Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

le mercredi 15 novembre 2023
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)
le jeudi 16 novembre 2023
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

Remarques :

1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

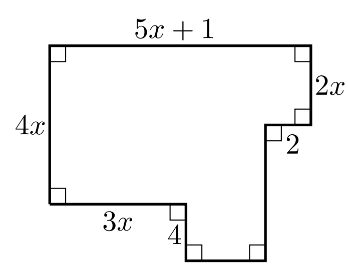
PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

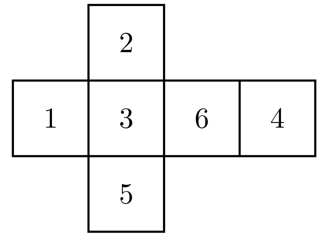
1. Un autobus quitte la gare à exactement 7 h 43 et arrive à destination à exactement 8 h 22 le même jour. Quelle a été la durée, en minutes, du voyage en autobus ?

2. L'opération $\blacklozenge$ est définie par $a \blacklozenge b = \dfrac{2a}{b}$.
   Par exemple, $6 \blacklozenge 3 = \dfrac{2 \times 6}{3} = 4$. Si $a \blacklozenge 4 = 18$, quelle est la valeur de a ?

3. La figure ci-contre est formée de huit segments de droites. De plus, les segments de droites se rencontrent en formant des angles droits. Sachant que la figure a un périmètre de 82, quelle est la valeur de x ?



4. Dans la figure ci-contre, on voit le développement d'un cube dont chaque face porte un entier. On construit un cube plus grand à l'aide de 27 copies de ce cube. Quelle est la somme minimale possible de tous les entiers figurant sur les six faces du grand cube ?

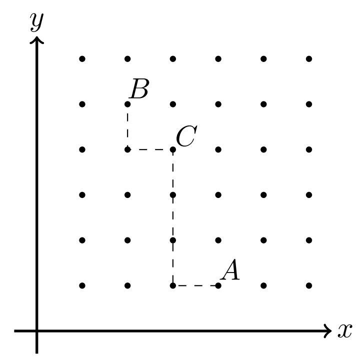


5. Un sentier de randonnée a P comme point de départ. Le sentier est composé d'une partie plate allant du point P au point Q, suivie d'une partie ascendante allant du point Q à une plate-forme d'observation située au point R.

   Un randonneur a fait un aller-retour en marchant de P à Q à R lors de l'allée et de R à Q à P lors du retour. La vitesse du randonneur était de 4 km/h sur la partie plate dans les deux sens, de 3 km/h en montée et de 6 km/h en descente. Si le randonneur a quitté P à 13 h 00, a passé exactement 1 heure à R puis est retourné à P à 20 h 00 le même jour, quelle distance totale le randonneur a-t-il parcourue ?

6. On considère les deux points $A(4, 1)$ et $B(2, 5)$. Pour chaque point C dont les coordonnées sont des entiers strictement positifs, on définit d_C comme étant la distance la plus courte nécessaire pour aller de A à C à B, en se déplaçant uniquement horizontalement et/ou verticalement. Par exemple, pour le point $C(3, 4)$, on calcule d_C de la manière suivante :

   Pour aller de A à C en se déplaçant uniquement horizontalement et/ou verticalement, on peut se déplacer de 1 unité vers la gauche puis de 3 unités vers le haut pour une distance totale de $1 + 3 = 4$. (Il existe d'autres façons de se rendre de A à C ; or aucune d'entre elles n'est plus courte.) Le chemin le plus court menant de C à B qui n'emploie que des déplacements horizontaux et verticaux comprend un déplacement de 1 unité vers la gauche puis de 1 unité vers le haut (ou de 1 unité vers le haut puis de 1 unité vers la gauche) pour une distance totale de $1+1 = 2$. Donc, pour $C(3, 4)$, on a $d_C = 4 + 2 = 6$, comme représenté dans la figure ci-contre.

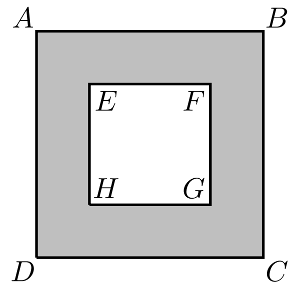
   

   L'entier strictement positif N est tel qu'il y a exactement 2023 points $C(x, y)$ avec $x > 0$ et $y > 0$ et $d_C = N$. Quelle est la valeur de N ?

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. Dans la figure ci-contre, le carré $EFGH$ est situé au centre du carré $ABCD$ et la région entre les deux carrés est ombrée.



   (a) Déterminer l'aire de la région ombrée si la longueur de AB est de 10 cm et que la longueur de EF est de 8 cm.

   (b) Déterminer la longueur de EF si la longueur de AB est de 13 cm et que l'aire de la région ombrée est égale à 120 cm^2.

   (c) Déterminer la longueur de EF si la longueur de AB est de 18 cm et que l'aire de la région ombrée est égale à $\frac{3}{4}$ de l'aire de $ABCD$.

   (d) Supposons que l'aire de la région ombrée est égale à 64 % de l'aire de $ABCD$. Si la longueur de AB est de a cm et que la longueur de EF est de b cm, déterminer la valeur de $\frac{a}{b}$.

2. Pour un entier strictement positif de quatre chiffres $ABCD$, A, B, C, et D étant des chiffres tels que $A \neq 0$ et $D \neq 0$, on définit la *somme de l'Inverse des Chiffres* (somme IC) de $ABCD$ comme étant la somme de $ABCD$ et $DCBA$. Par exemple, la somme IC de 1205 est égale à $1205 + 5021 = 6226$, tandis que l'entier 2300 n'a pas de somme IC.

   Remarquons que l'entier strictement positif de quatre chiffres $ABCD$ est égal à $1000A + 100B + 10C + D$.

   (a) Déterminer la somme IC de 4281.

   (b) Il existe des entiers strictement positifs m et n tels que la somme IC de l'entier $ABCD$ est toujours égale à $m \times (A + D) + n \times (B + C)$. Indiquer la valeur de m et la valeur de n.

   (c) Déterminer le nombre d'entiers de quatre chiffres dont la somme IC est égale à 3883.

   (d) Déterminer le nombre d'entiers de quatre chiffres qui sont égaux à la somme IC d'un entier de quatre chiffres.

3. Les entiers strictement positifs sont écrits en rangées de sorte que la rangée n comprenne tout entier m ayant les propriétés suivantes :

   (i) m est un multiple de n,

   (ii) $m \leq n^2$ et

   (iii) m ne figure pas dans une rangée précédente.

   Les six premières rangées sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Rangée 1	1
Rangée 2	2, 4
Rangée 3	3, 6, 9
Rangée 4	8, 12, 16
Rangée 5	5, 10, 15, 20, 25
Rangée 6	18, 24, 30, 36

   (a) Déterminer le plus petit entier de la rangée 10.

   (b) Démontrer que, pour tous les entiers strictement positifs $n \geq 3$, la rangée n comprend les entiers $n^2 - n$ et $n^2 - 2n$.

   (c) Déterminer le plus grand entier strictement positif n pour lequel la rangée n ne comprend pas l'entier $n^2 - 10n$.

Concours
canadien de
mathématiques
de niveau
intermédiaire
2023
(français)