



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley

(10^e année – Sec. IV)

le mercredi 22 février 2023

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 23 février 2023

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée: 60 minutes

©2023 University of Waterloo

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Les parties A et B du concours sont composées de questions à choix multiple. Chacune de ces questions est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. La réponse juste à chaque question de la partie C est un entier de 0 à 99 inclusivement. Après avoir décidé de votre réponse, remplissez les deux cercles appropriés sur la feuille-réponse. Une réponse à un chiffre (p. ex. $\langle 7 \rangle$) doit être codée avec un zéro non significatif ($\langle 07 \rangle$).
8. Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C. Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée. Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
9. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
10. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
11. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

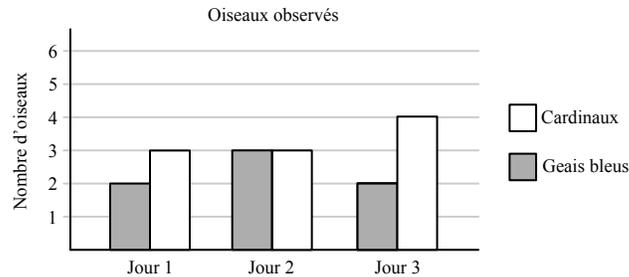
Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.

On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

- Quelle est la valeur de $\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3}$?
(A) 1 (B) 0 (C) 3 (D) 9 (E) 10
- Si $3n = 9 + 9 + 9$, quelle est la valeur de n ?
(A) 3 (B) 6 (C) 18 (D) 9 (E) 27
- Un film dure 1 heure et 48 minutes. Un deuxième film dure 25 minutes de plus que le premier. Quelle est la durée du deuxième film?
(A) 2 heures et 13 minutes
(B) 1 heure et 48 minutes
(C) 2 heures et 25 minutes
(D) 2 heures et 3 minutes
(E) 2 heures et 48 minutes
- Lucie a récolté des données quant aux nombres de cardinaux et de geais bleus qu'elle a vus chaque jour pendant trois jours. Elle a représenté ses données dans le graphique ci-dessous.



Combien de cardinaux de plus que de geais bleus a-t-elle vu pendant ces trois jours ?

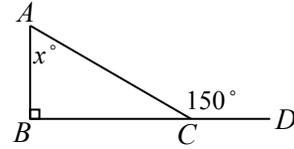
- (A) 7 (B) 3 (C) 6 (D) 8 (E) 1
- On écrit le nombre 2023 sur un côté de la fenêtre d'une salle de classe comme dans la figure ci-contre. Si votre ami se tenait de l'autre côté de la fenêtre, comment verrait-il le nombre ?



- (A) 3202
(B) 5056
(C) 6505
(D) 5053
(E) 3032

6. Dans la figure ci-contre, les points B , C et D sont situés sur un segment de droite. De plus, $\angle ABC = 90^\circ$ et $\angle ACD = 150^\circ$. Quelle est la valeur de x ?

- (A) 30 (B) 45 (C) 90
(D) 150 (E) 60



7. Un cube a une aire totale de 24. Quel est son volume ?
(A) 4 (B) $3\sqrt{3}$ (C) 9 (D) 16 (E) 8
8. Charlotte fabrique un collier avec des perles jaunes et des perles vertes. Elle a déjà utilisé 4 perles vertes et 0 perle jaune. Combien de perles jaunes devra-t-elle ajouter pour que $\frac{4}{5}$ du nombre total de perles soient jaunes ?
(A) 16 (B) 4 (C) 20 (D) 24 (E) 12
9. On augmente un nombre positif de 60 %. De quel pourcentage doit-on diminuer le résultat pour revenir à la valeur initiale ?
(A) 57,5 % (B) 40 % (C) 62,5 % (D) 50 % (E) 37,5 %
10. Une salle contient cinq portes. Chacune des cinq portes est aléatoirement ouverte ou fermée. Quelle est la probabilité qu'exactly deux des cinq portes soient ouvertes ?
(A) $\frac{5}{16}$ (B) $\frac{13}{32}$ (C) $\frac{9}{25}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{7}{16}$

