Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur 2023

le mercredi 15 novembre 2023

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 novembre 2023

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. Puisque $p+q$ est impair (car 31 est impair) et que p et q sont des entiers, alors l'un de p et q est pair et l'autre est impair. (Si les deux étaient pairs ou les deux étaient impairs, leur somme serait paire.)
   Puisque p et q sont tous les deux des nombres premiers et que l'un d'eux est pair, alors l'un d'eux doit être 2, car 2 est le seul nombre premier pair.
   Puisque leur somme est égale à 31, le second nombre doit être 29, ce qui est un nombre premier.
   Donc, $pq = 2 \cdot 29 = 58$.

   Réponse : 58

2. Les entiers de 100 à 999 sont des entiers strictement positifs de trois chiffres.
   Considérons les entiers de trois chiffres de la forme abc où le chiffre a est pair, le chiffre b est pair et le chiffre c est impair.
   Il y a 4 possibilités pour a : 2, 4, 6, 8. (Remarquons que a ne peut égaler 0.)
   Il y a 5 possibilités pour b : 0, 2, 4, 6, 8.
   Il y a 5 possibilités pour c : 1, 3, 5, 7, 9.
   Chaque choix de chiffres de ces listes donne un entier distinct qui répond aux conditions.
   Donc, il y a $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ tels entiers.

   Réponse : 100

3. *Solution 1*
   Puisque la distance de $(0, 0)$ à (x, y) est 17, alors $x^2 + y^2 = 17^2$.
   Puisque la distance de $(16, 0)$ à (x, y) est 17, alors $(x - 16)^2 + y^2 = 17^2$.
   On soustrait la seconde équation de la première pour obtenir $x^2 - (x - 16)^2 = 0$, soit $x^2 - (x^2 - 32x + 256) = 0$, d'où $32x = 256$ ou $x = 8$.
   Puisque $x = 8$ et $x^2 + y^2 = 17^2$, alors $64 + y^2 = 289$, soit $y^2 = 225$, d'où $y = 15$ ou $y = -15$.
   Donc, les deux paires de coordonnées possibles de P sont $(8, 15)$ et $(8, -15)$.

   Solution 2
   Le point P est équidistant de O et de A puisque $OP = PA = 17$.
   Supposons que M est le milieu de OA.
   Puisque O a pour coordonnées $(0, 0)$ et A a pour coordonnées $(16, 0)$, alors M a pour coordonnées $(8, 0)$.
   Puisque $OP = PA$, alors le triangle OPA est isocèle.
   Cela signifie que la médiane PM dans le triangle OPA représente la hauteur du triangle. Autrement dit, PM est perpendiculaire à OA.
   Puisque OA est horizontal, PM est vertical. Donc, P est situé sur la droite d'équation $x = 8$.
   Puisque $OM = 8$ et $OP = 17$ et que le triangle PMO est rectangle en M, alors d'après le théorème de Pythagore, $PM = \sqrt{OP^2 - OM^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$.
   Puisque PM est vertical et que M est situé sur l'axe des abscisses, alors P est situé à une distance verticale de 15 unités au-dessus de l'axe des abscisses.
   Puisque P a 8 pour abscisse et qu'il est situé à une distance verticale de 15 unités au-dessus de l'axe des abscisses, alors les deux paires de coordonnées possibles de P sont $(8, 15)$ et $(8, -15)$.

   Réponse : $(8, 15)$, $(8, -15)$

4. Le magasin a vendu x chemises à 10 \$ chacune, y bouteilles d'eau à 5 \$ chacune et z tablettes de chocolat à 1 \$ chacune.
Puisque le revenu total était de 120 \$, alors $10x + 5y + z = 120$.
Puisque $z = 120 - 10x - 5y$ et que chaque terme dans le membre de droite de l'équation est un multiple de 5, alors z est un multiple de 5.
On pose $z = 5t$, t étant un entier quelconque tel que $t > 0$.
On obtient donc $10x + 5y + 5t = 120$. On divise par 5 pour obtenir $2x + y + t = 24$.
Puisque $x > 0$ et que x est un entier, alors $x \geq 1$.
Puisque $y > 0$ et que $t > 0$, alors $y + t \geq 2$ (puisque y et t sont des entiers).
Cela signifie que $2x = 24 - y - t \leq 22$, d'où $x \leq 11$.
Si $x = 1$, alors $y + t = 22$. Il y a 21 couples (y, t) qui vérifient cette équation, à savoir les couples $(y, t) = (1, 21), (2, 20), (3, 19), \ldots, (20{,}2), (21, 1)$.
Si $x = 2$, alors $y + t = 20$. Il y a 19 couples (y, t) qui vérifient cette équation, à savoir les couples $(y, t) = (1, 19), (2, 18), (3, 17), \ldots, (18, 2), (19, 1)$.
Pour chaque valeur de x avec $1 \leq x \leq 11$, on obtient $y + t = 24 - 2x$.
Puisque $y \geq 1$, alors $t \leq 23 - 2x$.
Puisque $t \geq 1$, alors $y \leq 23 - 2x$.
Autrement dit, $1 \leq y \leq 23 - 2x$ et $1 \leq t \leq 23 - 2x$.
De plus, si l'on choisit n'importe quel entier y qui vérifie $1 \leq y \leq 23 - 2x$, on obtient une valeur positive de t. Donc, il y a $23 - 2x$ couples (y, t) qui sont des solutions.
Donc, à mesure que x augmente de 1 à 11, il y a

$$21 + 19 + 17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1$$

couples (y, t), ce qui correspond donc au nombre de triplets (x, y, z).
On peut récrire cette somme sous la forme

$$21 + (19 + 1) + (17 + 3) + (15 + 5) + (13 + 7) + (11 + 9)$$

ou $21 + 5 \cdot 20$, ce qui signifie qu'il y a 121 triplets (x, y, z).

Réponse : 121

5. On considère que $r^2 - r(p + 6) + p^2 + 5p + 6 = 0$ est une équation quadratique exprimée en fonction de r et dont deux coefficients dépendent de la variable p.
Pour que cette équation quadratique ait des solutions réelles r, son discriminant, Δ, doit être supérieur ou égal à 0. Bien qu'un discriminant non négatif ne garantisse pas l'existence de solutions entières, il peut néanmoins contribuer à limiter le champ de recherche.
Par définition,

$$\begin{aligned}\Delta &= (-(p + 6))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p^2 + 5p + 6) \\ &= p^2 + 12p + 36 - 4p^2 - 20p - 24 \\ &= -3p^2 - 8p + 12\end{aligned}$$

Donc, on veut trouver toutes les valeurs entières de p pour lesquelles $-3p^2 - 8p + 12 \geq 0$. L'ensemble des entiers p qui vérifient cette inéquation sont les seules valeurs possibles de p qui pourraient faire partie d'un couples d'entiers (r, p) qui vérifient l'équation initiale. Le membre de gauche de cette inéquation est une parabole orientée vers le bas. Cela signifie qu'il y a un intervalle fini de valeurs de p qui vérifient cette inéquation.
D'après la formule quadratique, les solutions de l'équation $-3p^2 - 8p + 12 = 0$ sont

$$p = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4(-3)(12)}}{2(-3)} = \frac{8 \pm \sqrt{208}}{-6} \approx 1{,}07, -3{,}74$$

Puisque les racines de l'équation $-3p^2 - 8p + 12 = 0$ sont approximativement 1,07 et $-3{,}74$, alors les entiers p qui vérifient $-3p^2 - 8p + 12 \geq 0$ sont $p = -3, -2, -1, 0, 1$. (Ces valeurs de p sont les seuls entiers entre les solutions réelles 1,07 et $-3{,}74$.)
Ces valeurs de p sont celles pour lesquelles il pourrait exister des valeurs entières de r correspondantes qui vérifient l'équation.
Vérifions-les une par une :

- Lorsque $p = 1$, l'équation initiale devient $r^2 - 7r + 12 = 0$, ce qui donne $(r - 3)(r - 4) = 0$, d'où $r = 3$ ou $r = 4$.
- Lorsque $p = 0$, l'équation initiale devient $r^2 - 6r + 6 = 0$. En utilisant la formule quadratique, on peut vérifier que cette équation n'a pas de solutions entières.
- Lorsque $p = -1$, l'équation initiale devient $r^2 - 5r + 2 = 0$. En utilisant la formule quadratique, on peut vérifier que cette équation n'a pas de solutions entières.
- Lorsque $p = -2$, l'équation initiale devient $r^2 - 4r = 0$, ce qui donne $r(r - 4) = 0$, d'où $r = 0$ ou $r = 4$.
- Lorsque $p = -3$, l'équation initiale devient $r^2 - 3r = 0$, ce qui donne $r(r - 3) = 0$, d'où $r = 0$ ou $r = 3$.

Donc, les couples d'entiers qui vérifient l'équation sont

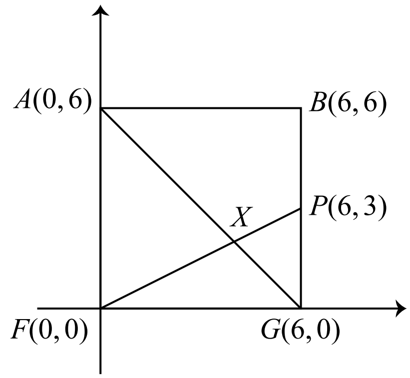
$$(r, p) = (3, 1), (4, 1), (0, -2), (4, -2), (0, -3), (3, -3)$$

Réponse : $(3, 1), (4, 1), (0, -2), (4, -2), (0, -3), (3, -3)$

6. On détermine d'abord les distances verticales entre les points d'intersection des arêtes des pyramides et le bas du cube.

Par exemple, on considère le carré $AFGB$ et les arêtes AG et FP. Soit X leur point d'intersection.

On attribue des coordonnées aux points différents en tenant compte du fait que les arêtes du cube ont une longueur de 6 : $F(0,0)$, $G(6,0)$, $B(6,6)$, $A(0,6)$, $P(6,3)$ (P est le milieu de BG).



Le segment de droite AG a une pente de -1 et a donc pour équation $y = -x + 6$.

Le segment de droite FP a une pente de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et a donc pour équation $y = \frac{1}{2}x$.

Pour déterminer les coordonnées de X, on pose l'égalité entre les y des équations (les membres de droite) pour obtenir $-x + 6 = \frac{1}{2}x$, d'où $\frac{3}{2}x = 6$ ou $x = 4$. Donc, $y = -4 + 6 = 2$.

Donc, le point X est situé à 2 unités au-dessus du carré $EFGH$.

D'après un argument semblable, le point d'intersection entre PH et GC est situé à 2 unités au-dessus du carré $EFGH$.

Pour comprendre pourquoi le point d'intersection entre GD et PE est également situé à 2 unités au-dessus de $EFGH$, on remarque que le rectangle $DEGB$ a une hauteur de 6 (comme le carré $AFGB$) et une largeur de $6\sqrt{2}$. Par conséquent, on peut supposer que le rectangle $DEGB$ est l'image du carré $AFGB$ obtenue en étirant horizontalement le carré $AFGB$ par un facteur de $\sqrt{2}$. Cet étirement horizontal ne modifiera pas l'élévation du point d'intersection entre GD et PE et donc ce point est également situé à 2 unités au-dessus de $EFGH$.

Visualisons maintenant le tracé d'un plan passant par les trois points où se croisent les arêtes des pyramides.

Puisque chacun de ces points est situé à 2 unités au-dessus de $EFGH$, ce plan doit être horizontal et intersectera également BG à 2 unités au-dessus de G, formant un carré. (Les points d'intersection forment un carré car chaque coupe transversale horizontale des deux pyramides est un carré.) Ce carré a des côtés de longueur 2 car X avait une abscisse de 4, ce qui est à 2 unités de BG dans ce système de coordonnées.

Ce carré divise la région tridimensionnelle partagée en deux pyramides à bases carrées.

L'une de ces pyramides pointe vers le haut et a comme cinquième sommet P. Cette pyramide a une base carrée avec des côtés de longueur 2 et une hauteur de $3 - 2 = 1$ puisque P est situé à 3 unités au-dessus de G et que la base de la pyramide est située à 2 unités au-dessus de G.

L'autre pyramide pointe vers le bas et a comme cinquième sommet G. Cette pyramide a une base carrée avec des côtés de longueur 2 et une hauteur de 2.

Donc, la région tridimensionnelle a un volume de $\frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$.

RÉPONSE : 4

Partie B

1. (a) Puisque AB est parallèle à DC et que AD est perpendiculaire à la fois à AB et à DC, alors l'aire du trapèze $ABCD$ est égale à $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot (AB + DC)$, soit $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (7 + 17) = 120$.

   On aurait aussi pu séparer le trapèze $ABCD$ en rectangle $ABFD$ et triangle rectangle BFC.
   On remarque que $ABFD$ est un rectangle car il contient trois angles droits.
   Le rectangle $ABFD$ mesure 7 par 10 et a donc une aire de 70.
   Le triangle BFC est tel que BF est perpendiculaire à FC et que $BF = AD = 10$.
   De plus, $FC = DC - DF = DC - AB = 17 - 7 = 10$.
   Donc, l'aire du triangle BFC est égale à $\frac{1}{2} \cdot FC \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50$.

   Cela signifie que l'aire du trapèze $ABCD$ est égale à $70 + 50 = 120$.

   (b) Puisque PQ est parallèle à DC, alors $\angle BQP = \angle BCF$.
   On remarque que $ABFD$ est un rectangle car il contient trois angles droits. Cela signifie que $BF = AD = 10$ et que $DF = AB = 7$.
   Dans le triangle BCF, on a $BF = 10$ et $FC = DC - DF = 17 - 7 = 10$.
   Donc, le triangle BCF est tel que $BF = FC$, ce qui signifie qu'il est rectangle et isocèle.
   Donc, $\angle BCF = 45^\circ$, d'où on a donc $\angle BQP = 45^\circ$.

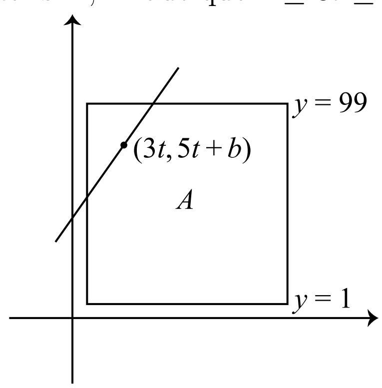
   (c) Puisque PQ est parallèle à AB et que AP et BT sont perpendiculaires à AB, alors $ABTP$ est un rectangle.
   Donc, $AP = BT$ et $PT = AB = 7$.
   Puisque $PT = 7$, alors $TQ = PQ - PT = x - 7$.
   Puisque $\angle BQT = 45^\circ$ et $\angle BTQ = 90^\circ$, alors le triangle BTQ est rectangle et isocèle.
   Donc, $BT = TQ = x - 7$.
   On a donc $AP = BT = x - 7$.

   (d) Supposons que $PQ = x$.
   Dans ce cas, le trapèze $ABQP$ a des côtés parallèles $AB = 7$ et $PQ = x$ et a une hauteur de $AP = x - 7$.
   Les aires des trapèzes $ABQP$ et $PQCD$ sont égales uniquement lorsque l'aire du trapèze $ABQP$ est égale à la moitié de celle du trapèze $ABCD$.
   Donc, les aires des trapèzes $ABQP$ et $PQCD$ sont égales uniquement lorsque $\frac{1}{2}(x-7)(x+7) = \frac{1}{2} \cdot 120$, d'où $x^2 - 49 = 120$ ou $x^2 = 169$.
   Puisque $x > 0$, alors $PQ = x = 13$.

   On aurait aussi pu remarquer que le trapèze $PQCD$ a des côtés parallèles $PQ = x$ et $DC = 17$ et a une hauteur de $PD = AD - AP = 10 - (x - 7) = 17 - x$.
   Donc, les aires des trapèzes $ABQP$ et $PQCD$ sont égales uniquement lorsque $\frac{1}{2}(x-7)(x+7) = \frac{1}{2}(17-x)(x+17)$. On a donc $x^2 - 49 = 17^2 - x^2$ ou $x^2 - 49 = 289 - x^2$, d'où $2x^2 = 338$ ou $x^2 = 169$.
   Puisque $x > 0$, alors $PQ = x = 13$.

2. (a) Les points de treillis dans la région A sont ceux dont les coordonnées (r, s) vérifient $1 \leq r \leq 99$ et $1 \leq s \leq 99$.
Chaque point situé sur la droite d'équation $y = 2x + 5$ est de la forme $(a, 2a + 5)$ et donc chaque point de treillis situé sur la droite d'équation $y = 2x+5$ est de la forme $(a, 2a+5)$, a étant un entier.
Pour qu'un tel point de treillis soit situé dans la région A, il faut que $1 \leq a \leq 99$ et que $1 \leq 2a + 5 \leq 99$.
La seconde paire d'inéquations est équivalente à $-4 \leq 2a \leq 94$ et donc à $-2 \leq a \leq 47$.
Puisqu'il faut que $1 \leq a \leq 99$ et $-2 \leq a \leq 47$ soient tous deux vérifiés, alors on doit avoir $1 \leq a \leq 47$.
Puisqu'il y a 47 entiers a dans cet intervalle, alors il y a 47 points de treillis dans la région A qui sont situés sur la droite d'équation $y = 2x + 5$.
Ces points sont les suivants : $(1, 7), (2, 9), (3, 11), \ldots, (47, 99)$.

(b) Considérons un point de treillis (r, s) qui est situé sur la droite d'équation $y = \frac{5}{3}x + b$.
Dans ce cas, on doit avoir $s = \frac{5}{3}r + b$ ou $\frac{5}{3}r = s - b$.
Puisque s et b sont tous deux des entiers, alors $\frac{5}{3}r$ est un entier.
Puisque r est un entier et que $\frac{5}{3}r$ est un entier, alors r est un multiple de 3.
On écrit $r = 3t$, t étant un entier, d'où on a donc $s = \frac{5}{3} \cdot 3t + b = 5t + b$.
Donc, on peut récrire le point de treillis (r, s) sous la forme $(3t, 5t + b)$.
Pour que $(3t, 5t + b)$ soit situé dans A, il faut que $1 \leq 3t \leq 99$.



Puisque t est un entier, alors $1 \leq t \leq 33$.
Lorsque $b = 0$, ces points sont ceux de la forme $(3t, 5t)$; ces points sont situés dans A lorsque $1 \leq t \leq 19$. Autrement dit, il y a 19 points qui sont situés dans A lorsque $b = 0$, ce qui signifie que la valeur maximale possible de b est au moins 0.
On remarque que $5t + b$ augmente à mesure que t augmente.
Lorsque $b \geq 0$ et $t \geq 1$, on a $5t + b \geq 5$. Donc, s'il y a des points qui sont situés dans A, alors le point ayant $t = 1$ doit être situé dans A. Donc, pour qu'il y ait au moins 15 points $(3t, 5t + b)$ qui soient situés dans A, les points correspondant à $t = 1, 2, \ldots, 14, 15$ doivent tous être situés dans A.
Puisque $5t + b$ est croissant, la plus grande valeur de b doit correspondre à la plus grande valeur de $5(15) + b$ qui est inférieure ou égale à 99.
Lorsque $b = 24$, on remarque que les points correspondant à $t = 1, 2, \ldots, 14, 15$ sont

$$(r, s) = (3, 29), (6, 34), \ldots, (42, 94), (45, 99)$$

ce qui signifie qu'il y a exactement 15 points qui sont situés dans A.
On remarque que si $b \geq 25$ et $t \geq 15$, alors $5t + b \geq 100$. Donc, le point $(3t, 5t + b)$ n'est pas situé dans A ; autrement dit, si $b \geq 25$, il y a moins de 15 points sur la droite qui sont situés dans A.
Donc, $b = 24$ est en effet la plus grande valeur possible de b qui répond aux conditions.

(c) On considère la droite d'équation $y = mx + 1$, m étant une valeur quelconque.
Quelle que soit la valeur de m, le point $(0, 1)$ est situé sur cette droite. Ce point ne se trouve pas dans la région A mais est situé à côté de celle-ci.
Considérons la droite d'équation $y = \frac{3}{7}x + 1$ (c'est-à-dire $m = \frac{3}{7}$).
Le point $(7, 4)$ est un point de treillis dans la région A qui est situé sur cette droite.
Cela signifie que $m = \frac{3}{7}$ ne peut faire partie de l'intervalle final des valeurs possibles. Par conséquent, n ne peut être supérieur à $\frac{3}{7}$.
On considère les points sur la droite d'équation $y = mx + 1$ avec des abscisses de 1 à 99. Ces points sont les suivants :

$$(1, m + 1), (2, 2m + 1), (3, 3m + 1), \ldots, (98, 98m + 1), (99, 99m + 1)$$

Puisque $m < n \leq \frac{3}{7}$, alors $99m + 1 < 99 \cdot \frac{3}{7} + 1 < 99$. Donc, chacun de ces 99 points se trouve dans la région A.
Cela signifie que l'on doit s'assurer qu'aucune des ordonnées $m + 1, 2m + 1, 3m + 1, \ldots, 98m + 1, 99m + 1$ n'est un entier.
Autrement dit, on veut déterminer le plus grand nombre réel possible n pour lequel aucune des ordonnées $m + 1, 2m + 1, 3m + 1, \ldots, 98m + 1, 99m + 1$ n'est un entier lorsque $\frac{2}{7} < m < n$.
Puisque les nombres réels s et $s + 1$ sont tous deux soit des entiers, soit des valeurs non entières, on veut déterminer le plus grand nombre réel possible n tel qu'aucune des expressions $m, 2m, 3m, \ldots, 98m, 99m$ n'a une valeur entière lorsque $\frac{2}{7} < m < n$.
Le fait qu'aucune des expressions $m, 2m, 3m, \ldots, 98m, 99m$ ne peut avoir une valeur entière revient à dire que m n'est pas égal à un nombre rationnel de la forme $\dfrac{c}{d}$, c étant un entier et d étant un nombre parmi $1, 2, 3, \ldots, 98, 99$.
Cela signifie que la valeur de n doit être le plus grand nombre réel n pour lequel aucun nombre rationnel $m = \dfrac{c}{d}$, c et d étant des entiers et $1 \leq d \leq 99$, ne se trouve dans l'intervalle $\dfrac{2}{7} < m < n$.
Soit s le plus petit nombre rationnel de la forme $\dfrac{c}{d}$, c et d étant des entiers et $1 \leq d \leq 99$, qui est supérieur à $\dfrac{2}{7}$.
Dans ce cas, il faut qu'on ait $n = s$.
Pour s'en convaincre, remarquons que s est tel qu'aucun nombre rationnel m respectant les restrictions identifiées précédemment ne se situe entre $\dfrac{2}{7}$ et s (d'après la définition de s).
De plus, tout nombre supérieur à s n'a pas cette propriété car s serait situé entre ce nombre et $\frac{2}{7}$. Donc, $n = s$.
Cela signifie que l'on doit déterminer le plus petit nombre rationnel de la forme $\dfrac{c}{d}$, c et d étant des entiers et $1 \leq d \leq 99$, qui est supérieur à $\dfrac{2}{7}$.

Pour ce faire, on minimise la valeur de $\dfrac{c}{d} - \dfrac{2}{7} = \dfrac{7c - 2d}{7d}$ tout en respectant les conditions suivantes : c et d sont des entiers strictement positifs tels que $1 \leq d \leq 99$ et $\dfrac{c}{d} - \dfrac{2}{7} = \dfrac{7c - 2d}{7d} > 0$, ce qui signifie également que $7c - 2d > 0$.

Lorsque $d = 99$, on minimise $\dfrac{7c - 198}{693}$. Cela se produit lorsque $c = 29$, d'où on obtient une différence de $\dfrac{5}{693}$.

Lorsque $d = 98$, on minimise $\dfrac{7c - 196}{686}$. Cela se produit lorsque $c = 29$, d'où on obtient une différence de $\dfrac{7}{686}$.

Lorsque $d = 97$, on minimise $\dfrac{7c - 194}{679}$. Cela se produit lorsque $c = 28$, d'où on obtient une différence de $\dfrac{2}{679}$.

Lorsque $d = 96$, on minimise $\dfrac{7c - 192}{672}$. Cela se produit lorsque $c = 28$, d'où on obtient une différence de $\dfrac{4}{672}$.

Lorsque $d = 95$, on minimise $\dfrac{7c - 190}{665}$. Cela se produit lorsque $c = 28$, d'où on obtient une différence de $\dfrac{6}{665}$.

Lorsque $d = 94$, on minimise $\dfrac{7c - 188}{658}$. Cela se produit lorsque $c = 27$, d'où on obtient une différence de $\dfrac{1}{658}$.

On peut vérifier que $\dfrac{1}{658}$ est plus petit que n'importe quelle valeur parmi $\dfrac{5}{693}$, $\dfrac{7}{686}$, $\dfrac{2}{679}$, $\dfrac{4}{672}$, $\dfrac{6}{665}$.

De plus, si $d < 94$, alors $\dfrac{7c - 2d}{7d} \geq \dfrac{1}{7d} > \dfrac{1}{658}$ (en remarquant que $7c - 2d \geq 1$), d'où on voit donc que toute autre différence sera supérieure à $\dfrac{1}{658}$.

Cela signifie que $\dfrac{27}{94}$ est le plus petit nombre rationnel parmi cet ensemble de nombres rationnels, ce qui signifie que $n = \dfrac{27}{94}$.

3. (a) x en degrés

On sait que $\sin\theta = 1$ lorsque $\theta = 90° + 360°k$, k étant un entier quelconque.

Donc, $\sin\left(\dfrac{x}{5}\right) = 1$ lorsque $\dfrac{x}{5} = 90° + 360°k_1$, k_1 étant un entier quelconque, d'où on obtient donc $x = 450° + 1800°k_1$.

De plus, $\sin\left(\dfrac{x}{9}\right) = 1$ lorsque $\dfrac{x}{9} = 90° + 360°k_2$, k_2 étant un entier quelconque, d'où on obtient donc $x = 810° + 3240°k_2$.

On a donc :

$$\begin{aligned} 450° + 1800°k_1 &= 810° + 3240°k_2 \\ 1800k_1 - 3240k_2 &= 360 \\ 5k_1 - 9k_2 &= 1 \end{aligned}$$

Une solution à cette équation est $k_1 = 2$ et $k_2 = 1$.

Ces valeurs donnent $x = 4050°$. On remarque que $\dfrac{x}{5} = 810°$ et $\dfrac{x}{9} = 450°$; ces deux angles ont un sinus de 1.

<u>x en radians</u>

On sait que $\sin\theta = 1$ lorsque $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, k étant un entier quelconque.

Donc, $\sin\left(\frac{x}{5}\right) = 1$ lorsque $\frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_1$, k_1 étant un entier quelconque, d'où on obtient donc $x = \frac{5\pi}{2} + 10\pi k_1$.

De plus, $\sin\left(\frac{x}{9}\right) = 1$ lorsque $\frac{x}{9} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2$, k_2 étant un entier quelconque, d'où on obtient donc $x = \frac{9\pi}{2} + 18\pi k_2$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{5\pi}{2} + 10\pi k_1 &= \frac{9\pi}{2} + 18\pi k_2 \\ 10\pi k_1 - 18\pi k_2 &= 2\pi \\ 5k_1 - 9k_2 &= 1 \end{aligned}$$

Une solution à cette équation est $k_1 = 2$ et $k_2 = 1$.

Ces valeurs donnent $x = \frac{45\pi}{2}$. On remarque que $\frac{x}{5} = \frac{9\pi}{2}$ et $\frac{x}{9} = \frac{5\pi}{2}$; les deux angles ont un sinus de 1.

Donc, une solution serait $x = 4050°$ (en degrés) ou $x = \frac{45\pi}{2}$ (en radians).

(b) Supposons que M et N sont des entiers strictement positifs.

On veut déterminer les conditions sur M et N pour lesquelles il existe ou non un angle x tel que $\sin\left(\frac{x}{M}\right) + \sin\left(\frac{x}{N}\right) = 2$.

Puisque $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ pour tout angle θ, alors l'équation $\sin\left(\frac{x}{M}\right) + \sin\left(\frac{x}{N}\right) = 2$ est équivalente à la paire d'équations $\sin\left(\frac{x}{M}\right) = \sin\left(\frac{x}{N}\right) = 1$. (Autrement dit, il doit y avoir un angle x pour lequel les deux sinus sont égaux à 1.)

Comme dans la partie (a), l'équation $\sin\left(\frac{x}{M}\right) = 1$ est équivalente à $\frac{x}{M} = 90° + 360°r$ ou à $\frac{x}{M} = \frac{\pi}{2} + 2\pi r$, r étant un entier quelconque. (On conserve les équations à la fois en degrés et en radians pour l'instant.)

Ces équations sont équivalentes à $x = 90°M + 360°rM$ ou à $x = \frac{M\pi}{2} + 2\pi rM$, r étant un entier quelconque.

De même, l'équation $\sin\left(\frac{x}{N}\right) = 1$ est équivalente à $x = 90°N + 360°sN$ ou à $x = \frac{N\pi}{2} + 2\pi sN$, s étant un entier quelconque.

Donc, si un tel x existe, alors on peut poser l'égalité entre les x des équations (les membres de droite) pour obtenir $90°M + 360°rM = 90°N + 360°sN$ ou $\frac{M\pi}{2} + 2\pi rM = \frac{N\pi}{2} + 2\pi sN$.

Il est également vrai que si ces équations sont vérifiées, alors l'existence d'un angle x qui vérifie, par exemple, $x = 90°M + 360°rM$ veut dire que ce même angle x vérifie $x = 90°N + 360°sN$.

Autrement dit, l'existence d'un angle x correspond à l'existence d'entiers r et s tels que

$90°M + 360°rM = 90°N + 360°sN$ ou $\dfrac{M\pi}{2} + 2\pi rM = \dfrac{N\pi}{2} + 2\pi sN$.
En divisant la première équation par $90°$ et la seconde par $\dfrac{\pi}{2}$, on obtient la même équation, à savoir $M+4rM = N+4sN$. Donc, il n'est plus nécessaire de distinguer entre l'utilisation des degrés ou des radians pour le reste de cette partie.
À ce point-ci, on comprend qu'il existe un angle x possédant la propriété souhaitée uniquement s'il existe des entiers r et s qui vérifient $M + 4rM = N + 4sN$.

Supposons que $M = 2^a c$ et que $N = 2^b d$, a, b, c et d étant des entiers (avec $a \geq 0$, $b \geq 0$, c étant impair et d étant impair). On exprime donc M et N sous forme de produit d'une puissance de 2 et de leur « partie impaire ».
Supposons que $a \neq b$; sans perte de généralité, supposons que $a > b$.
Donc, les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} M + 4rM &= N + 4sN \\ 2^a c + 4r \cdot 2^a c &= 2^b d + 4s \cdot 2^b d \\ 2^{a-b} c + 2^{2+a-b} rc &= d + 4sd \\ 2^{a-b} c + 2^{2+a-b} rc - 4sd &= d \end{aligned}$$

Puisque le membre de droite de cette équation est un entier impair et que celui de gauche est un entier pair peu importe le choix de r et s, alors il n'y a pas d'entiers r et s qui vérifient cette équation.
Donc, si M et N ne contiennent pas le même nombre de facteurs 2, il n'y a pas d'angle x qui vérifie l'équation initiale.

Pour aborder cela sous un autre angle, on revient à l'équation $M + 4rM = N + 4sN$ et on factorise les deux membres pour obtenir $M(1+4r) = N(1+4s)$, d'où on a donc l'équation équivalente $\dfrac{M}{N} = \dfrac{1+4s}{1+4r}$.
S'il existe des entiers r et s qui vérifient cette équation, alors $\dfrac{M}{N}$ peut s'écrire sous la forme d'un rapport d'entiers impairs et donc M et N doivent contenir le même nombre de facteurs 2.
Autrement dit, si M et N ne contiennent pas le même nombre de facteurs 2, alors les entiers r et s n'existent pas et donc l'équation initiale n'admet aucune solution.

Pour compléter la partie (b), on doit démontrer l'existence d'une suite $n_1, n_2, \ldots, n_{100}$ d'entiers strictement positifs pour lesquels $\sin\left(\dfrac{x}{n_i}\right) + \sin\left(\dfrac{x}{n_j}\right) \neq 2$ pour tout angle x et pour toutes paires $1 \leq i < j \leq 100$.
Supposons que $n_i = 2^i$ pour $1 \leq i \leq 100$.
Autrement dit, la suite $n_1, n_2, \ldots, n_{100}$ est la suite $2^1, 2^2, \ldots, 2^{100}$.
Aucuns deux nombres de la suite $n_1, n_2, \ldots, n_{100}$ ne contiennent le même nombre de facteurs 2. Donc, il n'y a pas d'angle x qui vérifie $\sin\left(\dfrac{x}{n_i}\right) + \sin\left(\dfrac{x}{n_j}\right) = 2$ pour n'importe quelles valeurs de i et j telles que $1 \leq i < j \leq 100$.
Donc, la suite $n_i = 2^i$ pour $1 \leq i \leq 100$ a la propriété souhaitée.

(c) Supposons que M et N sont des entiers strictement positifs pour lesquels il existe un angle x qui vérifie l'équation $\sin\left(\dfrac{x}{M}\right) + \sin\left(\dfrac{x}{N}\right) = 2$.

D'après la partie (b), on sait que M et N doivent contenir le même nombre de facteurs 2. Supposons à nouveau que $M = 2^a c$ et $N = 2^a d$, a, c et d étant des entiers (avec $a \geq 0$, c étant impair et d étant impair).
Donc, en poursuivant le travail précédent, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} M + 4rM &= N + 4sN \\ 2^a c + 4r \cdot 2^a c &= 2^a d + 4s \cdot 2^a d \\ c + 4rc &= d + 4sd \\ c - d &= -4rc + 4sd \end{aligned}$$

Puisque le membre de droite est un multiple de 4, alors le membre de gauche doit également être un multiple de 4. Donc, c et d ont le même reste lorsqu'ils sont divisés par 4.
(En appliquant un concept plus poussé de la théorie des nombres, il s'avère que si $c - d$ est divisible par 4, alors cette équation admettra toujours une solution pour les entiers r et s. Toutefois, cette information spécifique n'est pas essentielle pour notre analyse.)

Supposons que m_1, m_2, …, m_{100} soit une liste de 100 entiers strictement positifs distincts qui sont tels que pour chaque entier $i = 1, 2, \ldots, 99$, il existe un angle x_i qui vérifie l'équation $\sin\left(\dfrac{x_i}{m_i}\right) + \sin\left(\dfrac{x_i}{m_{i+1}}\right) = 2$.
Supposons de plus que $m_1 = 6$.
Puisque $m_1 = 2^1 \cdot 3$ et qu'il existe un angle x_1 tel que $\sin\left(\dfrac{x_1}{m_1}\right) + \sin\left(\dfrac{x_1}{m_2}\right) = 2$, on déduit d'après les explications précédentes que $m_2 = 2^1 \cdot c_2$, c_2 étant un entier strictement positif qui est 3 de plus qu'un multiple de 4 (c'est-à-dire qu'on obtient le même reste lorsqu'on divise c_2 par 4 que lorsqu'on divise 3 par 4).
De même, chaque entier dans la liste m_1, m_2, …, m_{100} peut s'écrire sous la forme $m_i = 2c_i$, c_i étant un entier strictement positif qui est 3 de plus qu'un multiple de 4.
On définit $t = \dfrac{3\pi}{2^{100}} \cdot m_1 m_2 \cdots m_{100}$.
Alors $\dfrac{t}{m_i} = \dfrac{3\pi}{2 \cdot 2^{99}(2c_i)}(2c_1)(2c_2)\cdots(2c_{100}) = \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{3c_1c_2\cdots c_{100}}{c_i}$.
Autrement dit, $\dfrac{t}{m_i}$ est égal à $\dfrac{\pi}{2}$ multiplié par le produit de 100 entiers, chacun étant 3 de plus qu'un multiple de 4. (Remarquons que le numérateur de la dernière fraction contient 101 tels entiers et que le dénominateur en contient 1.)
Le produit de deux entiers, chacun étant 3 de plus qu'un multiple de 4, est égal à un entier qui est 1 de plus qu'un multiple de 4 car si y et z sont des entiers, alors

$$(4y + 3)(4z + 3) = 16yz + 12y + 12z + 9 = 4(4yz + 3y + 3z + 2) + 1$$

De même, le produit de deux entiers, chacun étant 1 de plus qu'un multiple de 4, est égal à un entier qui est 1 de plus qu'un multiple de 4 car si y et z sont des entiers, alors

$$(4y + 1)(4z + 1) = 16yz + 4y + 4z + 1 = 4(4yz + y + z) + 1$$

Donc, le produit de 100 entiers, chacun étant 3 de plus qu'un multiple de 4, est égal au produit de 50 entiers, chacun étant 1 de plus qu'un multiple de 4, ce qui est égal à un entier qui est 1 de plus qu'un multiple de 4.

Donc, $\dfrac{t}{m_i}$ est égal à $\dfrac{\pi}{2}$ multiplié par un entier qui est 1 de plus qu'un multiple de 4. Donc, $\sin\left(\dfrac{t}{m_i}\right) = 1$. On a donc

$$\sin\left(\frac{t}{m_1}\right) + \sin\left(\frac{t}{m_2}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{t}{m_{100}}\right) = 100$$

ce qu'il fallait démontrer.
Donc, pour chaque suite $m_1, m_2, \ldots, m_{100}$, il existe bien un angle t avec la propriété souhaitée.