Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mardi 4 avril 2023

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 5 avril 2023

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures et demie

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles
Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1. (a) Sachant que n, $2n$, $3n$, $4n$ et $5n$ ont une moyenne de 18, quelle est la valeur de n ?

   (b) Soit $2x + y = 5$ et $x + 2y = 7$. Quelle est la moyenne de x et de y ?

   (c) Sachant que t^2, $2t$ et 3 ont une moyenne de 9 et que $t < 0$, déterminer la valeur de t.

2. (a) Si $Q(5, 3)$ est le milieu du segment de droite ayant pour extrémités $P(1, p)$ et $R(r, 5)$, quelles sont les valeurs de p et r ?

   (b) Une droite ayant une pente de 3 et une droite ayant une pente de -1 se coupent en $P(3, 6)$. Quelle est la distance entre les abscisses à l'origine des deux droites ?

   (c) Pour une certaine valeur de t, la droite d'équation $y = tx + t$ est perpendiculaire à la droite d'équation $y = 2x + 7$. Déterminer le point d'intersection de ces droites.

3. (a) Les diviseurs positifs de 6 sont 1, 2, 3 et 6. Quelle est la somme des diviseurs positifs de 64 ?

   (b) Fiona a écrit 4 entiers consécutifs sur un tableau. Son amie, Laure, efface l'un des entiers et remarque que la somme des entiers restants est égale à 847. Quel entier Laure a-t-elle effacé ?

   (c) Une suite arithmétique de 7 termes a pour premier terme r^2 et pour raison r. Les 7 termes de la suite ont une somme de 756. Déterminer toutes les valeurs possibles de r.

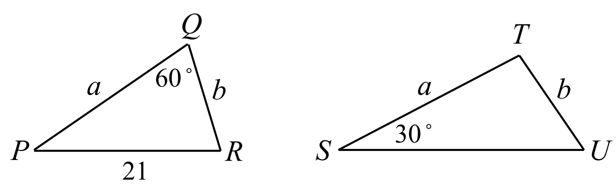
   (Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant au terme précédent une constante appelée *raison*. Par exemple, $3, 5, 7$ et 9 sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.)

4\. (a) Liang et Edmundo peignent à des vitesses différentes mais constantes. Liang peut peindre une pièce en 3 heures si elle travaille seule. Edmundo peut peindre la même pièce en 4 heures s'il travaille seul. Liang travaille seule pendant 2 heures puis s'arrête. Edmondo finit de peindre la pièce. En combien de minutes Edmundo pourra-t-il finir de peindre la pièce ?

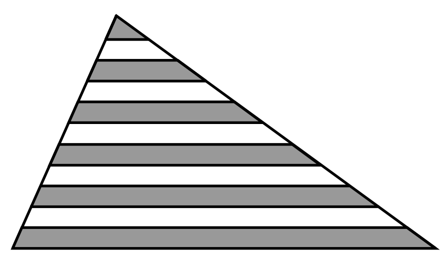
(b) Au 1er janvier 2021, un investissement avait une valeur de 400 \$.
Entre le 1er janvier 2021 et le 1er janvier 2022, la valeur de l'investissement a augmenté de $A\%$ (avec $A > 0$) par rapport à sa valeur au 1er janvier 2021.
Entre le 1er janvier 2022 et le 1er janvier 2023, la valeur de l'investissement a diminué de $A\%$ par rapport à sa valeur au 1er janvier 2022.
Au 1er janvier 2023, l'investissement avait une valeur de 391 \$.
Déterminer toutes les valeurs possibles de A.

5\. (a) Soit $f(x) = x^2 + (2n - 1)x + (n^2 - 22)$, n étant un entier. Quel est le plus petit entier strictement positif n pour lequel $f(x)$ n'admet aucune racine réelle ?

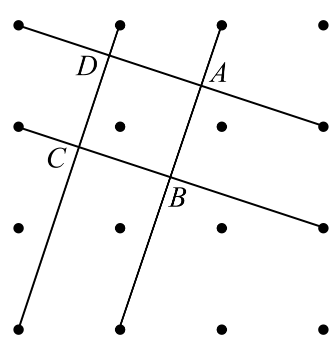
(b) Dans les figures ci-dessous, le triangle PQR est tel que $PQ = a$, $QR = b$, $PR = 21$ et $\angle PQR = 60°$. De plus, le triangle STU est tel que $ST = a$, $TU = b$, $\angle TSU = 30°$ et $\sin(\angle TUS) = \frac{4}{5}$. Déterminer les valeurs de a et b.



6\. (a) Dans la figure ci-contre, un triangle ayant une aire de 770 cm^2 est coupé en 11 régions de même hauteur par 10 lignes qui sont toutes parallèles à la base du triangle. En partant du sommet du triangle, on voit que les régions alternent entre ombrées et non ombrées. Quelle est l'aire totale des régions ombrées ?



(b) Un treillis carré formé de 16 points est construit de sorte que les distances horizontales et verticales entre les points adjacents soient toutes exactement égales à 1 unité. Quatre paires de points sont chacune reliées par un segment de droite, comme on le voit dans la figure ci-contre. Les points d'intersection de ces segments de droites sont les sommets du carré $ABCD$. Déterminer l'aire du carré $ABCD$.



7. (a) Un sac contient 3 billes rouges et 6 billes bleues. Akshan retire une bille à la fois jusqu'à ce que le sac soit vide. Chaque bille qu'il retire est choisie au hasard parmi les billes restantes. Sachant que la première bille qu'Akshan retire du sac est rouge et que la troisième est bleue, quelle est la probabilité pour que les deux dernières billes qu'il retire soient bleues ?

(b) Déterminer le nombre de quadruplets (a, b, c, d) d'entiers strictement positifs qui vérifient $a < b < c < d$ et qui vérifient également le système d'équations suivant :

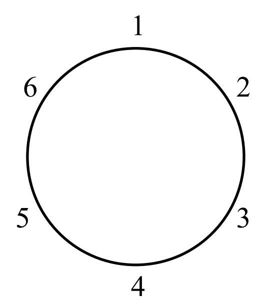
$$\begin{aligned} ac + ad + bc + bd &= 2023 \\ a + b + c + d &= 296 \end{aligned}$$

8. (a) Supposons que le triangle ABC est rectangle en B et qu'il est tel que $AB = n(n+1)$ et $AC = (n+1)(n+4)$, n étant un entier strictement positif. Déterminer le nombre d'entiers strictement positifs $n < 100\,000$ pour lesquels la longueur du côté BC est également un entier.

(b) Déterminer toutes les valeurs réelles de x qui vérifient

$$\sqrt{\log_2 x \cdot \log_2(4x) + 1} + \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2\left(\frac{x}{64}\right) + 9} = 4$$

9. Au Restaurant Canadien à Configurations Multiples, il y a des tables rondes autour desquelles sont placées des chaises. Lorsqu'une table est entourée de n chaises, n étant un entier tel que $n \geq 3$, les chaises sont numérotées en ordre croissant autour de la table (soit 1, 2, 3, …, $n-1$, n). Une table est considérée comme étant pleine si l'on ne peut faire asseoir plus de personnes sans que deux personnes ne soient assis sur des chaises voisines. Par exemple, lorsque $n = 6$, on a des tables pleines lorsque les chaises suivantes sont occupées : $\{1, 4\}$ ou $\{2, 5\}$ ou $\{3, 6\}$ ou $\{1, 3, 5\}$ ou $\{2, 4, 6\}$. Donc, il y a 5 tables pleines différentes lorsque $n = 6$.



(a) Déterminer toutes les manières différentes dont on peut faire asseoir des personnes autour d'une table de 8 chaises de sorte que la table soit pleine. Pour chaque cas, indiquer les numéros des chaises occupées.

(b) Une table pleine autour de laquelle sont placées $6k + 5$ chaises, k étant un entier strictement positif, a t chaises occupées. Déterminer, en fonction de k, le nombre de valeurs possibles de t.

(c) Déterminer le nombre de tables pleines différentes lorsque $n = 19$.

10. Pour chaque nombre réel x, on définit $\lfloor x \rfloor$ comme étant égal au plus grand entier inférieur ou égal à x. (Ce que l'on appelle la « partie entière inférieure » de x.) Par exemple, $\lfloor 4{,}2 \rfloor = 4$, $\lfloor 5{,}7 \rfloor = 5$, $\lfloor -3{,}4 \rfloor = -4$, $\lfloor 0{,}4 \rfloor = 0$ et $\lfloor 2 \rfloor = 2$.

(a) Déterminer l'entier égal à $\left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{59}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{60}{3} \right\rfloor$.

(La somme compte 60 termes.)

(b) Déterminer un polynôme $p(x)$ tel que pour chaque entier strictement positif $m > 4$,

$$\lfloor p(m) \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{m-2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m-1}{3} \right\rfloor$$

(La somme compte $m - 1$ termes.)

Un *polynôme* $f(x)$ est une expression algébrique

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

n étant un entier quelconque avec $n \geq 0$ et $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ étant des nombres réels.

(c) Pour chaque entier n avec $n \geq 1$, on définit $f(n)$ comme étant égal à la somme infinie :

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{1^2+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{2^2+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3n}{3^2+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4n}{4^2+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5n}{5^2+1} \right\rfloor + \cdots$$

(La somme contient les termes $\left\lfloor \frac{kn}{k^2+1} \right\rfloor$ pour tous les entiers strictement positifs k et ne contient aucun autre terme.)

Soit $f(t+1) - f(t) = 2$, t étant un entier impair strictement positif. Démontrer que t est un nombre premier.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2023! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2023.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2023/2024
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les concours