Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2023

(10^{e} année – Secondaire IV)

le mercredi 22 février 2023

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 23 février 2023

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Puisque chacune des trois fractions est égale à 1, alors $\dfrac{1}{1}+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{3}=1+1+1=3$.

   Réponse : (C)

2. Puisque $3n = 9+9+9 = 3\times 9$, alors $n = 9$.
   On aurait également pu remarquer que $9+9+9 = 27$, d'où $3n = 27$ ou $n = \frac{27}{3} = 9$.

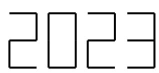
   Réponse : (D)

3. On ajoute 25 minutes à 1 heure et 48 minutes en deux étapes.
   Tout d'abord, on ajoute 12 minutes à 1 heure et 48 minutes pour obtenir 2 heures.
   Ensuite, on ajoute $25-12 = 13$ minutes à 2 heures pour obtenir 2 heures et 13 minutes.
   On aurait également pu remarquer que 1 heure et 48 minutes représentent $60+48 = 108$ minutes et que 25 minutes de plus que cela est égal à 133 minutes, ce qui est à son tour égal à $120+13$ minutes ou 2 heures et 13 minutes.

   Réponse : (A)

4. Le Jour 1, Lucie a vu 2 geais bleus et 3 cardinaux. Elle a donc vu 1 cardinal de plus que de geais bleus.
   Le Jour 2, Lucie a vu 3 geais bleus et 3 cardinaux.
   Le Jour 3, Lucie a vu 2 geais bleus et 4 cardinaux. Elle a donc vu 2 cardinaux de plus que de geais bleus.
   Donc, au cours des trois jours, Lucie a vu $1+0+2 = 3$ cardinaux de plus que de geais bleus.

   Réponse : (B)

5. Lorsqu'on observe le nombre  de l'autre côté de la fenêtre, les chiffres paraissent en miroir et en ordre inverse. On voit donc .

   Réponse : (C)

6. *Solution 1*
   Puisque l'angle BCD est un angle plat, alors $\angle ACB = 180^\circ - \angle ACD = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.
   Puisque les mesures des angles du triangle ABC ont une somme de 180°, alors $x^\circ + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$, d'où $x = 180 - 120 = 60$.

   Solution 2
   Puisque les mesures des angles du triangle ABC ont une somme de 180°, alors

   $$\angle ACB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - x^\circ = 90^\circ - x^\circ$$

   Puisque $\angle BCD = 180^\circ$, alors

   $$\begin{aligned} \angle ACB + \angle ACD &= 180^\circ \\ (90^\circ - x^\circ) + 150^\circ &= 180^\circ \\ 240 - x &= 180 \end{aligned}$$

   d'où $x = 60$.

   Réponse : (E)

7. Un cube a six faces identiques.
Si le cube a une aire totale de 24, alors l'aire de chaque face est égale à $\frac{24}{6} = 4$.
Puisque chaque face de ce cube est un carré dont l'aire est égale à 4, les arêtes du cube ont une longueur de $\sqrt{4} = 2$.
Donc, le volume du cube est égal à 2^3, soit 8.

Réponse : (E)

8. Si $\frac{4}{5}$ des perles sont jaunes, alors $\frac{1}{5}$ des perles sont vertes.
Puisqu'il y a 4 perles vertes, alors le nombre total de perles doit être égal à $4 \times 5 = 20$.
Donc, Charlotte doit ajouter $20 - 4 = 16$ perles jaunes.

Réponse : (A)

9. *Solution 1*
Supposons que 100 est le nombre initial.
Lorsque 100 est augmenté de 60 %, on obtient 160.
Pour revenir à la valeur initiale de 100, 160 doit être diminué de 60.
Cette diminution, sous forme de pourcentage, est égale à $\frac{60}{160} \times 100\% = \frac{3}{8} \times 100\% = 37{,}5\%$.

Solution 2
Soit x le nombre initial avec $x > 0$.
Lorsque x est augmenté de 60 %, on obtient $1{,}6x$.
Pour revenir à la valeur initiale de x, $1{,}6x$ doit être diminué de $0{,}6x$.
Cette diminution, sous forme de pourcentage, est égale à $\frac{0{,}6x}{1{,}6x} \times 100\ \% = \frac{3}{8} \times 100\ \% = 37{,}5\ \%$.

