Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire 2023

le mercredi 15 novembre 2023
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 novembre 2023
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

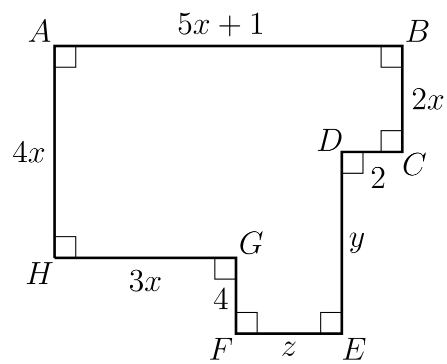
1. Le bus part à exactement 7 h 43, ce qui signifie qu'après que le bus a voyagé pendant exactement 17 minutes, il sera 8 h.
   Le bus arrive à destination à 8 h 22 exactement, soit 22 minutes après 8 h.
   Donc, le voyage a duré $17 + 22 = 39$ minutes.

   Réponse : 39

2. Étant donné que $a \blacklozenge 4 = 18$, on a $\dfrac{2a}{4} = 18$ ou $\dfrac{a}{2} = 18$, d'où $a = 36$.

   Réponse : 36

3. On nomme les sommets de la figure comme suit :



   D'après l'énoncé du problème, $AB = 5x + 1$, $BC = 2x$, $CD = 2$, $FG = 4$, $GH = 3x$ et $AH = 4x$. On pose $DE = y$ et $EF = z$.
   Étant donné que les segments de droite se croisent à angle droit s'ils se rencontrent, la somme des longueurs des segments horizontaux CD, EF et GH doit être égale à celle de AB.
   Donc, on a $2 + z + 3x = 5x + 1$, d'où $z = 5x + 1 - (3x + 2) = 2x - 1$.
   De la même manière, $AH+FG = BC+DE$, donc $4x+4 = 2x+y$, d'où $y = 4x+4-2x = 2x+4$.
   En utilisant $y = 2x + 4$ et $z = 2x - 1$, on peut écrire l'expression suivante pour calculer le périmètre :
   $$(5x + 1) + 2x + 2 + (2x + 4) + (2x - 1) + 4 + 3x + 4x$$
   que l'on simplifie pour obtenir $18x + 10$.
   Étant donné que la figure a un périmètre de 82, alors $18x + 10 = 82$, d'où $18x = 72$ ou $x = 4$.

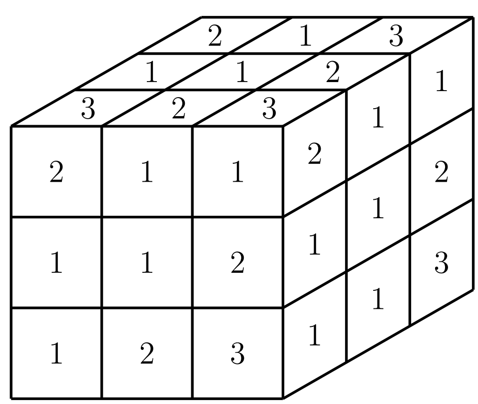
   Réponse : 4

4. Puisque $3 \times 3 \times 3 = 27$, le grand cube est formé en disposant les 27 petits cubes en trois étages, chaque étage étant composé de 9 petits cubes disposés en un carré 3×3.
   Cela signifie que chaque face du grand cube est composée de $3 \times 3 = 9$ faces de petits cubes.
   Un cube a six faces. Les six faces du grand cube contiennent donc $6 \times 9 = 54$ faces de petits cubes.
   Sur les 27 petits cubes, 1 est entièrement caché à l'intérieur du grand cube, donc aucune de ses faces ne parait sur les faces du grand cube.
   Chacun des 26 petits cubes restants a soit 1, 2 ou 3 faces qui paraissent sur les faces du grand cube.
   Parmi ces 26 petits cubes, 6 ont 1 face qui parait sur les faces du grand cube, 12 ont 2 faces qui paraissent sur les faces du grand cube et 8 ont 3 faces qui paraissent sur les faces du grand cube.
   Les 6 petits cubes dont 1 face parait sur les faces du grand cube se trouvent au centre des