Partie B (6 points par bonne réponse)

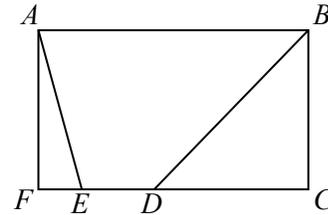
11. Karim a 23 bonbons. Il mange n bonbons et divise les bonbons restants de manière égale entre ses trois enfants afin que chaque enfant reçoive un nombre entier de bonbons. Lequel des choix de réponse suivants n'est pas une valeur possible de n ?
(A) 2 (B) 5 (C) 9 (D) 11 (E) 14
12. Un champ rectangulaire de $6 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ est entouré d'une clôture. Il y a un poteau à chacun des quatre coins du champ. À partir de chaque coin, il y a un poteau à tous les 2 m le long de chaque côté de la clôture. Combien de poteaux y a-t-il ?
(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 20
13. L'entier 2023 est égal à 7×17^2 . Parmi les choix de réponse suivants, lequel est le plus petit carré parfait positif qui est un multiple de 2023 ?
(A) 2023^2 (B) 4×2023 (C) 7×2023 (D) 17×2023 (E) $7 \times 17 \times 2023$
14. Les points A , B , C et D sont situés sur une droite dans cet ordre.
La distance entre A et D est de 24.
La distance de B à D est égale à 3 fois la distance de A à B .
Le point C est situé à mi-chemin entre B et D .
Quelle est la distance entre A et C ?
(A) 12 (B) 8 (C) 16 (D) 9 (E) 15

15. Supposons que $a = \frac{1}{n}$, n étant un entier strictement positif tel que $n > 1$.

Laquelle des expressions suivantes est vraie ?

- (A) $a < \frac{1}{a} < a^2$ (B) $a^2 < a < \frac{1}{a}$ (C) $a < a^2 < \frac{1}{a}$
 (D) $\frac{1}{a} < a < a^2$ (E) $\frac{1}{a} < a^2 < a$

16. Dans la figure ci-contre, $ABCF$ est un rectangle avec $AB = 30$ cm et $AF = 14$ cm. Les points E et D sont situés sur FC de manière que $FE = 5$ cm et que l'aire du quadrilatère $ABDE$ soit égale à 266 cm². Quelle est la longueur de DC ?



- (A) 17 cm (B) 16 cm (C) 19 cm
 (D) 20 cm (E) 18 cm

17. Mylène et Héloïse ont fait une course de 100 mètres avec leurs voitures télécommandées. Les deux voitures ont démarré en même temps. La vitesse moyenne de la voiture de Mylène était de $\frac{5}{4}$ m/s. La voiture d'Héloïse a terminé la course 5 secondes avant celle de Mylène. Quelle était la vitesse moyenne de la voiture d'Héloïse ?

- (A) $\frac{4}{5}$ m/s (B) $\frac{5}{2}$ m/s (C) $\frac{4}{3}$ m/s (D) $\frac{6}{5}$ m/s (E) $\frac{3}{2}$ m/s

18. Une usine fabrique des barres de chocolat. Cinq boîtes, soit les boîtes V , W , X , Y et Z , contiennent chacune 20 barres. Parmi les cinq boîtes, trois boîtes contiennent des barres ayant chacune une masse de 100 g tandis que deux boîtes contiennent des barres ayant chacune une masse de 90 g. Une barre de chocolat est retirée de la boîte V , deux barres sont retirées de la boîte W , quatre barres sont retirées de la boîte X , huit barres sont retirées de la boîte Y et seize barres sont retirées de la boîte Z . Les barres qui ont été retirées des boîtes ont une masse totale de 2920 g. Quelles sont les deux boîtes qui contiennent les barres de 90 g ?

- (A) V et W (B) W et Z (C) X et Y (D) V et Z (E) W et Y

19. La moyenne de a , b et c est égale à 16. La moyenne de c , d et e est égale à 26. La moyenne de a , b , c , d et e est égale à 20. Quelle est la valeur de c ?

