Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatia 2022

le mardi 12 avril 2022

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 13 avril 2022

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) L'hexagone régulier $ABCDEF$ a des côtés de longueur $2x$. Donc $AB = 2x$.
Puisque le triangle OAB est équilatéral, alors $OA = OB = AB = 2x$.
Le rayon du cercle est égal à OA, ce qui est égal à $2x$.

(b) Puisque M est le milieu de AB et $OA = OB$, alors OM et AB sont perpendiculaires.
Puisque M est le milieu de AB, alors $AM = \frac{1}{2}AB = x$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OAM, on a $OA^2 = OM^2 + AM^2$ ou $(2x)^2 = OM^2 + x^2$, d'où $OM^2 = 3x^2$ ou $OM = \sqrt{3}x$ (puisque $OM > 0$).
Par ailleurs, on remarque que le triangle OAM est un triangle remarquable 30°-60°-90°, d'où on a donc $AM : OA : OM = 1 : 2 : \sqrt{3} = x : 2x : \sqrt{3}x$.

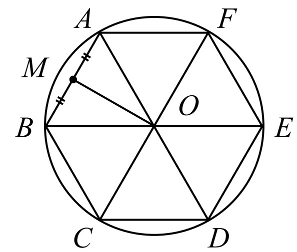

Figure 2

(c) Les diagonales AD, BE et CF divisent $ABCDEF$ en six triangles équilatéraux isométriques. Donc, l'aire de $ABCDEF$ est six fois celle du triangle OAB (ayant pour base AB et pour hauteur OM). On a donc

$$6 \times \tfrac{1}{2} \times AB \times OM = 3 \times 2x \times \sqrt{3}x = 6\sqrt{3}x^2$$

(d) L'aire de la région ombrée est obtenue en soustrayant l'aire de $ABCDEF$ de l'aire du cercle de centre O et de rayon $2x$.
Donc, l'aire de la région ombrée est égale à

$$\pi(2x)^2 - 6\sqrt{3}x^2 = 4\pi x^2 - 6\sqrt{3}x^2 = (4\pi - 6\sqrt{3})x^2$$

Cette région ombrée a une aire de 123, donc $(4\pi - 6\sqrt{3})x^2 = 123$ ou $x^2 = \dfrac{123}{4\pi - 6\sqrt{3}}$.
Puisque $x > 0$, on obtient $x = \sqrt{\dfrac{123}{4\pi - 6\sqrt{3}}}$ ou $x = 7{,}5$ en arrondissant au dixième près.

2. (a) Avec 1 kg de pâte à muffins, on peut préparer exactement 24 mini muffins et 2 grands muffins. Donc, avec 2 kg de pâte à muffins, on peut préparer exactement $2 \times 24 = 48$ mini muffins et $2 \times 2 = 4$ grand muffins. Donc, n a une valeur de 4.

(b) *Solution 1*
Avec 2 kg de pâte à muffins, on peut préparer exactement 36 mini muffins et 6 grands muffins.
Avec 2 kg de pâte à muffins, on peut préparer exactement 48 mini muffins et 4 grands muffins.
En les additionnant, on obtient qu'avec 2 kg + 2 kg = 4 kg de pâte à muffins, on peut préparer exactement $36 + 48 = 84$ mini muffins et $6 + 4 = 10$ grands muffins. Donc, $x = 4$.

Solution 2
Soit m le nombre de kilogrammes de pâte à muffins nécessaires pour préparer 1 mini muffin.
Soit g le nombre de kilogrammes de pâte à muffins nécessaires pour préparer 1 grand muffin.
Puisqu'on peut préparer exactement 24 mini muffins et 2 grand muffins avec 1 kg de pâte à muffins, alors $1 = 24m + 2g$.
Puisqu'on peut préparer exactement 36 mini muffins et 6 grands muffins avec 2 kg de pâte à muffins, alors $2 = 36m + 6g$.
On soustrait la deuxième équation de 3 fois la première pour obtenir $3 \times 1 - 2 = 3 \times (24m + 2g) - (36m + 6g)$ ou $1 = 36m$, d'où $m = \dfrac{1}{36}$.

On reporte $m = \dfrac{1}{36}$ dans la seconde équation pour obtenir $2 = 36\left(\dfrac{1}{36}\right) + 6g$ ou $1 = 6g$, d'où $g = \dfrac{1}{6}$.

Puisqu'il nous faut $\dfrac{1}{36}$ kg de pâte à muffins pour préparer 1 mini muffin, alors il nous faut $84 \cdot \dfrac{1}{36} = \dfrac{7}{3}$ kg de pâte à muffins pour préparer 84 mini muffins.

Puisqu'il nous faut $\dfrac{1}{6}$ kg de pâte à muffins pour préparer 1 grand muffin, alors il nous faut $10 \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{3}$ kg de pâte à muffins pour préparer 10 grands muffins.

Donc, on peut préparer exactement 84 mini muffins et 10 grands muffins avec $\dfrac{7}{3} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{12}{3} = 4$ kg de pâte à muffins. Donc, $x = 4$.

(c) Dans la partie (b) *Solution 2*, on avait déterminé qu'il nous fallait $\frac{1}{36}$ kg de pâte à muffins pour préparer 1 mini muffin et $\frac{1}{6}$ kg de pâte à muffins pour préparer 1 grand muffin.
Donc, il nous faut 6 fois le nombre de kilogrammes de pâte à muffins pour préparer 1 grand muffin qu'il nous en faut pour préparer 1 mini muffin $\left(6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\right)$.
En d'autres termes, on peut préparer 1 grand muffin ou 6 mini muffins en utilisant le même montant de pâte à muffins.
Donc, on peut préparer $6 \times 7 = 42$ mini muffins avec la même quantité de pâte que celle requise pour la préparation de 7 grands muffins.

3\. (a) Si le premier nombre d'une suite est 3 et que les nombres suivants sont générés par la fonction $x^2 - 3x + 1$, alors le deuxième nombre de la suite est

$$3^2 - 3(3) + 1 = 1,$$

et le troisième nombre de la suite est

$$1^2 - 3(1) + 1 = -1,$$

et le quatrième nombre de la suite est

$$(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 5.$$

Les quatre premiers nombres de la suite sont $3, 1, -1, 5$.

(b) Soit p et d respectivement le premier et deuxième nombre de la suite générée par la fonction $x^2 - 4x + 7$.
Donc, les trois premiers nombres de la suite sont $p, d, 7$.
Puisque le troisième nombre de la suite est 7, alors $d^2 - 4d + 7 = 7$.
Donc, $d^2 - 4d = 0$ ou $d(d-4) = 0$, qui a donc pour solutions $d = 0$ et $d = 4$. Donc, les trois premiers nombres de la suite pourraient être $p, 0, 7$ ou $p, 4, 7$.
Si le deuxième nombre de la suite est 0, alors $p^2 - 4p + 7 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $(-4)^2 - 4(1)(7) = -12$ (inférieur à zéro) et donc l'équation n'admet aucune solution réelle.
Donc, il n'y a pas de premier nombre dans cette suite pour lequel le deuxième nombre serait égal à 0.

Si le deuxième nombre de la suite est 4, alors $p^2 - 4p + 7 = 4$ ou $p^2 - 4p + 3 = 0$, d'où

$(p-1)(p-3)=0$, qui a donc pour solutions $p=1$ et $p=3$.
Donc, si 7 est le troisième nombre d'une suite générée par la fonction x^2-4x+7, alors les trois premiers nombres de la suite pourraient être $1, 4, 7$ ou $3, 4, 7$. Donc, les nombres possibles qui pourraient occuper la première position de la suite sont 1 et 3.

(c) Les deux premiers nombres de la suite sont c, c, d'où on a $c^2-7c-48=c$.
On a donc $c^2-8c-48=0$ ou $(c+4)(c-12)=0$, qui a donc pour solutions $c=-4$ et $c=12$.

(d) Le premier nombre de la suite est a et le deuxième est b. On a donc

$$a^2-12a+39=b.$$

Le deuxième nombre de la suite est b et le troisième nombre est a. On a donc

$$b^2-12b+39=a.$$

On soustrait la deuxième équation de la première pour obtenir

$$\begin{aligned}(a^2-12a+39)-(b^2-12b+39) &= b-a\\ a^2-b^2-12a+12b &= b-a\\ a^2-b^2-11a+11b &= 0\\ (a-b)(a+b)-11(a-b) &= 0\\ (a-b)(a+b-11) &= 0\end{aligned}$$

Puisque $a\neq b$, alors $a-b\neq 0$, d'où $a+b-11=0$ ou $b=11-a$.
On reporte $b=11-a$ dans la première équation pour obtenir $a^2-12a+39=11-a$ ou $a^2-11a+28=0$. On factorise le membre de gauche pour obtenir $(a-4)(a-7)=0$. Donc, les valeurs possibles de a sont 4 et 7.
(Remarquons que les deux suites possibles sont $4, 7, 4, \ldots$ et $7, 4, 7, \ldots$.)

4. (a) On écrit 240 en factorisation première : $240 = 2^4 3^1 5^1$. Donc,

$$f(240) = (1+4)(1+1)(1+1) = (5)(2)(2) = 20$$

(b) Supposons que $f(N)=6$ et que N est refactorisable. Alors N admet 6 comme diviseur.
N admet 6 comme diviseur uniquement lorsque ses facteurs premiers comprennent au moins un 2 et au moins un 3 (puisque $6 = 2\times 3$).
Supposons que N contienne un facteur premier supplémentaire p qui est distinct de 2 et 3. Dans ce cas, les diviseurs de N sont $1, 2, 3, 6, p, 2p, 3p$ et $6p$, ce qui est un nombre trop élevé de diviseurs.
Donc, N doit être un entier strictement positif de la forme $N = 2^u 3^v$, u et v étant des entiers strictement positifs. Donc, $f(N)=(1+u)(1+v)=6$.
Puisque u et v sont des entiers strictement positifs, alors $1+u\geq 2$ et $1+v\geq 2$. Donc, il y a exactement deux possibilités : $u=1$ et $v=2$, ou $u=2$ et $v=1$.
Lorsque $u=1$ et $v=2$, $N=2^1 3^2=18$ tandis que lorsque $u=2$ et $v=1$, $N=2^2 3^1=12$.
Les nombres refactorisables N tels que $f(N)=6$ sont 12 et 18.

(c) Puisque N est refactorisable, alors N admet $f(N)=256=2^8$ comme diviseur.
Donc, pour un entier quelconque $w\geq 8$, on peut exprimer N sous la forme $N = 2^w p_1^{a_1} p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$, $2<p_1<p_2<\cdots<p_k$ étant des nombres premiers et $a_1, a_2, \cdots, a_k$ étant des entiers strictement positifs.
Dans ce cas, $f(N)=(1+w)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)=2^8$. Donc, chacun des facteurs

$1+w, 1+a_1, 1+a_2, \cdots, 1+a_k$ est une puissance de 2 (puisque leur produit est 2^8).
Cela signifie que chacun des exposants $w, a_1, a_2, \cdots, a_k$ est 1 de moins qu'une puissance de 2.
Puisque $w \geq 8$, alors $1+w \geq 9$, d'où $1+w \geq 2^4$ (la plus petite puissance de 2 supérieure à 8).
Puisque $f(N) = (1+w)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k) = 2^8$, alors $2^4 \leq 1+w \leq 2^8$ et $1 \leq (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k) \leq 2^4$. Donc, w doit être égal à $15, 31, 63, 127$ ou 255, tandis que chacun de $a_1, a_2, \cdots, a_k$ doit être égal à $1, 3, 7$ ou 15.
Par exemple, si $1+w = 2^8$, alors $w = 256-1 = 255$ et $N = 2^{255}$.
Si $1+w = 2^4$, alors $w = 15$ et on peut exprimer N sous la forme $N = 2^{15}p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$.
Donc, le plus petit nombre N ayant le plus grand nombre de facteurs premiers distincts est $N = 2^{15}3^15^17^111^1$.
On peut vérifier que $f(N) = (1+15)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 2^4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$.
En comparant ces deux premières valeurs de N, on voit que $2^{15}3^15^17^111^1$ est bien inférieur à 2^{255}.
De plus, on voit que

- toutes les autres valeurs possibles de N ont exactement 2, 3 ou 4 facteurs premiers distincts,
- lorsque les exposants sont égaux, les petits facteurs premiers donnent des valeurs plus petites de N,
- les plus grands exposants doivent paraitre sur les plus petits facteurs premiers et
- on se rappelle que chaque exposant est 1 de moins qu'une puissance de 2.

Dans le tableau ci-dessous, on utilise les renseignements présentés ci-dessus pour déterminer les plus petites valeurs possibles de N ayant 1, 2, 3, 4 et 5 facteurs premiers distincts.
De plus, on compare la taille de chacune de ces valeurs de N dans chacun des 5 groupes.

Nombre de facteurs premiers distincts de N	Valeurs de N
1	2^{255}
2	$2^{15}3^{15} < 2^{31}3^7 < 2^{63}3^3 < 2^{127}3^1$
3	$2^{15}3^35^3 < 2^{15}3^75^1 < 2^{31}3^35^1 < 2^{63}3^15^1$
4	$2^{15}3^35^17^1 < 2^{31}3^15^17^1$
5	$2^{15}3^15^17^111^1$

Enfin, on compare les plus petites valeurs de N de chacune des 5 rangées dans le tableau ci-dessus.
Puisque $2^{15}3^35^17^1 < 2^{15}3^15^17^111^1 < 2^{15}3^35^3 < 2^{15}3^{15} < 2^{255}$, alors le plus petit nombre refactorisable N tel que $f(N) = 256$ est $N = 2^{15}3^35^17^1 = 30\,965\,760$.

(d) Soit m un entier strictement positif de la forme $m = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ étant des nombres premiers et $a_1, a_2, \cdots, a_k$ étant des entiers strictement positifs.
On choisit d'abord une valeur de N et on montre qu'elle répond aux critères.

Pour chaque $m = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$, on choisit $N = p_1^{\left(p_1^{a_1}-1\right)}p_2^{\left(p_2^{a_2}-1\right)}\cdots p_k^{\left(p_k^{a_k}-1\right)}$.
Selon le *renseignement utile* à la deuxième page du concours, $2^n \geq n+1$ pour tous les

entiers strictement positifs n.
Puisque $p \geq 2$ pour tous les nombres premiers p, alors $p^n \geq 2^n \geq n+1$.
Puisque $p^n \geq n+1$, alors $p^n - 1 \geq n$, d'où $p_e^{a_e} - 1 \geq a_e$ pour tous les entiers e tels que $1 \leq e \leq k$.
Donc, $p_1^{a_1}$ est un diviseur de $p_1^{\left(p_1^{a_1}-1\right)}$ puisque chacun d'eux est une puissance ayant pour base p_1 et $p_1^{a_1} - 1 \geq a_1$.
De même, $p_2^{a_2}$ est un diviseur de $p_2^{\left(p_2^{a_2}-1\right)}$ et ainsi de suite.
Donc, $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ est un diviseur de $N = p_1^{\left(p_1^{a_1}-1\right)} p_2^{\left(p_2^{a_2}-1\right)} \cdots p_k^{\left(p_k^{a_k}-1\right)}$.
De plus, $f(N) = \left(1 + p_1^{a_1} - 1\right)\left(1 + p_2^{a_2} - 1\right) \cdots \left(1 + p_k^{a_k} - 1\right) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} = m$.
Donc, pour tout entier $m > 1$, il existe un nombre refactorisable N tel que $f(N) = m$.