Réponse : (E)

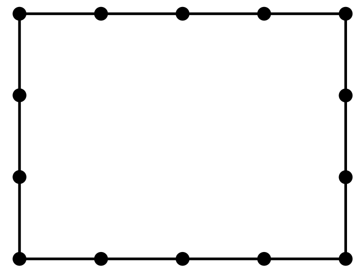
10. Chaque porte a 2 « états » possibles, soit ouverte ou fermée.
Donc, il y a $2^5 = 32$ combinaisons possibles d'états pour les 5 portes.
Si l'on représente les cinq portes par les lettres P, Q, R, S, T, alors les the paires de portes qui peuvent être ouvertes sont PQ, PR, PS, PT, QR, QS, QT, RS, RT, ST. Il y a donc 10 telles paires.
Donc, si l'on choisit au hasard l'une des 32 combinaisons possibles d'états, la probabilité pour qu'exactement deux des cinq portes soient ouvertes est égale à $\frac{10}{32}$, ce qui est équivalent à $\frac{5}{16}$.

Réponse : (A)

11. Après que Karim a mangé n bonbons, il lui reste $23 - n$ bonbons.
Puisqu'il divise les bonbons restants de manière égale entre ses trois enfants, alors l'entier $23 - n$ doit être un multiple de 3.
Si $n = 2, 5, 11, 14$, on obtient $23 - n = 21, 18, 12, 9$. Chacun de ces nombres est un multiple de 3.
Si $n = 9$, on obtient $23 - n = 14$, ce qui n'est pas un multiple de 3.
Donc, n ne peut égaler 9.

Réponse : (C)

12. Un champ rectangulaire de 6 m $\times$ 8 m a un périmètre de $2 \times (6 \text{ m} + 8 \text{ m}) = 28$ m.
En partant d'un coin, si les poteaux sont placés à intervalles réguliers de 2 m autour du champ rectangulaire, alors on peut supposer qu'il faudra $\dfrac{28 \text{ m}}{2 \text{ m}} = 14$ poteaux en tout.
La figure ci-dessous le confirme :

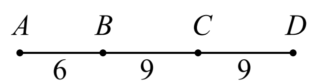


Réponse : (B)

13. Puisque $2023 = 7 \times 17^2$, alors tout carré parfait qui est un multiple de 2023 doit avoir 7 et 17 comme facteurs premiers.
De plus, les exposants des facteurs premiers d'un carré parfait doivent tous être pairs.
Donc, tout carré parfait qui est un multiple de 2023 doit être divisible par 7^2 et par 17^2, ce qui signifie qu'il doit être supérieur ou égal à $7^2 \times 17^2$, ce qui est égal à 7×2023.
Donc, le plus petit carré parfait qui est un multiple de 2023 est 7×2023.
On peut vérifier que 2023^2 est supérieur à 7×2023 et que ni 4×2023, ni 17×2023, ni $7 \times 17 \times 2023$ ne sont des carrés parfaits.

Réponse : (C)

14. Puisque B est situé entre A et D et que $BD = 3AB$, alors B divise AD selon un rapport de $1 : 3$.
Puisque $AD = 24$, alors $AB = 6$ et $BD = 18$.
Puisque C est situé à mi-chemin entre B et D, alors $BC = \frac{1}{2}BD = 9$.



Donc, $AC = AB + BC = 6 + 9 = 15$.

Réponse : (E)

15. Puisque $a = \dfrac{1}{n}$, n étant un entier strictement positif tel que $n > 1$, alors $0 < a < 1$ et $\dfrac{1}{a} = n > 1$.
Donc, $0 < a < 1 < \dfrac{1}{a}$, ce qui élimine les choix (D) et (E).
Puisque $0 < a < 1$, alors a^2 est positif et $a^2 < a$, ce qui élimine les choix (A) et (C).
Donc, $0 < a^2 < a < 1 < \dfrac{1}{a}$, d'où (B) est donc le bon choix de réponse.

Réponse : (B)

16. *Solution 1*
Puisque AB et ED sont parallèles, alors le quadrilatère $ABDE$ est un trapèze.
On sait que $AB = 30$ cm.
Puisque $ABCF$ est un rectangle, alors $FC = AB = 30$ cm.
Supposons que $DC = x$ cm.
Alors $ED = FC - FE - DC = (30 \text{ cm}) - (5 \text{ cm}) - (x \text{ cm}) = (25 - x)$ cm.
La hauteur du trapèze est égale à la longueur de AF, soit 14 cm.

Puisque l'aire du trapèze est égale à 266 cm^2, alors

$$\begin{aligned}
266 \text{ cm}^2 &= \frac{30 \text{ cm} + (25 - x) \text{ cm}}{2} \times (14 \text{ cm}) \\
266 &= \frac{55 - x}{2} \times 14 \\
532 &= (55 - x) \times 14 \\
38 &= 55 - x \\
x &= 55 - 38
\end{aligned}$$

Donc, $DE = x$ cm $= 17$ cm.

Solution 2
Soit $DC = x$ cm.
Le rectangle $ABCF$ a $AB = 30$ cm et $AF = 14$ cm. L'aire de $ABCF$ est donc égale à $(30 \text{ cm}) \times (14 \text{ cm}) = 420 \text{ cm}^2$.
Le triangle AFE est rectangle en F et a une aire de

$$\tfrac{1}{2} \times AF \times FE = \tfrac{1}{2} \times (14 \text{ cm}) \times (5 \text{ cm}) = 35 \text{ cm}^2$$

L'aire du quadrilatère $ABDE$ est égale à 266 cm^2.
Le triangle BCD est rectangle en C et a une aire de

$$\tfrac{1}{2} \times BC \times DC = \tfrac{1}{2} \times (14 \text{ cm}) \times (x \text{ cm}) = 7x \text{ cm}^2$$

On compare l'aire du rectangle $ABCF$ aux aires combinées des parties pour obtenir

$$\begin{aligned}
(35 \text{ cm}^2) + (266 \text{ cm}^2) + (7x \text{ cm}^2) &= 420 \text{ cm}^2 \\
301 + 7x &= 420 \\
7x &= 119 \\
x &= 17
\end{aligned}$$

Donc, la longueur de DC est égale à 17 cm.

Réponse : (A)

17. Puisque la voiture de Mylène avait une vitesse moyenne de $\dfrac{5}{4}$ m/s, elle a parcouru 100 m en $\dfrac{100 \text{ m}}{5/4 \text{ m/s}} = \dfrac{400}{5}$ s $= 80$ s.

Étant donné que la voiture d'Héloïse a terminé la course 5 secondes avant celle de Megan, elle a terminé la course en 75 s.

Donc, la voiture d'Héloïse avait une vitesse moyenne de $\dfrac{100 \text{ m}}{75 \text{ s}} = \dfrac{100}{75}$ m/s $= \dfrac{4}{3}$ m/s.

Réponse : (C)

18. Le nombre total de barres qui ont été retirées des boîtes est égal à $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$.
Si ces barres avaient toutes une masse de 100 g, leur masse totale serait égale à 3100 g.
Puisque leur masse totale est égale à 2920 g, elles pèsent 3100 g $-$ 2920 g $=$ 180 g de moins.
Puisque toutes les barres ont une masse de 100 g ou de 90 g, alors 18 des barres doivent peser

10 g de moins que 100 g (et pèsent donc 90 g chacune).
Donc, on veut représenter 18 comme la somme de deux nombres parmi 1, 2, 4, 8, 16 afin de déterminer les boîtes desquelles les barres de 90 g ont été retirées.
On remarque que $18 = 2 + 16$. Donc, les barres de 90 g ont dû être retirées des boîtes X et Z. Pouvez-vous voir pourquoi cette réponse est unique ?

Réponse : (B)

19. Puisque a, b et c ont une moyenne de 16, alors $\dfrac{a+b+c}{3} = 16$, d'où $a+b+c = 3\times 16 = 48$.
Puisque c, d et e ont une moyenne de 26, alors $\dfrac{c+d+e}{3} = 26$, d'où $c+d+e = 3\times 26 = 78$.
Puisque a, b, c, d et e ont une moyenne de 20, alors $\dfrac{a+b+c+d+e}{5} = 20$.
Donc, $a+b+c+d+e = 5\times 20 = 100$.
On remarque que
$$(a+b+c)+(c+d+e) = (a+b+c+d+e)+c$$
Donc, $48+78 = 100+c$, d'où $c = 126-100 = 26$.

Réponse : (D)

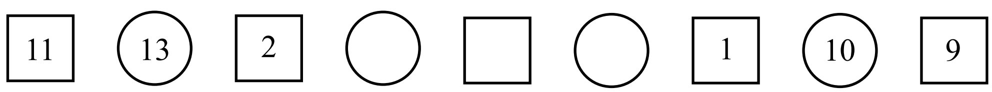
20. Chaque groupe de quatre sauts amène la sauterelle à se déplacer de 1 cm vers l'est et de 3 cm vers l'ouest, ce qui équivaut à 2 cm vers l'ouest, et de 2 cm vers le nord et de 4 cm vers le sud, ce qui équivaut à 2 cm vers le sud.
En d'autres termes, on peut voir que chaque groupe de quatre sauts, en commençant par le premier, entraîne un déplacement net de 2 cm vers l'ouest et de 2 cm vers le sud.
Remarquons que $158 = 2\times 79$.
Donc, après 79 groupes de quatre sauts, la sauterelle se trouve à $79\times 2 = 158$ cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale.
La sauterelle a fait $4\times 79 = 316$ sauts jusqu'à présent.
Après le 317e saut (1 cm vers l'est), la sauterelle se trouve à 157 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale.
Après le 318e saut (2 cm vers le nord), la sauterelle se trouve à 157 cm à l'ouest et 156 cm au sud de sa position initiale.
Après le 319e saut (3 cm vers l'ouest), la sauterelle se trouve à 160 cm à l'ouest et 156 cm au sud de sa position initiale.
Après le 320e saut (4 cm vers le sud), la sauterelle se trouve à 160 cm à l'ouest et 160 cm au sud de sa position initiale.
Après le 321e saut (1 cm vers l'est), la sauterelle se trouve à 159 cm à l'ouest et 160 cm au sud de sa position initiale.
Après le 322e saut (2 cm vers le nord), la sauterelle se trouve à 159 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale.
Après le 323e saut (3 cm vers l'ouest), la sauterelle se trouve à 162 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale, ce qui correspond à la position souhaitée.
À mesure que la sauterelle continue de sauter, chacune de ses positions sera toujours située au moins 160 cm au sud de sa position initiale. On voit donc que ceci est la seule fois qu'elle se trouvera à cette position.
Donc, $n = 323$. La somme des carrés des chiffres de n est égale à $3^2+2^2+3^2 = 9+4+9 = 22$.

Réponse : (A)

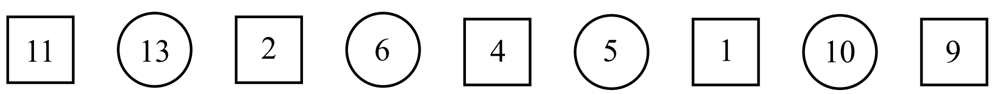
21. Puisque la droite d'équation $y = mx - 50$ passe au point $(a, 0)$, alors $0 = ma - 50$ ou $ma = 50$. Puisque m et a sont des entiers strictement positifs dont le produit est égal à 50, alors m et a sont une paire de diviseurs complémentaires de 50.
Donc, les valeurs possibles de m sont les diviseurs positifs de 50, soit 1, 2, 5, 10, 25, 50.
Donc, la somme des valeurs possibles de m est égale à $1 + 2 + 5 + 10 + 25 + 50 = 93$.

Réponse : 93

22. D'après les données de l'énoncé, si a et b se trouvent dans deux carrés consécutifs, alors $a + b$ se trouve dans le cercle qui les sépare.
Comme tous les entiers que l'on peut utiliser sont positifs, alors $a + b$ est supérieur à a et à b.
Cela signifie que le plus grand entier de la liste, soit 13, ne peut être ni x ni y (et ne peut être placé dans un carré) car l'entier dans le cercle à côté doit être inférieur à 13 (qui est le plus grand entier de la liste) et ne peut donc pas être égal à la somme de 13 et d'un autre entier positif de la liste.
Donc, pour que la valeur de $x + y$ soit aussi grande que possible, il faudrait que x et y soient égaux à 10 et 11 dans un certain ordre. Or, on est confronté au même problème : il n'y a qu'un seul entier de la liste supérieur à 10 et à 11 (soit 13) qui pourrait aller dans les cercles à côté de 10 et 11 ; cependant, puisque chaque entier ne peut être utilisé qu'une seule fois, alors les cercles à côté de 10 et 11 ne peuvent contenir tous deux l'entier 13.
Donc, la plus grande valeur possible de $x + y$ se produit lorsque $x = 9$ et $y = 11$ (ou lorsque $y = 9$ et $x = 11$).
Dans ce cas, on pourrait avoir $13 = 11 + 2$ et $10 = 9 + 1$, d'où on aurait la liste partielle suivante :



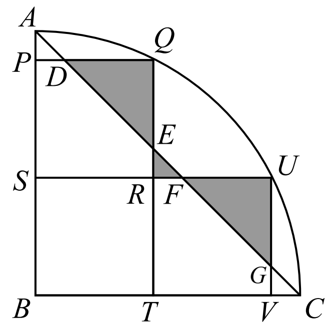
Afin de remplir les conditions du problème, les entiers restants (4, 5 et 6) peuvent être placés dans les cercles et les carrés de la manière suivante :



On voit donc que la plus grande valeur possible de $x + y$ est 20.

Réponse : 20

23. Puisque AB et BC sont tous deux des rayons du cercle, alors $AB = BC$.
Puisque ABC est un quart de cercle ayant pour centre B, alors $\angle ABC = 90°$.
Donc, le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle, ce qui signifie que $\angle BAC = \angle BCA = 45°$.
On nomme quelques autres points, comme dans la figure suivante :



On remarque que les droites qui passent aux points P, Q, R et U se coupent à angles droits en ces points.
Puisque $\angle PAD = \angle BAC = 45°$, cela signifie que

$$\angle PAD = \angle ADP = \angle QDE = \angle DEQ = \angle REF = \angle EFR = \angle UFG = \angle UGF = 45°$$

Cela signifie à son tour que chacun des triangles APD, DQE, ERF et FUG est un triangle rectangle isocèle.
Puisque chaque carré a des côtés de longueur 10, alors $BT = 10$ et $TQ = TR + RQ = 20$.
Puisque $\angle BTQ = 90°$, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$BQ = \sqrt{BT^2 + TQ^2} = \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{500}$$

On remarque que $\sqrt{500} = \sqrt{100 \times 5} = \sqrt{100} \times \sqrt{5} = 10\sqrt{5}$.
Puisque BQ est un rayon du cercle, alors $BQ = BA = BC = 10\sqrt{5}$.
Puisque $BP = TQ = 20$, alors $AP = BA - BP = 10\sqrt{5} - 20$.
Donc, $PD = AP = 10\sqrt{5} - 20$.
Puisque $PQ = 10$, alors $DQ = PQ - PD = 10 - (10\sqrt{5} - 20) = 30 - 10\sqrt{5}$.
Donc, $QE = DQ = 30 - 10\sqrt{5}$.
Puisque $PQ = QR$ et $DQ = QE$, alors $PD = ER = 10\sqrt{5} - 20$.
D'après un raisonnement semblable, $ER = RF = 10\sqrt{5} - 20$ et $UF = UG = 30 - 10\sqrt{5}$.
L'aire totale, $\mathcal{A}$, des régions ombrées est égale à la somme des aires des triangles DQE, ERF et FUG.
Donc,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \tfrac{1}{2} \times DQ \times QE + \tfrac{1}{2} \times ER \times RF + \tfrac{1}{2} UF \times UG \\
&= \tfrac{1}{2}(30 - 10\sqrt{5})^2 + \tfrac{1}{2}(10\sqrt{5} - 20)^2 + \tfrac{1}{2}(30 - 10\sqrt{5})^2 \\
&= (30 - 10\sqrt{5})^2 + \tfrac{1}{2}(10\sqrt{5} - 20)^2 \\
&= (30^2 - 2 \times 30 \times 10\sqrt{5} + (10\sqrt{5})^2) + \tfrac{1}{2}((10\sqrt{5})^2 - 2 \times 10\sqrt{5} \times 20 + 20^2) \\
&= (900 - 600\sqrt{5} + 500) + \tfrac{1}{2}(500 - 400\sqrt{5} + 400) \\
&= 1400 - 600\sqrt{5} + 450 - 200\sqrt{5} \\
&= 1850 - 800\sqrt{5} \\
&\approx 61{,}14
\end{aligned}$$

Donc, l'entier le plus près de $\mathcal{A}$ est 61.

Réponse : 61

24. On veut déterminer la probabilité pour que Carine gagne 3 parties avant d'en perdre 2.
Cela signifie que soit elle gagne 3 parties et en perd 0, soit elle gagne 3 parties et en perd 1.
Si Carine gagne ses trois premières parties, on peut s'arrêter car on n'a pas besoin de considérer le cas où elle perd sa quatrième partie.
Autrement dit, une fois que Carina a gagné sa troisième partie, les résultats des parties suivantes n'affectent pas la probabilité car les victoires ou les défaites à ce stade n'ont pas d'incidence sur la question qui est posée.
Si l'on utilise V pour représenter une victoire et D pour représenter une défaite, alors les séquences possibles de victoires et de défaites que l'on doit examiner sont VVV, DVVV, VDVV et VVDV.

Dans le cas de VVV, les probabilités du résultat spécifique dans chacune des trois parties sont $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$, car après avoir gagné une partie, la probabilité de gagner la partie suivante est égale à $\frac{3}{4}$.
Donc, la probabilité de VVV est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$.

Dans le cas de DVVV, les probabilités du résultat spécifique dans chacune des quatre parties sont $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$, car la probabilité de perdre la première partie est égale à $\frac{1}{2}$, la probabilité de gagner une partie après en avoir perdu une est égale à $\frac{1}{3}$, et la probabilité de gagner une partie après en avoir gagné une est égale à $\frac{3}{4}$.
Donc, la probabilité de DVVV est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{96} = \frac{3}{32}$.

D'après un raisonnement semblable, la probabilité de VDVV est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{96} = \frac{1}{32}$.
Dans ce cas, on a utilisé le fait que la probabilité de perdre une partie après en avoir gagné une est égale à $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Enfin, la probabilité de VVDV est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{96} = \frac{1}{32}$.

Donc, la probabilité pour que Carine gagne 3 parties avant d'en perdre 2 est égale à $\frac{9}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$, qui est une fraction irréductible.
Le numérateur et le dénominateur de cette fraction ont une somme de 23.

Réponse : 23

25. *Solution 1*
Soit $N = AB\,0AB$ et soit t l'entier de deux chiffres AB.
On remarque que $N = 1001t$ et que $1001 = 11 \cdot 91 = 11 \cdot 7 \cdot 13$.
Donc, $N = t \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.
On veut exprimer N sous la forme du produit de 5 entiers impairs distincts, chacun étant supérieur à 2, et on veut également compter le nombre d'ensembles S de tels entiers impairs dont le produit est N.
Il y a plusieurs cas à considérer.
Premièrement, on examine les ensembles S possibles qui comprennent les entiers 7, 11 et 13 (on sait que ces entiers sont des diviseurs admissibles).
Deuxièmement, on examine les ensembles S possibles qui comprennent deux de ces entiers et un multiple impair du troisième entier.
Troisièmement, on exclue les ensembles S possibles qui comprennent l'un de ces entiers et des multiples impairs des deuxième et troisième entiers.
Quatrièmement, on exclue les ensembles S possibles qui comprennent le produit de deux ou trois de ces entiers et des entiers additionnels.

1$^{\text{er}}$ cas : $S = \{7, 11, 13, m, n\}$ avec $m < n$ et $m,n \neq 7, 11, 13$

Dans ce cas, $N = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot m \cdot n = mn \cdot 1001$. Donc, $t = mn$. On voit donc que mn est inférieur à 100.
Si $m = 3$, alors les valeurs possibles de n sont 5, 9, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31.
On a donc les valeurs correspondantes suivantes de mn : 15, 27, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93.
Remarquons que $n \neq 33$, car $m = 3$ et $n = 33$ donnent $mn = 99$ qui a deux chiffres égaux, ce qui n'est pas possible.
Si $m = 5$, alors les valeurs possibles de n sont 9, 15, 17, 19.
Si $m \geq 9$, alors $n \geq 15$ car les entiers dans n sont impairs et distincts. Donc, $mn \geq 135$, ce qui n'est pas possible.
Donc, il y a 15 ensembles possibles dans ce cas.

2$^{\text{e}}$ cas : $S = \{7q, 11, 13, m, n\}$ avec $m < n$ et $q > 1$ est impair et $m,n \neq 7q, 11, 13$

Dans ce cas, $N = 7q \cdot 11 \cdot 13 \cdot m \cdot n$. Donc, $N = 1001 \cdot mnq$, d'où $t = mnq$.
Remarquons que $mnq \leq 99$.
Supposons que $q = 3$. Cela signifie que $mn \leq 33$.
Si $m = 3$, alors les valeurs possibles de n sont 5 et 9 puisque m et n sont impairs, supérieurs à 2 et distincts. ($n = 7$ n'est pas possible car on obtiendrait l'ensemble $\{21, 11, 13, 3, 7\}$ qui a déjà été pris en compte dans le 1$^{\text{er}}$ cas ci-dessus.)
Si $m \geq 5$, alors $n \geq 7$, d'où $mn \geq 35$, ce qui n'est pas posible.
Supposons que $q = 5$. Cela signifie que $mn \leq \frac{99}{5} = 19\frac{4}{5}$.
Si $m = 3$, alors $n = 5$. Il n'y a pas d'autres possibilités lorsque $q = 5$.
Puisque $mn \geq 3 \cdot 5 = 15$ et $mnq \leq 99$, alors on ne peut avoir $q \geq 7$.
Donc, il y a 3 ensembles possibles dans ce cas.

3$^{\text{e}}$ cas : $S = \{7, 11q, 13, m, n\}$ avec $m < n$ et $q > 1$ est impair et $m,n \neq 7, 11q, 13$

Supposons que $q = 3$. Cela signifie que $mn \leq 33$.
Si $m = 3$, alors les valeurs possibles de n sont 5 et 9. (Remarquons que $n \neq 7$.) On ne peut avoir $n = 11$ car sinon on aurait $mnq = 99$ et 99 099 comme produit, dans lequel les chiffres A et B sont égaux.
On ne peut avoir $m \geq 5$ car cela donnerait $mn \geq 45$.
Supposons que $q = 5$. Cela signifie que $mn \leq \frac{99}{5}$.
Si $m = 3$, alors $n = 5$.
Comme dans le 2$^{\text{e}}$ cas, on ne peut avoir $q \geq 7$.
Donc, il y a 3 ensembles possibles dans ce cas.

4$^{\text{e}}$ cas : $S = \{7, 11, 13q, m, n\}$ avec $m < n$ et $q > 1$ est impair et $m,n \neq 7, 11, 13q$

Supposons que $q = 3$. Cela signifie que $mn \leq 33$.
Si $m = 3$, alors les valeurs possibles de n sont 5 et 9. (Dans ce cas, $n \neq 11$.)
On ne peut avoir $m \geq 5$ lorsque $q = 3$ car sinon $mn \geq 45$.
Si $q = 5$, on peut uniquement avoir $m = 3$ et $n = 5$.
Comme dans les 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ cas, on ne peut avoir $q \geq 7$.
Donc, il y a 3 ensembles possibles dans ce cas.

5$^{\text{e}}$ cas : $S = \{7q, 11r, 13, m, n\}$ avec $m < n$ et $q,r > 1$ sont impairs et $m,n \neq 7q, 11r, 13$

Dans ce cas, $mnqr \leq 99$.
Puisque $q,r > 1$ sont impairs, alors $qr \geq 9$, ce qui signifie que $mn \leq 11$.
Puisqu'il n'existe pas deux entiers impairs distincts supérieurs à 1 dont le produit est inférieur à 15, il n'y a pas d'ensembles possibles dans ce cas.

Un argument semblable exclut les produits

$$N = 7q \cdot 11 \cdot 13r \cdot m \cdot n \qquad N = 7 \cdot 11q \cdot 13r \cdot m \cdot n \qquad N = 7q \cdot 11r \cdot 13s \cdot m \cdot n$$

q, r et s étant des entiers impairs supérieurs à 1.

6[e] cas : $S = \{77, 13, m, n, \ell\}$ avec $m < n < \ell$ et $m,n,\ell \neq 77, 13$

Remarquons que $77 = 7 \cdot 11$ puisque l'on sait que N a pour diviseurs 7 et 11.
Dans ce cas, $mn\ell \leq 99$.
Puisque $mn\ell \geq 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, il n'y a pas d'ensembles possibles dans ce cas, ni en utilisant $7 \cdot 143$ ou $11 \cdot 91$ dans le produit ou en utilisant 1001 par lui-même ou en utilisant des multiples de 77, 91 ou 143.

Donc, ayant considéré tous les cas, il y a alors $15 + 3 + 3 + 3 = 24$ ensembles possibles.

Solution 2
Remarquons d'abord que $AB\,0AB = AB \cdot 1001$ et que $1001 = 11 \cdot 91 = 11 \cdot 7 \cdot 13$.
Donc, $AB\,0AB = AB \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.
Puisque $AB\,0AB$ est impair, alors B est impair.
Puisque $A \neq 0$, que $A \neq B$ et que B est impair, alors on a les possibilités suivantes pour l'entier de deux chiffres AB :

$$13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49$$

$$51, 53, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97$$

Si l'entier AB est un nombre premier, alors $AB\,0AB$ ne peut être exprimé comme le produit de cinq entiers strictement positifs distincts, chacun étant supérieur à 2, puisqu'il aurait au plus quatre facteurs premiers.
À partir de cela, on peut supprimer de notre liste plusieurs possibilités pour AB afin d'obtenir une liste plus courte :

$$15, 21, 25, 27, 35, 39, 45, 49, 51, 57, 63, 65, 69, 75, 81, 85, 87, 91, 93, 95$$

Parmi les entiers de cette liste plus courte, plusieurs sont le produit de deux nombres premiers distincts, aucun des deux n'étant égal à 7, à 11 ou à 13. Ces entiers sont $15 = 3 \cdot 5$ et $51 = 3 \cdot 17$ et $57 = 3 \cdot 19$ et $69 = 3 \cdot 23$ et $85 = 5 \cdot 17$ et $87 = 3 \cdot 29$ et $93 = 3 \cdot 31$ et $95 = 5 \cdot 19$.
Si l'on considère chacun de ceux-ci comme étant $p \cdot q$, p et q étant des nombres premiers distincts, alors on a $AB\,0AB = p \cdot q \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.
Pour exprimer $AB\,0AB$ sous la forme d'un produit de cinq entiers strictement positifs distincts, chacun étant supérieur à 2, ces cinq entiers doivent être les cinq facteurs premiers. Pour chacun de ces 8 entiers (15, 51, 57, 69, 85, 87, 93, 95), il y a 1 ensemble de 5 entiers impairs distincts, puisque l'ordre des entiers n'a pas d'importance. On a donc 8 ensembles jusque-là.
Il reste donc les entiers 21, 25, 27, 35, 39, 45, 49, 63, 65, 75, 81, 91.

Parmi ces entiers restants, sept sont égaux au produit de deux nombres premiers ; soit ces nombres premiers sont égaux, soit au moins l'un d'eux est égal à 7, à 11 ou à 13. Ces produits sont $21 = 3 \cdot 7$ et $25 = 5 \cdot 5$ et $35 = 5 \cdot 7$ et $39 = 3 \cdot 13$ et $49 = 7 \cdot 7$ et $65 = 5 \cdot 13$ et $91 = 7 \cdot 13$.
Dans chaque cas, $AB\,0AB$ peut être écrit comme un produit de 5 nombres premiers, dont au moins 2 sont identiques. Ces 5 nombres premiers ne peuvent être regroupés pour obtenir 5 entiers impairs différents, chacun étant supérieur à 1, car les 5 nombres premiers comprennent des doublons et si deux des nombres premiers sont combinés, alors on doit inclure 1 dans l'ensemble.

Considérons par exemple $21 = 3 \cdot 7$. Dans ce cas, $21\,021 = 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Il n'y a aucun moyen de regrouper ces facteurs premiers pour obtenir cinq entiers impairs différents, chacun étant supérieur à 1.
De même, $25\,025 = 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ et $91\,091 = 7 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Les trois possibilités restantes (35, 49 et 65) donnent des situations similaires.
Il reste donc les entiers 27, 45, 63, 75, 81 à considérer.

Considérons $27\,027 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Il y a 6 facteurs premiers à répartir entre les cinq entiers impairs qui forment le produit. Comme il ne peut y avoir deux 3 dans l'ensemble, alors le seul moyen d'avoir un ensemble de 5 entiers impairs distincts est de regrouper deux 3 de manière à avoir $\{3, 9, 7, 11, 13\}$.
Considérons $81\,081 = 3^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Il y a 7 facteurs premiers à répartir entre les cinq entiers impairs qui forment le produit.
Puisqu'il ne peut y avoir deux 3 ou deux 9 dans l'ensemble et qu'il doit y avoir deux puissances de 3 dans l'ensemble, alors il y a quatre possibilités pour l'ensemble S :

$$S = \{3, 27, 7, 11, 13\}, \{3, 9, 21, 11, 13\}, \{3, 9, 7, 33, 13\}, \{3, 9, 7, 11, 39\}$$

Considérons $45\,045 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Il y a 6 facteurs premiers à répartir entre les cinq entiers impairs qui forment le produit.
Comme deux de ces facteurs premiers sont des 3, ces derniers ne peuvent être chacun un élément individuel de l'ensemble et donc l'un des 3 doit toujours être combiné avec un autre facteur premier, ce qui donne les possibilités suivantes :

$$S = \{9, 5, 7, 11, 13\}, \{3, 15, 7, 11, 13\}, \{3, 5, 21, 11, 13\}, \{3, 5, 7, 33, 13\}, \{3, 5, 7, 11, 39\}$$

Considérons $75\,075 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.
En utilisant un argument semblable à celui que l'on a utilisé dans le cas précédent, on obtient

$$S = \{15, 5, 7, 11, 13\}, \{3, 25, 7, 11, 13\}, \{3, 5, 35, 11, 13\}, \{3, 5, 7, 55, 13\}, \{3, 5, 7, 11, 65\}$$

Enfin, considérons $63\,063 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$. Il y a 6 facteurs premiers à répartir entre les cinq entiers impairs qui forment le produit. Comme le produit ne peut contenir deux 3 ou deux 7, le second 3 et le second 7 doivent être combinés. Il n'y a donc qu'un seul ensemble dans ce cas, à savoir $S = \{3, 7, 21, 11, 13\}$.

Donc, il y a $8 + 1 + 4 + 5 + 5 + 1 = 24$ ensembles possibles.

Réponse : 24