faces de ce dernier.
Les 12 petits cubes dont 2 faces paraissent sur les faces du grand cube sont situés sur les arêtes de ce dernier.
Les 8 petits cubes dont 3 faces paraissent sur les faces du grand cube sont situés aux sommets du grand cube.
Remarquons que $6 \times 1 + 12 \times 2 + 8 \times 3 = 54$, ce qui correspond au nombre total attendu de faces de petits cubes qui paraissent sur les faces du grand cube.
L'objectif est de minimiser la somme de tous les entiers figurant sur les six faces du grand cube. Cela signifie que l'on veut positionner chaque petit cube de manière que la somme des entiers sur ses faces visibles soit aussi petite que possible.
Chaque petit cube a une face qui porte l'entier 1. Cela signifie que l'on peut positionner les 6 petits cubes dont 1 face parait sur les faces du grand cube de manière que le nombre qui parait sur ces faces soit 1.
Il y a 12 petits cubes dont 2 faces paraissent sur les faces du grand cube. Pour chaque tel petit cube, ces 2 faces partagent une arête commune.
La somme minimale possible des entiers sur 2 faces d'un petit cube est de $1 + 2 = 3$.
Les faces qui portent les entiers 1 et 2 partagent également une arête (comme on le voit dans le développement donné). Cela signifie que ces 12 petits cubes peuvent être disposés de manière que chacun ajoute un total de $1 + 2 = 3$ à la somme totale de tous les entiers figurant sur les six faces du grand cube.
Les 8 petits cubes dont 3 faces paraissent sur les faces du grand cube sont situés aux sommets du grand cube. Cela signifie que les 3 faces de chacun de ces petits cubes se recontrent en un sommet.
La somme minimale possible des entiers sur 3 faces d'un petit cube est de $1 + 2 + 3 = 6$.
Donc, les faces portant les entiers 1, 2 et 3 se rencontrent en un sommet.
Cela signifie que ces 8 cubes peuvent être disposés de manière que chacun ajoute un total de $1 + 2 + 3 = 6$ à la somme totale de tous les entiers figurant sur les six faces du grand cube.
En minimisant la somme totale de chacun des 26 cubes dont 1, 2 ou 3 faces paraissent sur les faces du grand cube, on minimise la somme de tous les entiers figurant sur les six faces du grand cube. Donc, d'après les arguments ci-dessus, les entiers figurant sur les six faces du grand cube ont une somme minimale possible de :

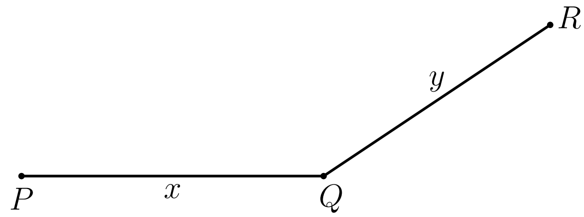
$$6 \times 1 + 12 \times 3 + 8 \times 6 = 90$$

Dans la figure ci-dessous, on voit ce à quoi pourrait ressembler le grand cube lorsque les petits cubes sont disposés de manière à minimiser la somme de tous les entiers figurant sur les six faces du grand cube.



Réponse : 90

5. Soit x km la distance entre P et Q, et y la distance entre Q et R, comme dans la figure ci-dessous.



La distance totale parcourue par le randonneur était de $(2x + 2y)$ km.
La distance totale parcourue sur terrain plat était de $2x$ km. Cette distance a été parcourue à une vitesse de 4 km/h.
Donc, le randonneur a marché sur terrain plat pendant $\dfrac{2x \text{ km}}{4 \text{ km/h}} = \dfrac{x}{2}$ h en tout.
La distance totale parcourue en montée était de y km. Cette distance a été parcourue à une vitesse de 3 km/h.
Donc, le randonneur a marché en montée pendant $\dfrac{y}{3}$ h.
La distance totale parcourue en descente était de y km. Cette distance a été parcourue à une vitesse de 6 km/h.
Donc, le randonneur a marché en descente pendant $\dfrac{y}{6}$ h.
Puisque le randonneur a quitté le point P à 13 h 00 puis est revenu au point P à 20 h 00, le temps total du voyage, y compris l'heure passée sur la plateforme d'observation, était de 7 heures.
Donc, le randonneur a marché pendant $7 - 1 = 6$ heures.
Donc, le randonneur a marché sur terrain plat pendant $\dfrac{x}{2}$ h, en montée pendant $\dfrac{y}{3}$ h et en descente pendant $\dfrac{y}{6}$ h.
On a donc

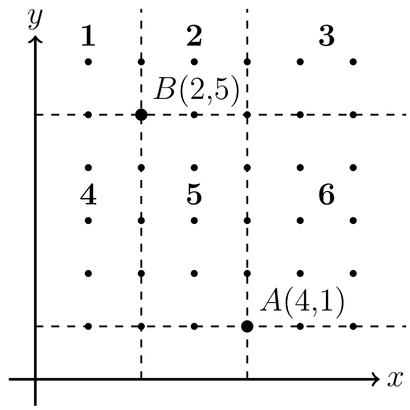
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{y}{6} = 6$$

On simplifie le membre de gauche de l'équation pour obtenir $\dfrac{3x + 2y + y}{6} = 6$ ou $\dfrac{3x + 3y}{6} = 6$, d'où $\dfrac{x + y}{2} = 6$ ou $x + y = 12$.
On multiplie les deux membres de l'équation par 2 pour obtenir $2(x+y) = 24$ ou $2x+2y = 24$.
Donc, la distance totale parcourue par le randonneur, soit $(2x + 2y)$ km, est égale à 24 km.

Réponse : 24 km

6. Dans la figure ci-dessous, on a tracé une ligne verticale en pointillés et une ligne horizontale en pointillés à travers chacun des points A et B.

Ces quatre lignes, en plus de l'axe des ordonnées, divisent l'ensemble des points dont les coordonnées sont des entiers strictement positifs en six régions. Ces régions sont numérotées de **1** à **6**, comme dans la figure.



On adopte la convention selon laquelle un point situé sur la ligne horizontale séparant deux régions est considéré comme appartenant à la région supérieure. De même, un point sur la ligne verticale séparant deux régions est considéré comme appartenant à la région la plus à droite.

Par exemple, cela signifie que le point B est situé dans la Région **2** et que le point (4,3) est situé dans la Région **6**.

Il existe trois autres régions situées entre l'axe des abscisses et la droite d'équation $y = 1$. Cependant, d'après la convention adoptée ci-dessus, aucune de ces trois régions ne contient un point dont les coordonnées sont des entiers strictement positifs.

Pour chacune de ces six régions, on examine les valeurs de d_C pour les points C situés dans cette région. Lorsque l'on parle de la « différence positive » entre deux valeurs, on entend la valeur la plus grande moins la valeur plus petite. La « différence positive » est égale à 0 si les valeurs sont égales.

Tout d'abord, on fait quelques remarques générales sur la manière de calculer d_C.

La longueur du chemin le plus court de A à C est égale à la somme de la différence positive entre les abscisses de A et C et la différence positive entre les ordonnées de A et C.

Soit h et y respectivement la différence positive entre les abscisses et la différence positive entre les ordonnées.

Il doit donc y avoir au moins h déplacements horizontaux de 1 unité et v déplacements verticaux de 1 unité dans tout chemin menant de A à C. Donc, la longueur du chemin le plus court est au moins de $h + v$.

De plus, un chemin de longueur $h + v$ est toujours possible car on peut toujours se déplacer horizontalement depuis A de h unités (dans la direction appropriée) puis se déplacer verticalement de v unités.

Pour l'exemple dans l'énoncé du problème, les coordonnées de C sont $(3, 4)$ et celles de A sont $(4, 1)$ et la longueur du chemin le plus court entre les deux est égale à $(4 - 3) + (4 - 1) = 4$.

De même, la longueur du chemin le plus court menant de C à B est égale à la somme de la différence positive entre les abscisses de C et B et la différence positive entre les ordonnées de C et B.

Région **1** : Si $C(x, y)$ est dans la Région **1**, alors $x = 1$ et $y \geq 5$.
D'après le travail ci-dessus, la longueur du chemin le plus court menant de A à C est égale à $(4 - 1) + (y - 1) = 2 + y$.
La longueur du chemin le plus court menant de C à B est égale à $(2 - 1) + (y - 5) = -4 + y$.
En additionnant ces longueurs, on obtient $d_C = (2 + y) + (-4 + y) = 2y - 2$ lorsque C est dans la Région **1**.
Pour le point $C(1, 5)$, on a donc $d_C = 2(5) - 2 = 8$.
Pour le point $C(1, 6)$, on a $d_C = 2(6) - 2 = 10$.
En poursuivant sur cette logique, si C et E sont des points dans la Région **1** tels que C se trouve une unité au-dessus de E, alors d_C est exactement deux de plus que d_E.
Donc, si C est dans la Région **1**, alors d_C est un entier pair supérieur ou égal à 8. De plus, pour chaque entier pair $N \geq 8$, il existe exactement un point C dans la Région **1** tel que $d_C = N$.

Région **2** : Si $C(x, y)$ est dans la Région **2**, alors $x = 2$ ou $x = 3$ et $y \geq 5$.
La longueur du chemin le plus court menant de A à C est égale à $(4-x)+(y-1) = 3-x+y$.
La longueur du chemin le plus court menant de C à B est égale à $(x-2)+(y-5) = -7+x+y$.
De façon générale, lorsque $C(x, y)$ est dans la Région **2**, $d_C = (3-x+y)+(-7+x+y) = -4+2y$, ce qui ne dépend pas de la valeur de x.
Pour les deux points $C(2, 5)$ et $C(3, 5)$, on a $d_C = -4 + 2(5) = 6$.
Pour les points $C(2, 6)$ et $C(3, 6)$, $d_C = 8$.
En utilisant un raisonnement semblable à celui que l'on a utilisé pour la Région **1**, on voit que pour chaque entier pair $N \geq 6$, il existe exactement deux points C dans la Région **2** tels que $d_C = N$.

Région **6** : Si $C(x, y)$ est dans la Région **6**, alors $x \geq 4$ et y est égal à l'une des valeurs 1, 2, 3 ou 4.
En effectuant des calculs semblables à ceux des cas précédents, on peut vérifier que $d_C = 2x-2$, ce qui ne dépend pas de y.
Comme pour les observations des Régions **1** et **2**, la plus petite valeur possible de d_C se produit lorsque $x = 4$, ce qui donne $d_C = 2(4) - 2 = 6$.
De plus, si x augmente de 1, alors d_C augmente de 2.
Par conséquent, pour chaque entier pair strictement positif $N \geq 6$, il existe exactement 4 points C (1 pour chaque valeur possible de y) dans la Région **6** tels que $d_C = N$.

Pour finir, on étudiera la Région **3**. Une étude approfondie des Régions **4** et **5** ne sera pas requise pour répondre à la question. Une explication sera fournie suite à l'étude de la Région **3**.

Région **3** : Si $C(x, y)$ est dans la Région **3**, alors $x \geq 4$ et $y \geq 5$.
Dans ce cas, on peut vérifier que $d_C = 2x + 2y - 12$.
La plus petite valeur possible de d_C est obtenue lorsque x et y sont tous deux aussi petits que possible. Cela se produit lorsque $(x, y) = (4, 5)$, d'où on a $d_C = 2(4) + 2(5) - 12 = 6$.
Si exactement l'un de x ou y augmente de 1 (tandis que l'autre reste inchangé), alors d_C augmente de 2.
Donc, pour $N = 8$, il existe 2 points C tels que $d_C = N$. Ces points sont situés une unité au-dessus de $(4, 5)$ et une unité à droite de $(4, 5)$ et sont donc, respectivement, $(4, 6)$ et $(5, 5)$.
Pour trouver les points C tels que $d_C = 10$, on peut se déplacer de deux unités vers le haut à partir de $(4, 5)$ ou se déplacer d'une unité vers le haut *et* d'une unité vers la droite à partir de $(4, 5)$ ou se déplacer de deux unités vers la droite à partir de $(4, 5)$.
Cela correspond aux 3 points $(6, 5)$, $(5, 6)$ et $(4, 7)$.
Donc, il y a 3 points C dans la Région **3** tels que $d_C = 10$.
En continuant de cette manière, si k est un entier strictement positif, les points C dans la

Région **3** qui satisfont $d_C = 6 + 2k$ sont
— $(4 + k{,}5)$,
— $(4 + (k - 1), 5 + 1)$,
— $(4 + (k - 2), 5 + 2)$,
— $\vdots$
— $(4 + 2, 5 + (k - 2))$,
— $(4 + 1, 5 + (k - 1))$ et
— $(4{,}5 + k)$
Il existe exactement $k + 1$ tels points.

On suppose maintenant que N est tel qu'il existe 2023 points C pour lesquels $d_C = N$.
Il y a seulement 12 points au total dans les Régions **4** et **5**.
Les Régions **1**, **2** et **6** contiennent respectivement 1, 2 et 4 points C au maximum tels que $d_C = N$.
Donc, la Région **3** doit contenir au moins $2023 - 12 - 1 - 2 - 4 = 2004$ de ces points.
D'après ce qui précède, pour chaque entier strictement positif k, il existe $k + 1$ points C dans la Région **3** tels que $d_C = 6 + 2k$.
Il faut que $k+1$ soit au moins égal à 2004, ce qui signifie que k doit être au moins égal à 2003.
Donc $N = d_C$ est au moins égal à $6 + 2(2003) = 4012$.
On peut aisément vérifier qu'aucun point C dans la Région **4** ou dans la Région **5** n'a de d_C aussi élevé que 4012, cela signifie donc que chaque point C avec $d_C = N$ se trouve dans la Région **1**, la Région **2**, la Région **3** ou la Région **6**.
De plus, comme $N \geq 4012$, il est certain qu'il existe exactement un point C dans la Région **1** tel que $d_C = N$, exactement deux points C dans la Région **2** tels que $d_C = N$ et exactement quatre points C dans la Région **6** tels que $d_C = N$.
Donc, il y a exactement $2023 - 1 - 2 - 4 = 2016$ points C dans la Région **3** tels que $d_C = N$.
Cela signifie que $k + 1 = 2016$ ou $k = 2015$, donc $d_C = 6 + 2(2015) = 4036$.

Réponse : 4036

Partie B

1. (a) Puisque le carré $ABCD$ a un côté $AB = 10$ cm, son aire est égale à $(10 \text{ cm})^2 = 100 \text{ cm}^2$.
Puisque le carré $EFGH$ a un côté $EF = 8$ cm, son aire est égale à $(8 \text{ cm})^2 = 64 \text{ cm}^2$.
La région ombrée est la région à l'intérieur de $ABCD$ qui se trouve en dehors du carré $EFGH$. Donc, l'aire de cette région est égale à la différence entre les aires des deux carrés, soit $100\,\text{cm}^2 - 64\,\text{cm}^2 = 36\,\text{cm}^2$.

(b) L'aire de $ABCD$ est égale à $(13 \text{ cm})^2 = 169 \text{ cm}^2$ et l'aire de la région ombrée est égale à 120 cm^2.
L'aire de $EFGH$ est égale à $169 \text{ cm}^2 - 120 \text{ cm}^2 = 49 \text{ cm}^2$.
Puisque $EFGH$ est un carré, alors $EFGH$ a des côtés de longueur $\sqrt{49 \text{ cm}^2} = 7$ cm.

(c) On sait que l'aire de la région ombrée est égale à $\frac{3}{4}$ de l'aire de $ABCD$, donc l'aire de $EFGH$ est égale à $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ de l'aire de $ABCD$.
L'aire de $ABCD$ est égale à $(18 \text{ cm})^2 = 324 \text{ cm}^2$.
L'aire de $EFGH$ est égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire de $ABCD$. Donc, l'aire de $EFGH$ est égale à $\frac{324}{4} \text{ cm}^2 = 81 \text{ cm}^2$.
Puisque $EFGH$ est un carré, alors $EFGH$ a des côtés de longueur $\sqrt{81 \text{ cm}^2} = 9$ cm.

(d) L'aire de $ABCD$ est égale à a^2 cm^2 et l'aire de $EFGH$ est égale à b^2 cm^2.
D'après l'énoncé du problème, $a^2 - b^2 = \frac{64}{100}a^2$, ce que l'on peut récrire sous la forme $\frac{36}{100}a^2 = b^2$.
On prend la racine carrée des deux membres de l'équation, tout en remarquant que $a > 0$ et $b > 0$, pour obtenir $\sqrt{\frac{36}{100}a^2} = \sqrt{b^2}$ ou $\frac{6}{10}a = b$, d'où $\frac{3}{5}a = b$.
On multiplie les deux membres de cette équation par $\frac{5}{3}$ pour obtenir $a = \frac{5}{3}b$.
On divise les deux membres de cette équation par b pour obtenir $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$.

2. (a) La somme IC de 4281 est égale à $4281 + 1824 = 6105$.

(b) L'entier dont les chiffres sont $ABCD$ est égal à $1000A + 100B + 10C + D$.
L'entier dont les chiffres sont $DCBA$ est égal à $1000D + 100C + 10B + A$.
La somme IC de $ABCD$ est égale à

$$\begin{aligned} ABCD + DCBA &= (1000A + 100B + 10C + D) + (1000D + 100C + 10B + A) \\ &= 1001A + 110B + 110C + 1001D \quad \text{(regrouper les termes semblables)} \\ &= 1001(A + D) + 110(B + C) \quad \text{(factoriser)} \end{aligned}$$

d'où on a donc $m = 1001$ et $n = 110$.

(c) Supposons que $ABCD$ a une somme IC de 3883.
D'après la partie (b), on a $1001(A + D) + 110(B + C) = 3883$.
Si $A + D$ était supérieur ou égal à 4, alors $1001(A + D)$ serait supérieur ou égal à 4004, ce qui serait supérieur à 3883.
Donc, $A + D$ doit être inférieur ou égal à 3.
Puisque A et D sont tous deux des chiffres non nuls, chacun d'eux est au moins 1, donc $A \geq 1$ et $D \geq 1$, d'où on a donc $A + D \geq 1 + 1 = 2$.

Cela signifie que $A + D = 2$ ou $A + D = 3$.
Si $A + D = 2$, alors $1001(A + D) = 2002$.
On reporte $1001(A + D) = 2002$ dans $1001(A + D) + 110(B + C) = 3883$ pour obtenir $2002 + 110(B + C) = 3883$ ou $110(B + C) = 1881$.
On sait également que $B + C$ est un entier. Donc $110(B + C)$ est un multiple de 10. Donc, $110(B + C)$ ne peut être égal à 1881 car ce dernier n'est pas un multiple de 10.
Donc, $A + D = 2$ n'est pas possible et on doit donc avoir $A + D = 3$.
Puisque $A + D = 3$, alors $1001(A + D) = 3003$, donc

$$110(B + C) = 3883 - 1001(A + D) = 3883 - 3003 = 880$$

On divise les deux membres de l'équation $110(B+C) = 880$ par 110 pour obtenir $B+C = 8$.
Puisque A et D sont des chiffres positifs dont la somme est 3, on doit avoir $A = 1$ et $D = 2$ ou $A = 2$ et $D = 1$.
Puisque B et C sont des chiffres dont la somme est égale à 8 et qu'il n'y a pas de contrainte pour qu'ils soient positifs, alors les couples (B, C) possibles sont $(0, 8)$, $(1, 7)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$, $(7, 1)$ ou $(8, 0)$.
Il y a 2 possibilités pour les valeurs de A et D et 9 possibilités pour les valeurs de B et C.
Il y a donc $2 \times 9 = 18$ entiers dont la somme IC est égale à 3883. Ces entiers sont :

$$1082, 1172, 1262, 1352, 1442, 1532, 1622, 1712, 1802$$

$$2081, 2171, 2261, 2351, 2441, 2531, 2621, 2711, 2801$$

(d) Supposons que n est un entier de quatre chiffres et que $ABCD$ est un entier dont la somme IC est égale à n.
D'après la partie (b), cela signifie que $1001(A + D) + 110(B + C) = n$. Remarquons que A et D sont tous deux non nuls.
Supposons qu'il existe un autre entier, $EFGH$, dont la somme IC est égale à n.
D'après la partie (b), cela signifie que $1001(E + H) + 110(F + G) = n$.
On a donc $1001(A + D) + 110(B + C) = 1001(E + H) + 110(F + G)$.
Par souci de simplicité, on pose $w = A + D$, $x = B + C$, $y = E + H$ et $z = F + G$.
L'équation ci-dessus devient donc $1001w + 110x = 1001y + 110z$, que l'on peut récrire sous la forme $1001w - 1001y = 110z - 110x$.
On factorise pour obtenir $1001(w - y) = 110(z - x)$. On divise les deux membres de cette équation par 11 pour obtenir $91(w - y) = 10(z - x)$.
Remarquons que $91 = 7 \times 13$.
De plus, $w - y$ et $z - x$ sont tous deux des entiers, ce qui signifie que $91(w - y)$ et $10(z - x)$ sont tous deux des entiers.
En outre, puisque $91(w - y)$ est un multiple de 13, alors $10(z - x)$ doit également être est un multiple de 13.
L'entier 13 est un nombre premier et 10 n'admet pas 13 comme diviseur, donc $z - x$ doit admettre 13 comme diviseur.
D'après un raisonnement semblable, $z - x$ doit admettre 7 comme diviseur, ce qui signifie que $z - x$ est un multiple de $7 \times 13 = 91$.
Soulignons que x et z représentent chacun la somme de deux chiffres.
Cela signifie que x et z sont chacun un entier de 0 à 18.
La différence entre deux entiers qui sont au moins 0 et au plus 18 doit se situer entre $0 - 18 = -18$ et $18 - 0 = 18$.
On a démontré que $z - x$ est un multiple de 91 situé entre -18 et 18.

Le seul tel entier est 0, d'où on a donc $z - x = 0$ ou $z = x$.
Puisque $z - x = 0$, alors $10(z - x) = 0$, ce qui signifie que $91(w - y) = 0$.
Donc, on a également $w - y = 0$, d'où $w = y$.

On a démontré que si $ABCD$ et $EFGH$ ont la même somme IC, alors $A + D = E + H$ et $B + C = F + G$.
Autrement dit, si n est égal à la somme IC d'un entier de quatre chiffres, alors les valeurs de $A + D$ et $B + C$ sont déterminées de manière unique.
Cela signifie que pour compter le nombre de sommes IC de quatre chiffres, on peut compter le nombre de couples (w, x) tels que $1001w + 110x \leq 9999$, sous réserve que w et x soient chacun une somme de chiffres ; w étant la somme de chiffres positifs.

Donc, la réponse à la question est le nombre de couples (w, x) avec $2 \leq w \leq 18$ et $0 \leq x \leq 18$ qui vérifient $1001w + 110x \leq 9999$.

Si $w = 2$, alors $1001w + 110x = 2002 + 110x$, donc on veut $2002 + 110x \leq 9999$ ou $110x \leq 9999 - 2002$ ou $110x \leq 7997$.
La valeur maximale de x est 18, donc la valeur maximale de $110x$ est $18 \times 110 = 1980$, ce qui est inférieur à 7997.
Donc, si $w = 2$, alors x peut être n'importe quel entier de 0 à 18.
On obtient donc 19 couples (w, x) lorsque $w = 2$.

Si $w = 3$, alors $1001w + 110x = 3003 + 110x$, ce qui signifie qu'on doit avoir $110x \leq 6996$.
Comme dans le cas où $w = 2$, chaque valeur possible de x de 0 à 18 vérifie cette inéquation, donc on obtient également 19 couples dans ce cas.

Si $w = 4$, alors on a $110x \leq 5995$ selon un raisonnement semblable. Donc, on obtient à nouveau 19 couples dans ce cas.

En poursuivant ce raisonnement, $w = 5$, $w = 6$, $w = 7$ et $w = 8$ donnent chacun 19 couples.

Si $w = 9$, alors on doit avoir $9009 + 110x \leq 9999$, donc $110x \leq 9999 - 9009$ ou $110x \leq 990$.
On voit donc que x peut être n'importe quel entier de 0 à 9 mais que toute valeur $x \geq 10$ ne peut vérifier $110x \leq 990$. On a donc 10 couples dans ce cas.

Si $w \geq 10$, alors $1001w$ est au moins 10010. Donc il n'y a aucun moyen de choisir x de sorte que $1001w + 110x$ ait quatre chiffres.

Donc, il n'y a plus d'autres cas à considérer et le nombre de sommes IC possibles de quatre chiffres est égal à

$$19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 10 = 143$$

3. (a) Les multiples positifs de 7 qui sont inférieurs ou égaux à $7^2 = 49$ sont

$$7, 14, 21, 28, 35, 42, 49$$

Aucun de ces entiers ne figure dans une rangée précédente. Donc, ces entiers sont ceux qui figurent dans la rangée 7.
Les multiples positifs de 8 qui sont inférieurs ou égaux à $8^2 = 64$ sont

$$8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64$$

Parmi ceux-ci, 8, 16 et 24 figurent dans des rangées précédentes. Donc, les entiers qui figurent dans la rangée 8 sont $32, 40, 48, 56, 64$.
Les multiples positifs de 9 qui sont inférieurs ou égaux à $9^2 = 81$ sont

$$9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81$$

Parmi ceux-ci, 9, 18 et 36 figurent dans des rangées précédentes. Donc les entiers qui figurent dans la rangée 9 sont $27, 45, 54, 63, 72, 81$.
Les multiples positifs de 10 qui sont inférieurs ou égaux à $10^2 = 100$ sont

$$10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100$$

Parmi ceux-ci, 10, 20, 30 et 40 figurent dans des rangées précédentes. Donc le plus petit entier de la rangée 10 est 50.

(b) Considérons un entier $n \geq 3$. Remarquons que n, $n-1$ et $n-2$ sont tous des entiers strictement positifs.

On factorise $n^2 - n$ pour obtenir $n^2 - n = n(n-1)$.
Puisque $n > n-1$, alors $n(n-1) > (n-1)(n-1) = (n-1)^2$. Cela signifie que $n(n-1)$ ne peut figurer dans la rangée $n-1$ car il est trop grand.
Cela signifie également que $n(n-1)$ est plus grand que 1^2, 2^2, 3^2 et ainsi de suite jusqu'à $(n-2)^2$. On conclut donc que $n(n-1)$ ne figure dans aucune des $n-1$ premières rangées.
On a également que $n(n-1)$ est un multiple de n. De plus, puisque n est positif, alors $n^2 - n < n^2$.
Donc, $n^2 - n$ est un multiple de n et satisfait donc à la propriété (i). De plus, $n^2 - n$ est inférieur à n^2 et satisfait donc à la propriété (ii). Enfin, $n^2 - n$ ne figure pas dans une rangée précédente et satisfait donc à la propriété (iii).
Donc, $n^2 - n$ figure dans la rangée n.

On factorise $n^2 - 2n$ pour obtenir $n^2 - 2n = n(n-2)$.
D'après un raisonnement semblable à celui ci-dessus, $n > n-2$ signifie que

$$n(n-2) > (n-2)(n-2) = (n-2)^2$$

Donc, $n^2 - 2n$ est supérieur à k^2 pour tous les entiers strictement positifs k qui vérifient $k \leq n-2$.
De plus, comme n est positif, $n^2 - 2n < n^2$, donc $n^2 - 2n$ est un multiple de n qui ne peut dépasser n^2.
D'après les conditions données pour la rangée n, $n^2 - 2n$ figure dans la rangée n à condition qu'il ne figure pas dans une rangée précédente. On a déjà démontré qu'il ne peut figurer dans aucune des rangées 1 à $n-2$.
Donc, on peut démontrer que $n^2 - 2n$ figure dans la rangée n en montrant qu'il ne figure *pas* dans la rangée $n-1$.

On va donc démontrer que pour tout $n \geq 3$, l'entier $n^2 - 2n$ n'est pas un multiple de $n-1$.
Cela signifie que $n^2 - 2n$ ne figure pas dans la rangée $n-1$.
Développons l'expression $(n-1)^2$:

$$\begin{aligned}(n-1)^2 &= (n-1)(n-1)\\ &= (n-1)n + (n-1)(-1)\\ &= n^2 - n + (-n) + (-1)(-1)\\ &= n^2 - 2n + 1\end{aligned}$$

On peut récrire $(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$ sous la forme $n^2 - 2n = (n-1)^2 - 1$, d'où on voit que $n^2 - 2n$ et $(n-1)^2$ sont des entiers consécutifs.
Remarquons que la différence entre deux quelconques multiples de $n-1$ doit être d'au moins $n-1$.

Puisque $n \geq 3$, alors $n-1 \geq 2$. Donc, la différence entre deux quelconques multiples de $n-1$ doit être d'au moins 2.
Puisque $(n-1)^2$ et n^2-2n ont une différence de 1, ils ne peuvent être tous deux des multiples de $n-1$.
L'entier $(n-1)^2$ est un multiple de $n-1$. Donc, n^2-2n n'est pas un multiple de $n-1$.

(c) On va démontrer que $n = 30$ est le plus grand entier tel que $n^2 - 10n$ ne figure pas dans la rangée n.
Lorsque $n = 30$, $n^2 - 10n = 30^2 - 10 \times 30 = 600$.
Puisque $600 = 24 \times 25$, alors 600 est un multiple de 25 qui est inférieur à 25^2.
Donc, 600 figure dans la rangée 25 ou dans une rangée précédente. Donc $n = 30$ est tel que $n^2 - 10n$ ne figure pas dans la rangée n.

Pour démontrer que $n = 30$ est le plus grand tel entier, on doit démontrer que tous les entiers n pour lesquels $n^2 - 10n$ ne figure pas dans la rangée n vérifient $n \leq 30$.

Pour la suite de cette solution, on suppose que n est un entier strictement positif tel que $n^2 - 10n$ ne figure pas dans la rangée n. À partir de cette supposition, on va déduire que $n \leq 30$.
Remarquons que si $n \leq 10$, alors $n^2-10n = n(n-10) \leq 0$, ce qui signifie que n^2-10n ne figure dans *aucune* rangée. On va donc supposer que $n \geq 11$ pour s'assurer que $n^2-10n > 0$.
Puisque $n(n-10) = n^2-10n$ et que n est positif, on doit avoir $n^2-10n < n^2$. Cela signifie que $n^2 - 10n$ doit figurer dans l'une des n premières rangées.
Puisque $n > n-10$ et que $n-10$ est positif, on a $n(n-10) > (n-10)(n-10) = (n-10)^2$. Cela démontre que $n(n-10)$ ne peut figurer dans la rangée m pour tout $m \leq n-10$ car sa valeur est trop grande.
On voit donc que n^2-10n doit figurer dans l'une des rangées $n-9$, $n-8$ et ainsi de suite jusqu'à la rangée n. On suppose que n^2-10n ne figure pas dans la rangée n et qu'il doit donc figurer dans l'une des rangées $n-9$ à $n-1$.
Cela signifie qu'il y a 9 cas à considérer : n^2-10n figure dans la rangée $n-9$, n^2-10n figure dans la rangée $n-8$ et ainsi de suite jusqu'à la rangée $n-1$.
Pour chaque entier k de 1 à 9, on considère le cas où n^2-10n figure dans la rangée $n-k$. Dans chacun de ces cas, on va démontrer que $n \leq 30$. Cela démontrera que quelle que soit la rangée parmi les 9 où figure n^2-10n, sa valeur ne peut être supérieure à 30.

Supposons que n^2-10n figure dans la rangée $n-9$. Cela signifie notamment que n^2-10n doit être un multiple de $n-9$.
L'expression n^2-10n n'a pas un facteur évident de $n-9$. Il serait donc utile de trouver une expression algébrique qui soit un multiple de $n-9$ et qui soit « près » de n^2-10n.
Par tâtonnements, on obtient $(n-9)(n-1) = n^2-10n+9$, que l'on peut récrire sous la forme $9 = (n-9)(n-1) - (n^2-10n)$.
Puisque l'on a supposé que n^2-10n est un multiple de $n-9$, alors l'expression $(n-9)(n-1) - (n^2-10n)$ est la différence entre deux multiples de $n-9$.
La différence entre deux multiples de $n-9$ est elle-même un multiple de 9, ce qui signifie que $9 = (n-9)(n-1) - (n^2-10n)$ doit être un multiple de $n-9$.
Si 9 est un multiple de $n-9$, alors on doit avoir $9 \geq n-9$, que l'on peut récrire sous la forme $n \leq 18$.
On a donc démontré que si n^2-10n figure dans la rangée $n-9$, alors $n \leq 18$. Donc, $n \leq 30$.

On peut appliquer ce même raisonnement aux huit autres cas.
Par exemple, supposons que $n^2 - 10n$ figure dans la rangée $n - 8$.
On remarque que $(n-8)(n-2) = n^2 - 10n + 16$. Donc, $16 = (n-8)(n-2) - (n^2 - 10n)$.
Si $n^2 - 10n$ figure dans la rangée $n - 8$, alors $n^2 - 10n$ est un multiple de $n - 8$, ce qui signifie que l'expression $16 = (n-8)(n-2) - (n^2 - 10n)$ est un multiple de $n - 8$.
Si 16 est un multiple de $n - 8$, alors $n - 8 \leq 16$, d'où $n \leq 24$, ce qui signifie que $n \leq 30$.

Par souci de brièveté, on va résumer les résultats pour les sept autres cas. Leur analyse est similaire à celle effectuée pour les rangées $n - 9$ et $n - 8$.

<u>$n^2 - 10n$ figure dans la rangée $n - 7$</u> : $21 = (n-7)(n-3) - (n^2 - 10n)$, donc 21 est un multiple de $n - 7$. Donc, $n - 7 \leq 21$ ou $n \leq 28$. Donc, $n \leq 30$.

<u>$n^2 - 10n$ figure dans la rangée $n - 6$</u> : $24 = (n-6)(n-4) - (n^2 - 10n)$, donc 24 est un multiple de $n - 6$. Donc, $n - 6 \leq 24$ ou $n \leq 30$.

<u>$n^2 - 10n$ figure dans la rangée $n - 5$</u> : $25 = (n-5)(n-5) - (n^2 - 10n)$, donc 25 est un multiple de $n - 5$. Donc, $n - 5 \leq 25$ ou $n \leq 30$.

<u>$n^2 - 10n$ figure dans la rangée $n - 4$</u> : $24 = (n-4)(n-6) - (n^2 - 10n)$, donc 24 est un multiple de $n - 4$. Donc, $n - 4 \leq 24$ ou $n \leq 28$. Donc, $n \leq 30$.

<u>$n^2 - 10n$ figure dans la rangée $n - 3$</u> : $21 = (n-3)(n-7) - (n^2 - 10n)$, donc 21 est un multiple de $n - 3$. Donc, $n - 3 \leq 21$ ou $n \leq 24$. Donc, $n \leq 30$.

<u>$n^2 - 10n$ figure dans la rangée $n - 2$</u> : $16 = (n-2)(n-8) - (n^2 - 10n)$, donc 16 est un multiple de $n - 2$. Donc, $n - 2 \leq 16$ ou $n \leq 18$. Donc, $n \leq 30$.

<u>$n^2 - 10n$ figure dans la rangée $n - 1$</u> : $9 = (n-1)(n-9) - (n^2 - 10n)$, donc 9 est un multiple de $n - 1$. Donc, $n - 1 \leq 9$ ou $n \leq 10$. Donc, $n \leq 30$.

Pour récapituler, on a supposé que $n^2 - 10n$ ne figurait pas dans la rangée n, puis on a déduit qu'il devait figurer dans la rangée k, k allant de $n - 9$ à $n - 1$. On a ensuite étudié chacun de ces 9 cas et on a démontré que $n \leq 30$ dans chaque cas.

Donc, si $n^2 - 10n$ ne figure pas dans la rangée n, alors $n \leq 30$. Puisque $n = 30$ est tel que $n^2 - 10n$ ne figure pas dans la rangée n, on peut conclure que 30 est le plus grand entier ayant cette propriété.