Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

le mercredi 15 novembre 2023
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)
le jeudi 16 novembre 2023
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

Remarques :

1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Deux nombres premiers p et q vérifient l'équation $p + q = 31$. Quelle est la valeur de pq ?

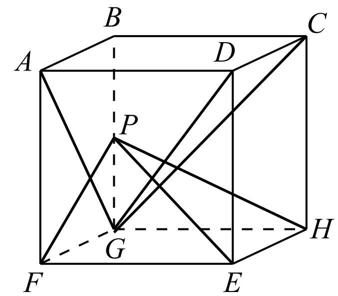
2. L'entier 203 a un chiffre des unités impair, un chiffre des dizaines pair et un chiffre des centaines pair. Combien d'entiers compris entre 100 et 999 ont un chiffre des unités impair, un chiffre des dizaines pair et un chiffre des centaines pair ?

3. La distance entre le point $P(x, y)$ et l'origine $O(0, 0)$ est de 17.
   La distance entre le point $P(x, y)$ et $A(16, 0)$ est également de 17.
   Quelles sont les deux paires de coordonnées possibles (x, y) de P ?

4. Un magasin vend des chemises, des bouteilles d'eau et des tablettes de chocolat. Les chemises coûtent 10 \$ chacune, les bouteilles d'eau 5 \$ chacune et les tablettes de chocolat 1 \$ chacune. Un jour donné, le magasin a vendu x chemises, y bouteilles d'eau et z tablettes de chocolat. Le revenu total de ces ventes était de 120 \$. Si x, y et z sont des entiers tels que $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$, combien y a-t-il de possibilités pour le triplet (x, y, z) ?

5. Quels sont tous les couples d'entiers (r, p) qui vérifient $r^2 - r(p+6) + p^2 + 5p + 6 = 0$?

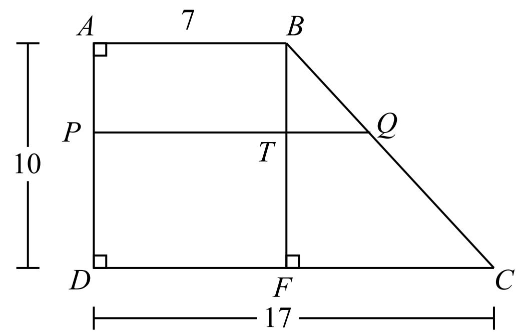
6. Le cube $ABCDEFGH$ a des arêtes de longueur 6 et le point P est situé sur l'arête BG de manière que $BP = PG$. Quel est le volume de la région tridimensionnelle qui se trouve à la fois à l'intérieur de la pyramide à base carrée $EFGHP$ et à l'intérieur de la pyramide à base carrée $ABCDG$?



PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un trapèze tel que $\angle DAB = \angle ADC = 90°$. De plus, $AB = 7$, $DC = 17$ et $AD = 10$. Le point P est situé sur AD et le point Q est situé sur BC de manière que PQ soit parallèle à AB et à DC. Le point F est situé sur DC de manière que BF soit perpendiculaire à DC. BF coupe PQ en T.



   (a) Déterminer l'aire du trapèze $ABCD$.

   (b) Déterminer la mesure de l'angle BQP.

   (c) Si $PQ = x$, déterminer la longueur AP en fonction de x.

   (d) Déterminer la longueur de PQ pour laquelle les aires des trapèzes $ABQP$ et $PQCD$ sont égales.

2. La région rectangulaire A est située dans le premier quadrant. Le côté inférieur et le côté supérieur de A sont formés respectivement par les droites d'équations $y = 0{,}5$ et $y = 99{,}5$. Le côté gauche et le côté droit de A sont formés respectivement par les droites d'équations $x = 0{,}5$ et $x = 99{,}5$.

   (a) Déterminer le nombre de points de treillis dans la région A qui sont situés sur la droite d'équation $y = 2x + 5$. (Un point de coordonnées (r, s) est appelé un *point de treillis* si r et s sont tous deux des entiers.)

   (b) Pour un entier b, il y a au moins 15 points de treillis dans la région A qui sont situés sur la droite d'équation $y = \frac{5}{3}x + b$. Déterminer la plus grande valeur possible de b.

   (c) Pour certains nombres réels m, il n'y a pas de points de treillis dans la région A qui sont situés sur la droite d'équation $y = mx + 1$. Déterminer le plus grand nombre réel possible n tel que, pour tous les nombres réels m qui vérifient $\frac{2}{7} < m < n$, il n'y a pas de points de treillis dans la région A qui sont situés sur la droite d'équation $y = mx + 1$.

3. Pour ce problème, vous pouvez choisir de considérer les angles en degrés ou en radians.

   (a) Déterminer la mesure d'un angle x qui vérifie $\sin\left(\dfrac{x}{5}\right) = \sin\left(\dfrac{x}{9}\right) = 1$.

   (b) Il existe des suites de 100 entiers strictement positifs distincts n_1, n_2, $\ldots$, n_{100} qui sont telles que, pour tous les entiers i et j qui vérifient $1 \leq i < j \leq 100$ et pour tous les angles x, on a $\sin\left(\dfrac{x}{n_i}\right) + \sin\left(\dfrac{x}{n_j}\right) \neq 2$. Déterminer une telle suite n_1, n_2, $\ldots$, n_{100} et démontrer qu'elle a cette propriété.

   (c) Supposons que m_1, m_2, $\ldots$, m_{100} est une liste de 100 entiers strictement positifs distincts telle que, pour chaque entier $i = 1, 2, \ldots, 99$, il existe un angle x_i avec $\sin\left(\dfrac{x_i}{m_i}\right) + \sin\left(\dfrac{x_i}{m_{i+1}}\right) = 2$. Démontrer que, pour toute telle suite m_1, m_2, $\ldots$, m_{100} avec $m_1 = 6$, il existe un angle t tel que

$$\sin\left(\frac{t}{m_1}\right) + \sin\left(\frac{t}{m_2}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{t}{m_{100}}\right) = 100$$

   (La somme dans le membre de gauche de l'équation est composée de 100 termes.)