 5

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Au début du mois, Mathilde et Salah avaient chacun 100 pièces. Pour Mathilde, ce nombre de pièces est 25 % de plus que le nombre de pièces qu'elle avait au début du mois dernier. Pour Salah, ce nombre de pièces est 20 % de moins que le nombre de pièces qu'il avait au début du mois dernier. Combien de pièces possédaient-ils en tout au début du mois dernier ?
- (A) 180 (B) 185 (C) 190 (D) 200 (E) 205
12. Un rectangle a une longueur de 8 cm et une largeur de π cm. Un demi-cercle a la même aire que le rectangle. Quel est son rayon ?
- (A) $4\sqrt{2}$ cm (B) 4 cm (C) 16 cm (D) 8 cm (E) 2 cm
13. Sachant que $a(x + 2) + b(x + 2) = 60$ et $a + b = 12$, quelle est la valeur de x ?
- (A) 3 (B) 5 (C) 1 (D) 7 (E) 48
14. Une droite a une pente de 2 tandis qu'une autre droite a une pente de -4 . Chacune des droites a une ordonnée à l'origine de 6. Quelle est la distance entre les abscisses à l'origine des droites ?
- (A) 2 (B) 6 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{2}$ (E) $\frac{9}{2}$
15. Une suite contient 101 termes. Chacun des termes est un entier strictement positif. Si un terme, n , est pair, alors le terme suivant est égal à $\frac{1}{2}n + 1$. Si un terme, n , est impair, alors le terme suivant est égal à $\frac{1}{2}(n + 1)$. Par exemple, si le premier terme est 7, alors le deuxième terme est 4 tandis que le troisième terme est 3. Si le premier terme de la suite est 16, quel est le 101^e terme ?
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

16. Dans la figure ci-contre, vingt-cinq cartes sont disposées au hasard dans une grille. Parmi les cartes, cinq d'entre elles portent le nombre 0 sur l'une des faces et le nombre 1 sur l'autre face, tandis que les vingt cartes restantes portent soit le nombre 0 sur les deux faces, soit le nombre 1 sur les deux faces. Lauriane choisit une rangée ou une colonne et retourne chacune des cinq cartes dans cette rangée ou colonne, laissant les autres cartes intactes. Après cette opération, Lauriane détermine le rapport du nombre de 0 visibles au nombre de 1 visibles. Quelle que soit la rangée ou la colonne que choisit Lauriane, il est *impossible* que ce rapport soit égal à :

0	0	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	0
0	0	1	0	0
1	0	1	0	1

- (A) 12 : 13 (B) 2 : 3 (C) 9 : 16
 (D) 3 : 2 (E) 16 : 9
17. Les diviseurs positifs de 6 sont 1, 2, 3, 6. Quelle est la somme des diviseurs positifs de 1184 ?
- (A) 2394 (B) 2396 (C) 2398 (D) 2400 (E) 2402
18. Une sauterelle robotisée saute de 1 cm vers l'est, puis de 2 cm vers le nord, puis de 3 cm vers l'ouest, puis de 4 cm vers le sud. Après chaque quatrième saut, la sauterelle recommence la séquence de sauts : 1 cm vers l'est, puis 2 cm vers le nord, puis 3 cm vers l'ouest, puis 4 cm vers le sud. Après un total de n sauts, la sauterelle est située à 162 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale. Quelle est la somme des carrés des chiffres de n ?
- (A) 22 (B) 29 (C) 17 (D) 14 (E) 13
19. Sachant que x et y sont des entiers qui vérifient $2x^2 + 8y = 26$, quelle est une valeur possible de $x - y$?
- (A) -8 (B) 26 (C) -16 (D) 22 (E) 30
20. Si n est un entier strictement positif, la notation $n!$ (qui se lit « factorielle n ») représente le produit des entiers de 1 à n . Par exemple, $5! = (1)(2)(3)(4)(5)$ ou $5! = 120$, qui se termine par exactement 1 zéro. Pour combien d'entiers m ($1 \leq m \leq 30$) est-il possible de trouver une valeur de n telle que $n!$ se termine par exactement m zéros ?
- (A) 30 (B) 27 (C) 28 (D) 24 (E) 25

Partie C (8 points par bonne réponse).

Chaque bonne réponse est un entier de 0 à 99 inclusivement.

Une réponse à un chiffre (p. ex. « 7 ») doit être codée avec un zéro non significatif (« 07 »).

Remarque: L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 12345 est 45. L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 6307 est 7, que l'on code 07.

21. Les entiers 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13 doivent être placés dans les cercles et les carrés ci-dessous. Chaque forme doit contenir un seul nombre.



Chaque entier ne peut être utilisé qu'une seule fois et l'entier dans chaque cercle doit être égal à la somme des entiers dans les deux carrés voisins. Si l'entier x est placé dans le carré le plus à gauche et l'entier y dans le carré le plus à droite, quelle est la plus grande valeur possible de $x + y$?

22. Sachant que x et y sont des nombres réels positifs qui vérifient $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, quelle est la valeur de $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2$?
23. Pour chaque entier strictement positif n , soit $s(n)$ égal à la somme des chiffres de n . Par exemple, $s(2023) = 2 + 0 + 2 + 3$. Il y a S entiers n tels que $100 \leq n \leq 999$ et $7 \leq s(n) \leq 11$. Quel est l'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de S ?
24. Le quadrilatère $ABCD$ a $\angle BCD = \angle DAB = 90^\circ$. De plus, le quadrilatère $ABCD$ a un périmètre de 224 et une aire de 2205. L'un des côtés de $ABCD$ a une longueur de 7 tandis que les trois autres côtés ont des longueurs entières. Les carrés des longueurs des côtés de $ABCD$ ont une somme égale à S . Quel est l'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de S ?
25. Un cube a des arêtes de longueur 4 m. L'une des extrémités d'une corde de 5 m de long est ancrée au centre de la face supérieure du cube. L'aire de la surface du cube que l'autre extrémité de la corde peut atteindre est égale à A m². Quel est l'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de l'entier le plus près de $100A$?



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2023! Chaque année, plus de 265 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- plus d'information à propos du concours Hypatie
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours