Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2022

(9^e année – Secondaire III)

le mercredi 23 février 2022
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 24 février 2022
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $\dfrac{20+22}{2} = \dfrac{42}{2} = 21$.

Réponse : (D)

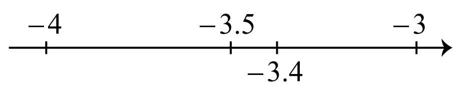
2. D'après le diagramme, Haofei a fait don de 2 \$, Mike a fait don de 6 \$, Pierre a fait don de 2 \$ et Ritika a fait don de 8 \$.
En tout, les quatre élèves ont fait don de $2\ \$ + 6\ \$ + 2\ \$ + 8\ \$ = 18\ \$$.

Réponse : (B)

3. Dans la somme donnée, chacune des quatre fractions est équivalente à $\dfrac{1}{2}$.
On a donc $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 2$.

Réponse : (E)

4. Sur une droite numérique, $-3{,}4$ est situé entre -4 et -3.
Cela signifie que $-3{,}4$ est plus près de -4 et -3 que de 0, 3 ou 4. Donc, le bon choix de réponse est soit -4, soit -3.
Si on part de -3 et qu'on se déplace dans le sens négatif (c'est-à-dire vers la gauche), on atteint $-3{,}4$ après s'être déplacé de 0,4 unités.
À partir de $-3{,}4$, il faut se déplacer de 0,6 unités dans le sens négatif pour atteindre -4.
Donc, $-3{,}4$ est plus près de -3 que de -4, d'où le bon choix de réponse est donc (B) ou -3.
En comparant -3, -4 et $-3{,}4$ on pourrait aussi remarquer que $-3{,}4$ est situé entre $-3{,}5$ et -3.
Donc, $-3{,}4$ est plus près de -3 :



Réponse : (B)

5. D'après la droite numérique, $PR = 10 - 3 = 7$ et $QS = 17 - 5 = 12$. Donc, $PR : QS = 7 : 12$.

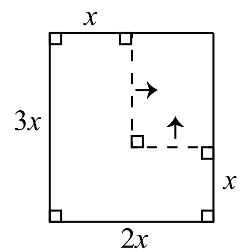
Réponse : (A)

6. À elles deux, Rosalie et Sophie doivent accomplir $4 + 14 = 18$ tâches.
Pour que Rosalie et Sophie accomplissent le même nombre de tâches, chacune doit accomplir $18 \div 2 = 9$ tâches.
Cela signifie que Sophie devrait confier $9 - 4 = 5$ tâches à Rosalie.

Réponse : (C)

7. Puisque tous les angles de la figure sont des angles droits, chaque segment de droite est soit horizontal, soit vertical.
La figure a une hauteur de $3x$ et une largeur de $2x$.
Cela signifie que le segment de droite vertical dont la longueur n'est pas indiquée a une longueur égale à $3x - x = 2x$.
De plus, le segment de droite horizontal dont la longueur n'est pas indiquée a une longueur égale à $2x - x = x$.
En partant du coin supérieur gauche et en additionnant les longueurs des côtés dans le sens des aiguilles d'une montre, on obtient un périmètre égal à $x + 2x + x + x + 2x + 3x = 10x$.

On peut aussi « compléter le rectangle » en décalant le côté horizontal le plus court et le côté vertical le plus court pour former un rectangle de hauteur $3x$ et de largeur $2x$, comme dans la figure ci-dessous :



Ce rectangle a donc un périmètre de $2 \times 2x + 2 \times 3x = 10x$.

Réponse : (E)

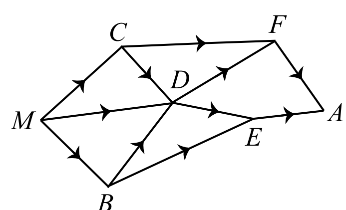
8. L'angle plein au centre d'un cercle a une mesure de 360°.
Puisque le secteur Vert a un angle au centre de 90°, cela correspond à $\frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$ du cercle.
Cela signifie que lorsqu'on fait tourner la flèche une fois, la probabilité pour qu'elle s'arrête sur le secteur Vert est égale à $\frac{1}{4}$.
De même, la probabilité pour que la flèche s'arrête sur le secteur Bleu est égale à $\frac{1}{4}$.
Puisque la flèche s'arrêtera forcément sur l'une des quatre couleurs, la probabilité pour qu'elle s'arrête sur le secteur Rouge ou le secteur Jaune est égale à $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Réponse : (D)

9. Puisque la droite d'équation $y = 2x + b$ passe au point $(-4, 0)$, les coordonnées du point doivent vérifier l'équation de la droite.
On reporte $x = -4$ et $y = 0$ dans l'équation pour obtenir $0 = 2(-4) + b$, d'où $0 = -8 + b$ ou $b = 8$.

Réponse : (E)

10. Dans la figure ci-dessous, on désigne Mathville par M, Algebratown par A et on nomme les points d'intersection des routes.



Il y a 1 itinéraire menant de M à C (soit $M \to C$) et 1 itinéraire menant de M à B (soit $M \to B$).
Il y a 3 itinéraires menant de M à D : soit $M \to D$, $M \to C \to D$ et $M \to B \to D$.
Cela signifie qu'il y a 4 itinéraires menant à F :

$$M \to C \to F \qquad M \to D \to F \qquad M \to C \to D \to F \qquad M \to B \to D \to F$$

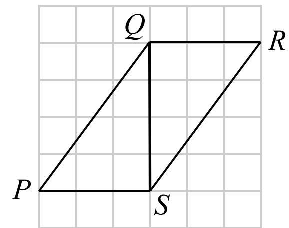
De même, 4 itinéraires mènent à E :

$$M \to B \to E \qquad M \to D \to E \qquad M \to C \to D \to E \qquad M \to B \to D \to E$$

Donc, $4+4 = 8$ itinéraires mènent à A puisque chaque itinéraire doit passer par E ou F, qu'aucun itinéraire ne passe à la fois par E et F, et que 4 itinéraires mènent à E et 4 itinéraires mènent à F.

Réponse : (C)

11. Étant donné que le quadrillage mesure 6×6, alors chaque petit carré mesure 1×1.
Cela signifie que $QR = PS = 3$.
On joint Q et S.



Puisque QS est vertical et que QR et PS sont tous deux horizontaux, alors $\angle RQS = 90°$ et $\angle PSQ = 90°$.
De plus, on remarque que $QS = 4$.
Puisque le triangle RQS est rectangle en Q, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$RS^2 = QR^2 + QS^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

Puisque $RS > 0$, alors $RS = 5$.
De même, $PQ = 5$.
Donc, le périmètre du parallélogramme $PQRS$ est égal à $PQ+QR+RS+PS = 5+3+5+3 = 16$.

Réponse : (C)

12. Parmi les entiers de 1 à 100, ceux ayant 6 pour chiffre des unités sont :

$$6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96.$$

Il y a donc 10 tels entiers.
Parmi les entiers de 1 à 100, ceux ayant 6 pour chiffre des dizaines sont :

$$60, 61, 62, 63, 64, 65, 67, 68, 69.$$

Il y a donc 9 tels entiers. (Remarquons que l'entier 66 figure uniquement dans l'une des deux listes (soit la première) car on cherche à compter les entiers et non le nombre total de 6).
Puisque le chiffre 6 doit paraitre soit comme chiffre des unités soit comme chiffre des dizaines, alors il y a $10 + 9 = 19$ entiers ayant au moins un chiffre égal à 6 parmi les entiers de 1 à 100.

Réponse : (C)

13. Supposons que Rose parcourt x mètres entre le moment où les deux filles commencent à courir et celui où elles se rencontrent.
Puisque Mayar court deux fois plus vite que Rose, alors Mayar parcourra $2x$ mètres en ce même montant de temps.
Lorsque Mayar et Rose se rencontreront, elles auront parcouru à elles deux un total de 90 m (soit la distance initiale qui les séparait).
Donc, $2x + x = 90$, d'où $3x = 90$ ou $x = 30$.
Puisque $2x = 60$, alors Mayar aura parcouru une distance de 60 m avant qu'elles ne se rencontrent.

Réponse : (D)

14. Les lettres A, B, C, D et E représentent respectivement André, Bev, Cao, Dhruv et Elcim. Soit $D > B$ la représentation du fait que « Dhruv est plus âgé que Bev ».
D'après l'énoncé du problème, on a donc $D > B$, $B > E$, $A > E$, $B > A$ et $C > B$. On voit donc que Dhruv et Cao sont plus âgés que Bev tandis qu'Elcim et André sont plus jeunes qu'elle.
Cela signifie que deux personnes sont plus âgées que Bev tandis que deux personnes sont plus jeunes qu'elle. Donc, Bev est la troisième plus âgée.

Réponse : (B)

15. On remarque que toutes les sommes possibles données sont impaires. Rappelons que tous les nombres premiers sont impairs, à l'exception de 2 (qui est pair).
Lorsque deux entiers impairs sont additionnés, leur somme est paire.
Lorsque deux entiers pairs sont additionnés, leur somme est paire.
Lorsqu'un entier pair et un entier impair sont additionnés, leur somme est impaire.
Par conséquent, si la somme de deux entiers est impaire, alors cette somme doit être celle d'un entier pair et d'un entier impair.
Puisque le seul nombre premier pair est 2, alors pour qu'un entier impair puisse être exprimé comme la somme de deux nombres premiers, l'un des nombres premiers doit être égal à 2.
On remarque que

$$19 = 2 + 17 \qquad 21 = 2 + 19 \qquad 23 = 2 + 21 \qquad 25 = 2 + 23 \qquad 27 = 2 + 25$$

On remarque donc que 17, 19 et 23 sont des nombres premiers et que 21 et 25 ne le sont pas. Donc, parmi les cinq entiers, seuls trois peuvent être exprimés comme la somme de deux nombres premiers.

Réponse : (A)

16. Puisqu'un total de 60 parties a été joué et que chacun des 3 couples de joueurs a joué le même nombre de parties, alors chaque couple de joueurs a joué $60 \div 3 = 20$ parties.
Alodie a gagné 20 % des 20 parties qu'elle a jouées contre Bingyi. Donc, parmi ces 20 parties, Alodie en a gagné $\frac{20}{100} \times 20 = \frac{1}{5} \times 20 = 4$ tandis que Bingyi en a gagné $20 - 4 = 16$.
Bingyi a gagné 60 % des 20 parties qu'elle a jouées contre Cheska. Donc, parmi ces 20 parties, Bingyi en a gagné $\frac{60}{100} \times 20 = \frac{3}{5} \times 20 = 12$.
On ne considère pas les parties que jouent Cheska et Alodie car les résultats de ces parties n'affectent pas le nombre total de victoires de Bingyi.
Donc, Bingyi a gagné $16 + 12 = 28$ parties en tout.

Réponse : (C)

17. Puisque $a + 5 = b$, alors $a = b - 5$.
On reporte $a = b - 5$ et $c = 5 + b$ dans $b + c = a$ pour obtenir

$$\begin{aligned} b + (5 + b) &= b - 5 \\ 2b + 5 &= b - 5 \\ b &= -10 \end{aligned}$$

(Si $b = -10$, alors $a = b - 5 = -15$, $c = 5 + b = -5$ et $b + c = (-10) + (-5) = (-15) = a$.)

Réponse : (C)

18. À partir de l'ordre initial des boules (soit `1 2 3 4 5`), on construit un tableau pour tenir compte des positions des boules après chacune des 10 premières étapes :

Étape	Boule que l'on déplace	Ordre des boules après l'étape
1	la plus à droite	1 2 5 3 4
2	la plus à gauche	2 5 1 3 4
3	la plus à droite	2 5 4 1 3
4	la plus à gauche	5 4 2 1 3
5	la plus à droite	5 4 3 2 1
6	la plus à gauche	4 3 5 2 1
7	la plus à droite	4 3 1 5 2
8	la plus à gauche	3 1 4 5 2
9	la plus à droite	3 1 2 4 5
10	la plus à gauche	1 2 3 4 5

Après 10 étapes, les boules sont dans le même ordre qu'au début. Cela signifie que les boules se trouvent dans leur ordre initial après chaque séquence de 10 étapes.
Puisque 2020 est un multiple de 10, alors les boules seront dans leur ordre initial après 2020 étapes.
Les étapes 2021 à 2025 auront les mêmes résultats que les étapes 1 à 5 ci-dessus. Donc, après 2025 étapes, les boules seront dans l'ordre inverse de leur ordre initial.
Donc, 2025 est une valeur possible de N. On peut adapter cet argument pour démontrer qu'aucune des valeurs 2028, 2031 et 2027 n'est une valeur possible de N.

Réponse : (E)

19. L'entier de six chiffres que Miyuki a envoyé comprenait les chiffres 2022 dans cet ordre ainsi que deux 3. Si les deux 3 étaient des chiffres consécutifs, alors il y a 5 entiers possibles :

332022 233022 203322 202332 202233

Dans les cinq entiers ci-dessus, remarquons que les deux 3 semblent se décaler de gauche à droite dans l'entier. Si les deux 3 ne sont pas des chiffres consécutifs, alors il existe 10 couples de positions possibles pour ces chiffres dans l'entier : $1^{\text{er}}/3^{\text{e}}$, $1^{\text{er}}/4^{\text{e}}$, $1^{\text{er}}/5^{\text{e}}$, $1^{\text{er}}/6^{\text{e}}$, $2^{\text{e}}/4^{\text{e}}$, $2^{\text{e}}/5^{\text{e}}$, $2^{\text{e}}/6^{\text{e}}$, $3^{\text{e}}/5^{\text{e}}$, $3^{\text{e}}/6^{\text{e}}$, $4^{\text{e}}/6^{\text{e}}$. On a donc les entiers suivants :

323022 320322 320232 320223 230322 230232 230223 203232 203223 202323

(On peut penser au fait de déplacer le 3 le plus à gauche de gauche à droite dans l'entier tout en identifiant toutes les positions possibles pour le second 3.)
Donc, il y a $5 + 10 = 15$ entiers de six chiffres possibles que Miyuki aurait pu envoyer par SMS.

Réponse : (E)

20. *Solution 1*

Chacun des n amis reçoit $\frac{1}{n}$ de la pizza.

Puisqu'il y a deux parts qui correspondent chacune à $\frac{1}{6}$ de la pizza (et puisqu'on ne peut couper ces parts), alors chaque ami doit recevoir au moins $\frac{1}{6}$ de la pizza. Cela signifie qu'il ne peut y avoir plus de 6 amis. C'est-à-dire que $n \leq 6$.
Donc, $n = 7, 8, 9, 10$ ne sont pas possibles. Leur somme est égale à 34.

La valeur $n = 2$ est possible car on peut séparer les parts en deux groupes ; chacun des groupes correspondant à $\frac{1}{2}$ de la pizza.

Remarquons que $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Cela signifie que les 6 parts restantes correspondent également à $\frac{1}{2}$ de la pizza.

La valeur $n = 3$ est possible car on peut séparer les parts en trois groupes ; chacun des groupes correspondant à $\frac{1}{3}$ de la pizza.

Puisque $2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ et $4 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$, alors les 4 parts restantes doivent également correspondre à $\frac{1}{3}$ de la pizza (soit le tiers restant de la pizza). Donc, $n = 3$ est possible.

La valeur $n = 4$ est possible car $2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ (ce que l'on peut faire deux fois). Les 4 parts restantes doivent également correspondre à $\frac{1}{4}$ de la pizza.

La valeur $n = 6$ est possible car deux parts correspondent à $\frac{1}{6}$ à elles seules, on peut former deux groupes correspondant chacun à $\frac{1}{6}$ de la pizza à partir des 4 parts qui représentent chacune $\frac{1}{12}$ de la pizza, et $\frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{3}{24} + \frac{1}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ (ce que l'on peut faire deux fois). On a donc 6 groupes qui correspondent chacun à $\frac{1}{6}$ de la pizza.

Les valeurs de n pour lesquelles ceci n'est pas possible ont soit une somme de 34 (si $n = 5$ est possible), soit une somme de 39 (si $n = 5$ n'est pas possible). Puisque 34 n'est pas l'un des choix de réponse, alors 39 est le bon choix de réponse.
(On remarque que $n = 5$ n'est pas possible car on ne peut former un groupe de parts correspondant à $\frac{1}{5}$ de la pizza qui comprendrait une part correspondant à $\frac{1}{6}$ de la pizza ; il nous faudrait une part qui corresponderait à $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{6}{30} - \frac{5}{30} = \frac{1}{30}$ de la pizza. Cela n'est pas possible étant donné que chaque part de pizza est plus grande que $\frac{1}{30}$ de la pizza.)

Solution 2

Parmi les parts de la pizza, deux parts correspondent chacune à $\frac{1}{24}$ de la pizza, quatre correspondent chacune à $\frac{1}{12}$, deux correspondent chacune à $\frac{1}{8}$ et deux correspondent chacune à $\frac{1}{6}$.

On exprime chacune des fractions au moyen d'un dénominateur commun (soit 24). Donc, deux parts correspondent chacune à $\frac{1}{24}$ de la pizza, quatre correspondent chacune à $\frac{2}{24}$, deux correspondent chacune à $\frac{3}{24}$ et deux correspondent chacune à $\frac{4}{24}$.

Pour former des groupes de parts de taille égale, on peut analyser les différentes manières de séparer les entiers 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4 et 4 en groupes de taille égale. (Ces entiers représentent la taille de chaque part mesurée en unités de $\frac{1}{24}$ de la pizza.)

Puisque le plus grand entier de la liste est 4, chaque groupe doit avoir une taille d'au moins 4.

Puisque $4 = 24 \div 6$, alors on ne peut séparer les parts en plus de 6 groupes de taille égale. Cela signifie que $n = 7, 8, 9, 10$ ne sont pas possibles.

On peut séparer les parts en $n = 6$ groupes égaux, chacun ayant une taille totale de $24 \div 6 = 4$, de la manière suivante :

$$4 \qquad 4 \qquad 3+1 \qquad 3+1 \qquad 2+2 \qquad 2+2$$

On peut séparer les parts en $n = 4$ groupes égaux, chacun ayant une taille totale de $24 \div 4 = 6$, de la manière suivante :

$$4+2 \qquad 4+2 \qquad 3+3 \qquad 2+2+1+1$$

On peut séparer les parts en $n = 3$ groupes égaux, chacun ayant une taille totale de $24 \div 3 = 8$, de la manière suivante :

$$4+4 \qquad 2+2+2+2 \qquad 3+3+1+1$$

On peut séparer les parts en $n = 2$ groupes égaux, chacun ayant une taille totale de $24 \div 2 = 12$, de la manière suivante :

$$4+4+2+2 \qquad 3+3+2+2+1+1$$

Puisque 24 n'est pas un multiple de 5, on ne peut séparer les parts en 5 groupes égaux.

Donc, les valeurs de n pour lesquelles ceci n'est pas possible ont une somme de $5 + 7 + 8 + 9 + 10 = 39$.

Réponse : (D)

21. Un panneau de dimensions 10 cm $\times$ 10 cm comporte 9 rangées de 9 trous chacune. Le panneau comporte donc $9 \times 9 = 81$ trous en tout.
Des crochets droits sont placés dans les trous sur les deux diagonales principales du panneau.
Chaque diagonale comporte 9 trous. Puisqu'il y a un nombre impair de rangées, les deux diagonales partagent un trou (celui en leur centre).
Donc, les deux diagonales comportent en tout $9 + 9 - 1 = 17$ trous.
Cela signifie qu'il y a $81 - 17 = 64$ trous vides.

Réponse : 64

22. On cherche d'abord une régularité dans les deux chiffres les plus à droite des puissances de 4, de 5 et de 7.
On dresse la liste des quelques premières puissances de 5 :

$$5^1 = 5 \qquad 5^2 = \mathbf{25} \qquad 5^3 = 1\mathbf{25} \qquad 5^4 = 6\mathbf{25} \qquad 5^5 = 31\mathbf{25}$$

Il semblerait qu'à partir de 5^2, les deux chiffres les plus à droite des puissances de 5 sont toujours 25.
Si les deux chiffres les plus à droite d'une puissance de 5 sont 25, pourquoi les deux chiffres les plus à droite de la puissance de 5 suivante sont-ils également 25 ?
Les deux chiffres les plus à droite d'une puissance de 5 dépendent entièrement des deux chiffres les plus à droite de la puissance précédente ; dans la multiplication, les chiffres situés avant les deux chiffres les plus à droite n'affectent pas les deux chiffres les plus à droite du produit.
Cela signifie qu'à partir de 5^2, les deux chiffres les plus à droite de chaque puissance de 5 sont 25. Donc les deux chiffres les plus à droite de 5^{129} sont également 25.

On dresse la liste des quelques premières puissances de 4 :

$$4^1 = 4 \qquad 4^2 = \mathbf{16} \qquad 4^3 = \mathbf{64} \qquad 4^4 = 2\mathbf{56} \qquad 4^5 = 10\mathbf{24} \qquad 4^6 = 40\mathbf{96} \qquad 4^7 = 16\,3\mathbf{84}$$

$$4^8 = 65\,5\mathbf{36} \qquad 4^9 = 262\,1\mathbf{44} \qquad 4^{10} = 1\,048\,5\mathbf{76} \qquad 4^{11} = 4\,194\,3\mathbf{04} \qquad 4^{12} = 16\,777\,2\mathbf{16}$$

On remarque que les deux chiffres les plus à droite se répètent après 10 puissances de 4. Cela signifie que les deux chiffres les plus à droite des puissances de 4 se répètent selon un cycle de longueur 10.
Puisque 120 est un multiple de 10 et que 127 est 7 de plus qu'un multiple de 10, alors les deux chiffres les plus à droite de 4^{127} sont les mêmes que ceux de 4^7, soit 84.

On dresse la liste des quelques premières puissances de 7 :

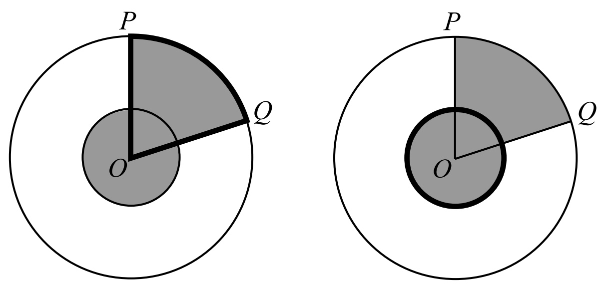
$$7^1 = 7 \qquad 7^2 = \mathbf{49} \qquad 7^3 = 3\mathbf{43} \qquad 7^4 = 24\mathbf{01} \qquad 7^5 = 16\,8\mathbf{07} \qquad 7^6 = 117\,6\mathbf{49}$$

On remarque que les deux chiffres les plus à droite se répètent après 4 puissances de 7. Cela signifie que les deux chiffres les plus à droite des puissances de 7 se répètent selon un cycle de longueur 4.
Puisque 128 est un multiple de 4 et que 131 est 3 de plus qu'un multiple de 4, alors les deux chiffres les plus à droite de 7^{131} sont les mêmes que ceux de 7^3, soit 43.

Donc, les deux chiffres les plus à droite de $4^{127} + 5^{129} + 7^{131}$ sont les deux chiffres les plus à droite de la somme $84 + 25 + 43 = 152$, soit 52. (Cela s'explique par le fait que lorsqu'on additionne des entiers de plus de deux chiffres, tous les chiffres à gauche des deux chiffres les plus à droite n'affectent pas les deux chiffres les plus à droite de la somme.)

Réponse : 52

23. Puisque les deux régions ombrées ont des aires égales, alors lorsqu'on ombre la région non ombrée du petit cercle, on constate que l'aire du secteur entièrement ombré du grand cercle est égale à l'aire du petit cercle.



Le petit cercle a un rayon de 1. Son aire est donc égale à $\pi \times 1^2 = \pi$.
Le grand cercle a un rayon de 3. Son aire est donc égale à $\pi \times 3^2 = 9\pi$.
Cela signifie que l'aire du secteur entièrement ombré du grand cercle est égale à π, d'où on comprend donc que ce secteur représente $\frac{1}{9}$ du grand cercle.

Cela signifie que l'angle POQ doit également représenter $\frac{1}{9}$ d'un angle plein. Donc, $\angle POQ = \frac{1}{9} \times 360^\circ = 40^\circ$.
Donc, $x = 40$.

Réponse : 40

24. Un nombre Pretti est un entier de 7 chiffres de la forme $a\,bcd\,efg$.
D'après l'énoncé, l'entier formé par les chiffres abc est un carré parfait.
Puisqu'un nombre Pretti est un entier strictement positif de sept chiffres, alors $a > 0$. Donc, abc est un entier de 100 à 999.
Puisque $9^2 = 81$ (qui est un entier de 2 chiffres), $10^2 = 100$ (qui est un entier de 3 chiffres), $31^2 = 961$ (qui est un entier de 3 chiffres) et $32^2 = 1024$ (qui est un entier de 4 chiffres), alors abc (qui est un entier de 3 chiffres) doit être l'un de $10^2, 11^2, \ldots, 30^2, 31^2$, puisque 32^2 a 4 chiffres.
D'après l'énoncé, l'entier formé par les chiffres $defg$ est un cube parfait.
Puisqu'un nombe Pretti ne peut avoir un chiffre des unités de mille égal à 0, alors $d > 0$.
Puisque $9^3 = 729$, $10^3 = 1000$, $21^3 = 9261$ et $22^3 = 10\,648$, alors $defg$ (qui est un entier de 4 chiffres) doit être l'un de $10^3, 11^3, \ldots, 20^3, 21^3$, puisque 22^3 a 5 chiffres.
Puisque le nombre initial a un chiffre des dizaines de mille égal à celui des unités, alors $c = g$.
Autrement dit, le chiffre des unités de abc et celui de $defg$ sont égaux.
Le chiffre des unités d'un carré parfait dépend uniquement du chiffre des unités de l'entier que l'on élève au carré ; dans la multiplication, aucun chiffre à gauche de ce chiffre n'affecte le chiffre des unités résultant.
Les carrés de 0^2 à 9^2 sont $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$.
On construit donc le tableau suivant :

Chiffre des unités de n^2	Chiffres des unités possibles de n
0	0
1	1, 9
4	2, 8
5	5
6	4, 6
9	3, 7

De même, le chiffre des unités d'un cube parfait ne dépend que du chiffre des unités de l'entier que l'on élève au cube.
Les cubes de 0^3 à 9^3 sont $0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729$.
On construit donc le tableau suivant :

Chiffre des unités de m^3	Chiffres des unités possibles de m
0	0
1	1
2	8
3	7
4	4
5	5
6	6
7	3
8	2
9	9

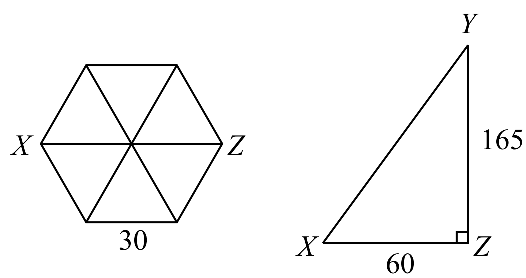
Donc, on peut dresser la liste des valeurs possibles de $c = g$ (d'après le premier tableau, celles-ci doivent être 0, 1, 4, 5, 6, 9), les carrés de 10^2 à 31^2 et les cubes de 10^3 à 21^3 ayant ce chiffre des unités :

Chiffre $c = g$	Carrés possibles	Cubes possibles	Nombres Pretti
0	10^2, 20^2, 30^2	10^3, 20^3	$3 \times 2 = 6$
1	11^2, 19^2, 21^2, 29^2, 31^2	11^3, 21^3	$5 \times 2 = 10$
4	12^2, 18^2, 22^2, 28^2	14^3	$4 \times 1 = 4$
5	15^2, 25^2	15^3	$2 \times 1 = 2$
6	14^2, 16^2, 24^2, 26^2	16^3	$4 \times 1 = 4$
9	13^2, 17^2, 23^2, 27^2	19^3	$4 \times 1 = 4$

Pour chaque carré de la deuxième colonne, chaque cube de la troisième colonne dans la même rangée est possible. (Par exemple, on peut obtenir le nombre Pretti 3 611 331 à partir de 19^2 et 11^3. De même, on peut obtenir le nombre Pretti 3 619 261 à partir de 19^2 et 21^3.) Donc, pour chacun des cas, le nombre de nombres Pretti est égal au produit du nombre de carrés possibles et nombre de cubes possibles.
Donc, il y a $6 + 10 + 4 + 2 + 4 + 4 = 30$ nombres Pretti.

Réponse : 30

25. Toute mesure présentée dans cette solution est en centimètres. Par souci de simplicité, les unités (cm) ont été omises.
Tout d'abord, on calcule la distance parcourue par la mouche. Soit m cette distance.
Soit Z le point au bas du prisme, directement au-dessous de Y.
Puisque la base hexagonale a des côtés de longueur 30, alors $XZ = 60$.
En effet, un hexagone peut être divisé en 6 triangles équilatéraux par ses diagonales. Donc, la longueur d'une diagonale est égale au double de la longueur du côté d'un triangle, d'où on comprend donc que la longueur d'une diagonale est égale au double de celle des côtés de l'hexagone.

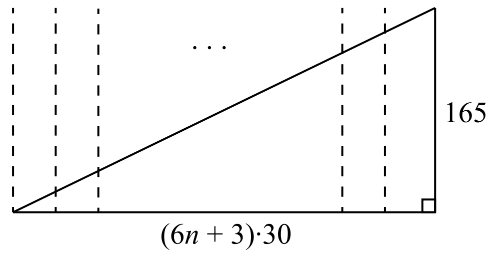


De plus, le triangle XZY est rectangle en Z puisque XZ est situé sur la base horizontale et que YZ est vertical.
D'après le théorème de Pythagore, puisque $XY > 0$, alors

$$XY = \sqrt{XZ^2 + YZ^2} = \sqrt{60^2 + 165^2}$$

Donc, $m = XY = \sqrt{60^2 + 165^2}$.

On calcule ensuite la distance parcourue par la fourmi. Soit f cette distance.
Puisque la fourmi fait le tour du prisme $n + \frac{1}{2}$ fois et qu'elle rampe sur les 6 faces verticales à chaque fois qu'elle fait le tour du prisme, alors elle rampe sur $6(n + \frac{1}{2}) = 6n + 3$ faces en tout.
Pour déterminer la valeur de f, on « déplie » l'extérieur du prisme.
Puisque la fourmi rampe sur $6n+3$ faces, elle parcourt une distance « horizontale » de $(6n+3)\cdot 30$.
De même, la fourmi parcourt une distance verticale égale à la hauteur du prisme, soit 165.
Puisque la fourmi rampe le long d'un chemin à pente constante, sa trajectoire forme l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont la base mesure $(6n + 3) \cdot 30$ et dont la hauteur mesure 165.



D'après le théorème de Pythagore, puisque $f > 0$, alors $f = \sqrt{((6n+3)\cdot 30)^2 + 165^2}$.

Étant donné que f doit être supérieur ou égal à $20m$, on veut déterminer la plus petite valeur possible de n telle que $f > 20m$.
Puisque ces quantités sont positives, les inéquations $f > 20m$ et $f^2 > 20^2m^2$ sont équivalentes.
Les inéquations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
f^2 &> 20^2m^2 \\
((6n+3)\cdot 30)^2 + 165^2 &> 400(60^2 + 165^2) \\
(6n+3)^2 \cdot 30^2 + 165^2 &> 400(60^2 + 165^2) \\
(6n+3)^2 \cdot 2^2 + 11^2 &> 400(4^2 + 11^2) \qquad \text{(on divise les deux membres par } 15^2\text{)} \\
4(6n+3)^2 + 121 &> 400 \cdot 137 \\
4(6n+3)^2 &> 54\,679 \\
(6n+3)^2 &> \tfrac{54\,679}{4} \\
6n+3 &> \sqrt{\tfrac{54\,679}{4}} \qquad \text{(puisque les deux membres sont positifs)} \\
6n &> \sqrt{\tfrac{54\,679}{4}} - 3 \\
n &> \tfrac{1}{6}\left(\sqrt{\tfrac{54\,679}{4}} - 3\right) \approx 18{,}986
\end{aligned}$$

Donc, $n = 19$ est le plus petit entier strictement positif qui vérifie l'inéquation.

Réponse : 19