- (A) 10 (B) 20 (C) 21 (D) 26 (E) 30

20. Une sauterelle robotisée saute de 1 cm vers l'est, puis de 2 cm vers le nord, puis de 3 cm vers l'ouest, puis de 4 cm vers le sud. Après chaque quatrième saut, la sauterelle recommence la séquence de sauts : 1 cm vers l'est, puis 2 cm vers le nord, puis 3 cm vers l'ouest, puis 4 cm vers le sud. Après un total de n sauts, la sauterelle est située à 162 cm à l'ouest et 158 cm au sud de sa position initiale. Quelle est la somme des carrés des chiffres de n ?

- (A) 22 (B) 29 (C) 17 (D) 14 (E) 13

Partie C (8 points par bonne réponse).

Chaque bonne réponse est un entier de 0 à 99 inclusivement.

Une réponse à un chiffre (p. ex. « 7 ») doit être codée avec un zéro non significatif (« 07 »).

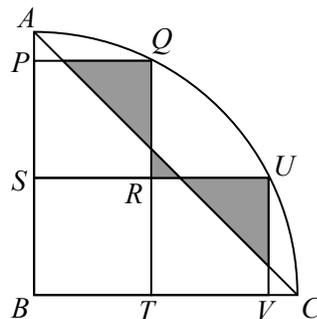
Remarque: L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 12 345 est 45. L'entier formé par les deux chiffres les plus à droite de 6307 est 7, que l'on code 07.

21. Une droite a pour équation $y = mx - 50$, m étant un entier strictement positif. La droite passe au point $(a, 0)$, a étant un entier strictement positif. Quelle est la somme de toutes les valeurs possibles de m ?
22. Les entiers 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13 doivent être placés dans les cercles et les carrés ci-dessous. Chaque forme doit contenir un seul nombre.



Chaque entier ne peut être utilisé qu'une seule fois et l'entier dans chaque cercle doit être égal à la somme des entiers dans les deux carrés voisins. Si l'entier x est placé dans le carré le plus à gauche et l'entier y dans le carré le plus à droite, quelle est la plus grande valeur possible de $x + y$?

23. Dans la figure ci-contre, ABC est un quart de cercle ayant pour centre B . Les carrés $PQRS$, $SRTB$ et $RUVT$ ont chacun des côtés de longueur 10. Les points P et S sont situés sur AB , les points T et V sont situés sur BC et les points Q et U sont situés sur le quart de cercle. On trace le segment de droite AC et on ombre trois régions triangulaires, comme dans la figure ci-contre. Quel est l'entier le plus près de l'aire totale des régions ombrées ?



24. Carine participe à un tournoi dans lequel aucune partie ne peut se terminer à égalité. Elle continue à jouer des parties jusqu'à ce qu'elle en perde 2, après quoi elle est éliminée et ne joue plus aucune partie. La probabilité pour que Carine gagne la première partie est égale à $\frac{1}{2}$. Après avoir gagné une partie, la probabilité pour que Carine gagne la partie suivante est égale à $\frac{3}{4}$. Après avoir perdu une partie, la probabilité pour que Carine gagne la partie suivante est égale à $\frac{1}{3}$. La probabilité pour que Carine gagne 3 parties avant d'être éliminée du tournoi est égale à la fraction $\frac{a}{b}$, cette dernière étant exprimée sous forme réduite. Quelle est la valeur de $a + b$?
25. Un ensemble est composé de cinq entiers impairs positifs distincts, chacun étant supérieur à 2. Lorsqu'on multiplie ces cinq entiers, on obtient un produit entier de cinq chiffres de la forme $AB0AB$, A et B étant des chiffres tels que $A \neq 0$ et $A \neq B$. (Le chiffre des centaines du produit est zéro.) Par exemple, les entiers de l'ensemble $\{3, 5, 7, 13, 33\}$ ont un produit de 45 045. En tout, combien d'ensembles différents de cinq entiers impairs positifs ont ces propriétés ?



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Cayley de 2023! Chaque année, plus de 265 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Galois qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- plus d'information à propos du concours Galois
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours